会員ニュース
疋田辰之氏の文部科学大臣表彰若手科学者賞受賞によせて

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構
中島　啓

疋田辰之さん（京都大学数理解析研究所）が令和 8 年度の科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞を「幾何学的表現論と組み合わせ論の研究」で受賞されました．心からお祝い申し上げます．疋田さんはこれまでに，2014 年度日本数学会賞建部賢弘賞奨励賞，第 33 回（2016 年度）井上研究奨励賞を受賞されており，後者の受賞に際して『数学通信』22 巻 1 号に指導教員の加藤周さんがお祝いの言葉 [4] を書かれています．

疋田さんの最近の顕著な業績の一つに，組み合わせ論における Stanley-Stembridge 予想の解決 [2] があり，今回の受賞理由の一つになっていると思います．この予想は 1993 年に提唱された対称多項式に関するもので，ある種のグラフの彩色対称関数とよばれる対称多項式を，初等対称多項式で展開したときに，展開係数が非負になっているというものです．これは，Stanley の代数的組み合わせ論における正値性に関する問題のリストに，21 番目の問題としてあげられており，多くの研究者が解決を試みたものでしたが，疋田さんの論文が出るまで未解決でした．

彩色対称関数は組み合わせ論的に定義されるものですが，それを紹介することは私の力量に余りますので，幾何学的表現論との関連で説明します．

旗多様体 G/B の上にある同変ベクトル束 $G \times^B \mathfrak{m}$ を考えます．ここで，$\mathfrak{m}$ は B で不変なリー環 $\mathfrak{g}$ の部分空間です．たとえば $\mathfrak{m}$ として $\mathfrak{g}$ の上三角部分環 $\mathfrak{n}$ をとれば，ベクトル束は旗多様体の余接束になります．$G \times^B \mathfrak{m} \ni (g, m)$ に対して gm を対応させるという写像 μ を定義したとき，μ のファイバーは，一般には特異点を持った空間で，Hessenberg 多様体とよばれます．$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ の場合は特に重要で，μ は，Springer の特異点解消，μ のファイバーは Springer fiber とよばれていて，幾何学的表現論に登場する基本的な空間になります．Hessenberg 多様体は，Springer fiber の類似物と考えられていて，私は詳しくありませんが，いろいろな研究があるようです．ちなみに，手前味噌ですが，私と Braverman, Finkelberg による超対称性ゲージ理論のクーロン枝の数学的な定義には，G として無限次元のループ群を取った場合の Hessenberg 多様体の類似が現れます．[6] の注 1.2.1 を参照してください．Hessenberg 多様体として，正則で半単純な $\mathfrak{g}$ の元のファイバーを考えると，Springer 表現の類似として，そのコホモロジー群にモノドロミー作用でワイル群の表現が実現されます．Hessenberg 多様体のコホモロジーを Weyl 群の次数付き表現と考え，さらに G が A 型のときに表現を対称多項式として書きあらわしたものが，彩色対称関数の q 類

似になります．この q は，コホモロジーの次数に対応し，$q=1$ と特殊化したものが，もともとの彩色対称関数になります．この定式化を見れば，彩色対称関数の q 類似を初等対称多項式で展開すると，q の非負係数多項式になるだろう，という Stanley-Stembridge 予想の q 類似に至りますが，これは現在も未解決のようです．これ以上の詳しいことは，疋田さんの論文と，その引用文献を見てください．

疋田さんは，幾何学的表現論の研究者として，Hessenberg 多様体についてよくご存じで，実際，論文の中で加藤さんの論文 A geometric realization of the chromatic symmetric function of a unit interval graph [5] が，重要な動機づけになったことが言及されています．加藤さんの論文では，$G\times^B \mathfrak{m}$ のコンパクト化が導入され，彩色対称関数の q 類似の，別の幾何学的な解釈が与えられました．ただし，この解釈が直接に Stanley-Stembridge 予想の証明に使われたのではなく，あくまで幾何学的な動機づけに基づいて，組み合わせ論的な構造を看破し，証明まで持って行った，ということのようです．こうして文章で書いてしまうと，簡潔になってしまいますが，幾何学的な感覚に基づいて，組み合わせ論の専門家たちが長らく解決できなかった困難を乗り越えた，疋田さんの力量に感服いたします．

