女子中高生夏の学校 2026
実験・実習「結び目とタングルの彩色」

神戸大学大学院理学研究科
和田　康載

1　はじめに

女子中高生夏の学校 2026（以下，夏学）は，2026 年 8 月 8 日（土）から 10 日（月）まで，国立オリンピック記念青少年総合センターで開催された．日本数学会からは，例年と同じく実験・実習やポスター展示などに参加した．本稿では，そのうち筆者が担当した実験・実習「結び目とタングルの彩色〜色塗りで見分ける絡み具合〜」について報告する．実験補佐として大森源城先生（茨城工業高等専門学校），酒井祐貴子先生（北里大学）に，実験 TA として川本絵莉さん，瀧野美咲さん（いずれも東京理科大学大学院）にご協力いただいた．

夏学の実験・実習では，参加者が短い時間の中で手を動かしながら理工系の考え方に触れる．数学の実験・実習では，手を動かすことと数学的な内容を伝えることの両立がなかなか難しい．説明に時間をかけすぎると講義になり，手を動かすことを優先しすぎると，そこでどのような数学を見ているのかがぼやけてしまう．今回の実験・実習では，この二つを行き来できるような構成を意識した．

2　題材を選ぶにあたって

筆者の専門である結び目理論を題材にすることは早い段階で決めていたが，その中の何を実験・実習として扱うかは少し迷った．限られた時間の中で，中学生と高校生が同じ場で取り組むためには，準備物が少なく，取り組み方が分かりやすいことが望ましい．そこで，結び目とタングルの彩色を主題にすることにした．

彩色そのものに必要なのは，結び目の図と色鉛筆だけである．一方で，好きなように色を塗るわけではなく，交点ごとに決められた条件を満たさなければならない．その条件を満たして彩色できるかどうかが，結び目を見分ける手がかりになる．彩色できるかどうかを実際に確かめられることも，中高生が取り組む題材として適していると考えた．

また，学校で学ぶ数学とは少し異なる数学の姿を見てもらいたいという思いもあった．結び目の彩色では，複雑な計算を必要としない．図を見ながら色を塗り，条件を確認し，いくつかの例を比べることで，見た目が似ていても異なる結び目があることや，図の描き方を変えても変わらない性質があることを知ることができる．

実験・実習の構成を考える際には，過去の夏学の報告記事も参考にした．組みひもを実際に編んでから記号で表す企画 [1]，地図の塗り分けを色鉛筆で体験する企画 [2]，曲面を工作する企画 [3]，ゲームを何度も試して必勝法を探す企画 [4] などである．これらの記事では，具体的な作業と数学的な説明を組み合わせながら，参加者が数学に触れる工夫がなされていた．今回の実験・実習でも，この点を意識した．

3　実験・実習の内容

日本数学会の実験・実習には，高校生 5 名と中学生 1 名の計 6 名が参加した．少人数であったため，講師，実験補佐，TA が参加者一人ひとりの様子を見ながら進めることができた．一方，参加者同士は初対面であったため，活発に意見を出し合える雰囲気を作るには少し工夫が必要であった．

そこで，大森先生からの提案により，はじめに自己紹介を兼ねて，なぜ夏学に参加したのか，また今回の実験・実習を選んだ理由を一人ずつ話してもらった．短い時間ではあったが，参加者の数学への関心やこれまでの経験を知ることができ，その後の実習で声をかける際の手がかりにもなった．また，参加者にとっても，互いに話しやすい雰囲気を作るきっかけになったように思う．

以下では，当日の実験・実習の流れに沿って，その内容を報告する．

3.1　結び目と 3 彩色可能性

実験・実習の前半では，まず数学における結び目とは何かを説明した．日常生活では，ネクタイ，リボン，ロープなど，両端のあるひもを結んだ状態を結び目と呼ぶことが多い．一方，数学では，ひもの両端をつないで一つの輪にしたものを結び目として考える．例えば，ひとえ結びをしたひもの両端を閉じると，三葉結び目と呼ばれる結び目が得られる．

最初の実習では，参加者に針金と結び目の表を配布し，表の中から好きな結び目を選んで実際に作ってもらった．交点の少ない結び目から順に作る参加者もいれば，交点の多い複雑な結び目に挑戦して悪戦苦闘する参加者もおり，それぞれの仕方で結び目に慣れていったように思う．

続いて，ひもを切ったり貼ったりせずに，のばしたりゆるめたりして移り合うものを同じ結び目とみなすことを説明した．その上で，「見た目が似ている結び目をどのように見分けるか」という問いから，3 彩色可能性を導入した．

結び目を紙に描き，各交点で下を通るところを区切って考える．このとき得られる一つ一つの部分を弧という．各弧を 3 色で塗り，すべての交点で「3 本の弧が全部同じ色」または「3 本の弧が全部違う色」のいずれかとなり，さらに全体で 2 色以上を使うとき，その結

び目は 3 彩色可能であるという．3 彩色可能かどうかは図の描き方によらず決まるため，3 彩色可能な結び目と 3 彩色可能でない結び目は異なる種類の結び目である．三葉結び目とほどけた輪っか（自明な結び目）を例に，3 彩色可能性の違いを確認した．

その後，三種類の結び目の図が描かれたプリント（図 1）と色鉛筆を配布し，参加者自身に 3 彩色を試してもらった（図 2）．すぐに答えを示すのではなく，各自で考えたり，近くの参加者と相談したりする時間を設けた．どの弧から塗り始めるか，ある交点で条件を満たすために隣の弧の色がどう決まるか，途中で条件を満たせなくなったときにどこまで戻ればよいか，といったことを試行錯誤しながら考えてもらった．

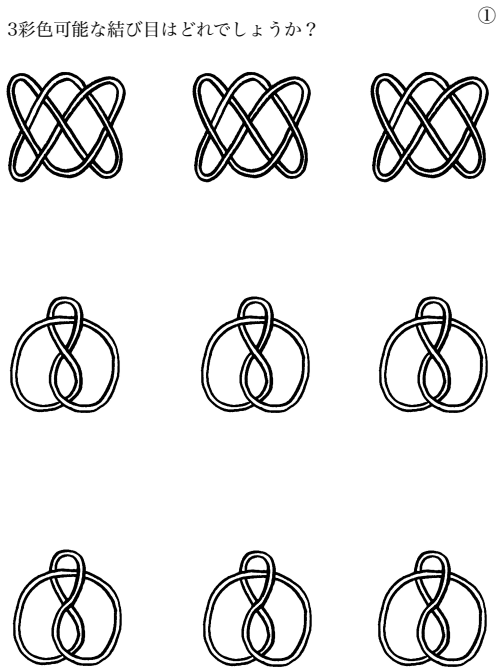


図 1: 3 彩色の実習に用いたワークシート



図 2: 3 彩色に取り組む参加者

プリントの三つの結び目のうち，3 彩色可能なものは一つしかない．残りの二つの結び目は，3 彩色可能性だけでは自明な結び目と区別できない．そこで，「3 彩色とは別の塗り方を考えたら，それらは区別できるだろうか」，「どんな塗り方がありそうか考えてみよう」という問いを投げかけた．6 名の参加者を 3 名ずつ二つのグループに分け，各グループで意見を出し合ってもらったところ，次のような案が出た．

- 色を増やす・減らす（交点における彩色条件は変えない）．

- 彩色条件を変更し，各交点で 3 本の弧をすべて異なる色で塗る．
- 結び目の弧ではなく，図によって分けられた領域に色を塗る．

このように，既に与えられたルールを使うだけでなく，参加者自身に新しい彩色の方法を考えてもらう時間を設けた．数学では，既にある定義の条件を変えたり一般化したりして，新しい対象を考えることがある．そのような数学の一面を，少しでも感じてもらえればと考えた．このうち，色の数を増やすという案を取り上げ，次に p 彩色を紹介した．

3.2　3 彩色から p 彩色へ

3 彩色では，交点に集まる 3 本の弧が「全部同じ色」または「全部違う色」となるように色を塗る．ここで，3 色をそれぞれ 0，1，2 に対応させると，この条件を式で表すことができる．上を通る弧の色を b，下を通る 2 本の弧の色を a，c とすると，3 彩色の条件は

$$a + c \equiv 2b \pmod 3$$

と書ける．そこで，法を 3 から 5 や 7 に変えると，5 彩色や 7 彩色が得られる．より一般に，結び目の各弧に $0, 1, \ldots, p-1$ を割り当て，各交点で同じ合同式を法 p で満たし，全体で 2 色以上を使うとき，その結び目は p 彩色可能であるという．

参加者には，3 彩色では区別できなかった結び目について 5 彩色や 7 彩色を試してもらい，色の数を変えると，3 彩色では区別できなかった結び目を区別できる場合があることを確認してもらった．このように，3 彩色で用いた考え方を p 彩色へと広げた．

3.3　タングルの彩色

実験の後半では，結び目からタングルへ話を広げた．タングルとは，端が残っているひもの絡まりのことである．結び目が閉じたひもの絡まりであるのに対し，タングルは端を持つひもの絡まりと考えることができる．この「端がある」ことによって，結び目とは異なる現象が現れる．

ここで整数彩色を紹介した．p 彩色では

$$a + c \equiv 2b \pmod p$$

という合同式を考えるが，整数彩色では，同じ関係を合同式ではなく整数の等式

$$a + c = 2b$$

として考える．結び目の場合，非自明な整数彩色は存在せず，すべての弧に同じ整数を塗る自明な彩色しかない．一方，2 本以上のひもからなるタングルは非自明な整数彩色を持つ．この対比は，結び目とタングルの違いを考える上で分かりやすい例である．