また，加藤さんの言葉 [4] と重なる部分が多くなってしまいますが，少し前の研究として，錐的シンプレクティック特異点解消に関する予想についても言及させていただきたいと思います．現在，この予想は疋田予想とよばれて盛んに研究されています．簡単に予想の主張を述べると，二つのシンプレクティック特異点解消の組 $(X, X^!)$ の間に不思議な関係がある，という Braden, Licata, Proudfoot, Webster によるシンプレクティック双対性予想の枠組みのもとで，X のコホモロジー環と $X^!$ の上の多項式関数全体のなす座標環のある商が同型になることを予想するものです．例えば X が n 次元複素射影空間の余接束 $T^*\mathbb{C}P^n$ の全空間のとき，$X^!$ は A_n 型特異点 $xy=z^{n+1}$ の極小特異点解消になります．X のコホモロジー環は $\mathbb{C}P^n$ のコホモロジー環と同型で，よく知られているように $\mathbb{C}[z]/(z^{n+1})$ になり，これは $\mathbb{C}[x,y,z]/(xy=z^{n+1})$ において $x=0$, $y=0$ を課したものに外ならず，たしかに両者の間に同型があることが確かめられます．上で述べた商は，トーラス作用の固定点集合の座標環と幾何学的には捉えられますが，$X^!$ の特異点解消を取る前のシンプレクティック特異点を持った空間で考える必要があるために，ナイーブには固定点は錐の頂点の一点だけしかないにも関わらず，環としては自明でないものが現れます．

論文では，X, $X^!$ がともに $\mathbb{C}^2$ の点のヒルベルト概型の場合と，(A 型の箙多様体であることが知られている) A 型の部分旗多様体の余接束における Slodowy 横断片の逆像の場合に予想が確かめられています．後者は Springer fiber をラグランジアン部分多様体として持つ，表現論で重要な空間です．

疋田予想の面白いところは，X と $X^!$ という**異なる**空間において，コホモロジー環を取るという操作と座標環の商を取るという**異なる**操作を適用すると，どういうわけか**同じ**環が出

てくる，というところにあります．ただし，どういう組 $(X, X^!)$ をシンプレクティック双対と考えるべきなのか，明確な定義があるわけではありません．むしろ，多くの研究者が合意するシンプレクティック双対のリストがあり，ペアが満たすべき性質をチェックしている，というのが現在の研究状況です．私にとって幸いなことに，Braden, Licata, Proudfoot, Webster は，シンプレクティック双対 $(X, X^!)$ の例が，超対称性ゲージ理論のヒッグス枝とクーロン枝で与えられることを期待していました．このため，クーロン枝の数学的な定義を与えた，私の Braverman, Finkelberg との共同研究が，シンプレクティック双対のたくさんの例を系統的に与えることになりました．

そして，クーロン枝の数学的な定義と，疋田予想が関連し合うことによって多くの研究が行われ，予想の検証や，自然な拡張など，現在も活発に続いています．最近の発展の例として，X が ADE 型の箙多様体の場合に予想が正しいことが，Dumanski and Krylov [1] によって検証され，また X が A 型でない，旗多様体の余接束における Slodowy 横断片の逆像の場合には，疋田予想はそのままの形では成立せず修正が必要であることが，Hoang, Krylov and Matvieievskyi [3] で指摘されたことを言及しておきます．

私が疋田予想を初めて知ったのは，arXiv にプレプリントが投稿されたときで，クーロン枝の数学的な定義の研究を始めたころであったように記憶しています．当時，このような予想をどこから思いついたのだろうか，と深い感銘を受けたことを今でも鮮明に思い出します．

このようにして提示された疋田予想は，その後のシンプレクティック双対性研究の大きな推進力となり，今なお多くの研究者を惹きつけ，分野を牽引し続けています．

疋田さんがこれからどのような研究をされるのか，独創的な研究で，我々を驚かせてくれることを楽しみにしております．

AI の利用

この文章を準備する際に，Stanley-Stembridge 予想の証明についての解説と，文章全体の校正に，ChatGPT 5.5 の手を借りました．

参考文献

[1] I. Dumanski, V. Krylov, K-theoretic Hikita conjecture for quiver gauge theories. `https://arxiv.org/pdf/2509.06226`

[2] T. Hikita, *A proof of the Stanley-Stembridge conjecture*, `https://arxiv.org/pdf/2410.12758`.

[3] D. K. Hoang, V. Krylov and D. Matvieievskyi, *Around Hikita-Nakajima conjecture for nilpotent orbits and parabolic Slodowy varieties*, https://arxiv.org/pdf/2410.20512.

[4] 加藤　周, 疋田辰之氏の井上研究奨励賞をお祝いして,『数学通信』第 22 巻 1 号 (2017), 37–39.

[5] S. Kato, *A geometric realization of the chromatic symmetric function of a unit interval graph*, https://arxiv.org/pdf/2410.12231.

[6] 中島　啓, 超対称性ゲージ理論のクーロン枝の数学的定義と Kac-Moody リー環の幾何学的佐武対応, 数学 **78** (2026), 1–24.

注. この原稿を執筆したあと，OpenAI が任意のタイプの箙多様体に関する疋田予想を肯定的に解決した，というニュースが飛び込んできました．10 月初めにアナウンスされた OpenAI が発表した 700 本以上の論文の中の 1 つが，疋田予想に関するものでした．