続いて，三種類のタングルが描かれたプリント（図 3）を配布し，整数彩色を試してもらった．この頃には彩色のルールにも慣れ，参加者は自力でタングルの整数彩色を進められるようになっていた（図 4）．

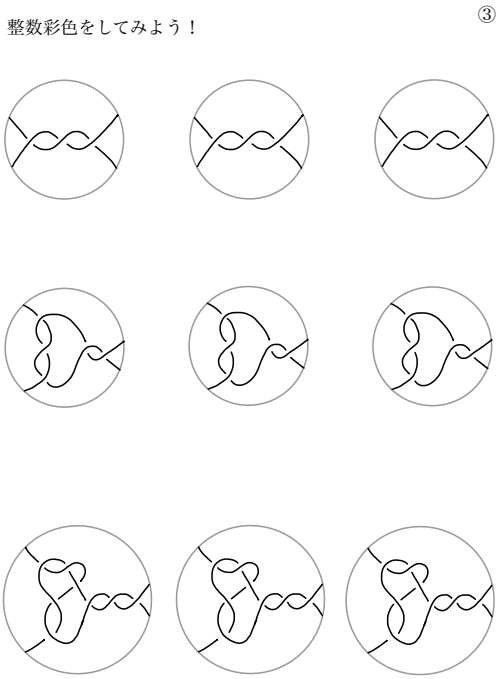


図 3: 整数彩色の実習に用いたワークシート

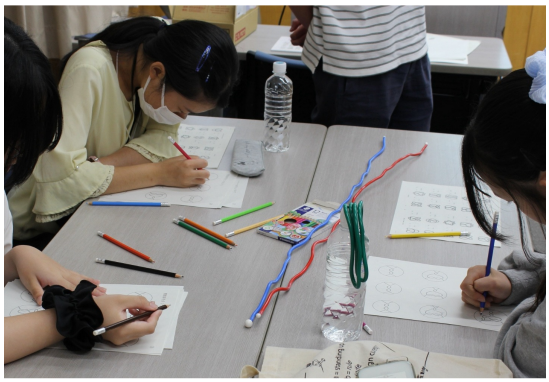


図 4: 整数彩色に取り組む参加者

その後，整数彩色されたタングルを見ながら，「端点の色にはどのような規則があるだろうか」という問いを投げかけた．すると，参加者の一人から，「端点の色を順に並べて，足す・引くを交互に行うと 0 になる」という発言が出た．実際，端点を境界に沿って順に並べたとき，その色の交代和が 0 になることが整数彩色されたタングルについて一般に成り立つ．参加者自身からこの回答が出たことに，筆者は非常に驚いた．色塗りから始めた実験を，最後にはタングルの端点の色に成り立つ一般的な性質までつなげることができた．

4　振り返りと今後に向けて

今回の実験・実習では，針金で結び目を作るところから始め，3 彩色，p 彩色，タングルの整数彩色へと順に話を進めた．実際に手を動かす時間と，そこで起きていることを数学の言葉で考える時間を交互に設けることで，準備段階で意識していた「手を動かすこと」と「数学として考えること」の両方を取り入れることができたように思う．また，参加者自身に考えてもらう時間を設けたことで，決められた手順に従うだけでなく，例を比べたり，新しい規則を考えたりするところまで進めることができた．

一方で，150 分の中で，結び目の工作，3 彩色，p 彩色，整数彩色，さらにタングルの端点の性質まで扱ったため，内容はかなり多かった．今回は少人数であったこともあり，参加者の様子を見ながら進めることができたが，参加人数や学年構成によっては，今回と同じ内容を 150 分で扱うことは難しいと思われる．とりわけ，p 彩色の合同式や整数彩色については，もう少し時間をかけて説明してもよかったと感じた．今後同様の実験・実習を行う機会があれば，参加人数や学年構成に応じて，扱う内容を絞ることも考えたい．

最後に，実験・実習を支えてくださった大森先生，酒井先生，川本さん，瀧野さん，そして参加してくださった皆さんに，改めて感謝したい．

参考文献

[1] 船越紫，女子中高生夏の学校 2017　実験・実習「組みひもの数学で遊んで占おう」，『数学通信』第 22 巻第 3 号（2017）．

[2] 河村建吾，女子中高生夏の学校 2019　実験・実習「地図の塗り分けについて〜四色定理を体験する〜」，『数学通信』第 24 巻第 3 号（2019）．

[3] 久野恵理香，女子中高生夏の学校 2022　実験・実習「曲面のふしぎ〜”向き”ってなんだろう？」，『数学通信』第 27 巻第 3 号（2022）．

[4] 斎藤新悟，女子中高生夏の学校 2024　実験・実習「数学を使ってゲームの必勝法を見つけてみよう」，『数学通信』第 29 巻第 3 号（2024）．