小林俊行先生の藤原賞受賞に寄せて

東京大学大学院数理科学研究科
大島　芳樹

小林俊行先生が「無限次元の対称性の数学的研究」の業績により，第 67 回藤原賞を受賞されました．心よりお祝い申し上げます．藤原賞は，公益財団法人藤原科学財団より，科学の発展に卓越した貢献をした研究者に授与される，我が国を代表する顕彰です．自然科学の基礎から応用まで，数学・物理，化学，工学，生物・農学，医学と広範な分野が対象となる中で，数学の研究が選ばれたことも大変喜ばしいニュースです．

小林先生は，「対称性」をテーマとして数学の新しい領域をいくつも創始されてきました．2025 年に，これまでの研究とその影響を振り返る全 3 巻・約 2000 ページに及ぶ記念論文集 “Symmetry in Geometry and Analysis: Festschrift in Honor of Toshiyuki Kobayashi” が Springer の Progress in Mathematics シリーズから刊行されました．この論文集の冒頭の約 100 ページでは “The Mathematical Work of Toshiyuki Kobayashi” と題して，8 人の研究者による解説が収められ，以下のテーマを通して小林先生の研究がリー群の表現論にとどまらず，数学の様々な分野の発展にどのような影響を与えてきたかが紹介されています．

- 擬リーマン幾何における不連続群の理論
- 可視的作用と無重複性の伝播定理
- 積分幾何
- 表現の分岐則
- 対称性破れ作用素，F-method
- 極小表現の大域解析

問題も定式化されておらず，研究すべき対象すら定かでなかった場所に，小林先生は自然な問いを立てて自ら基礎理論を構築し，新しい研究の流れを次々と切り拓いてこられました．その代表的な例をここでご紹介したいと思います．「擬リーマン幾何における不連続群の理論」における重要な問いのひとつは，「局所的に均質な空間がどのような大域的な形をとりうるか」というものでした．局所構造をリー群の等質空間 G/H で与えるとき，大域的な形は G の離散部分群 Γ による商 $\Gamma\backslash G/H$ で表されます．たとえば $G/H = SL(2,\mathbf{R})/SO(2)$ のとき，$\Gamma\backslash G/H$ は離散群 Γ の一次分数変換による上半平面の商です．このように H がコ

ンパクトで G/H がリーマン計量をもつ場合の商 $\Gamma\backslash G/H$ は長い研究の歴史があり，離散群の研究，保型形式論，タイヒミュラー理論などと深く結びついています．一方でリーマン幾何の枠組みを離れ，ローレンツ多様体をはじめ擬リーマン多様体（計量が不定値であるもの）など，より一般の幾何構造に関する同様の問いは，1980 年代半ばまで個々の空間の性質を使った研究にとどまっており，一般理論は存在しませんでした．リーマン幾何との根本的な相違は，等質空間としてみたとき部分群 H が非コンパクトであり，一般に離散群の作用が固有でないために商がハウスドルフ空間でないことに起因しています．そのような状況の中で小林先生は「G/H への Γ の作用はいつ固有不連続か」という問いに対して，部分群 Γ と H を対等に扱い，さらにそれらの群構造さえも一旦忘れるという大胆なアイディアにより，作用の固有性の一般的な判定条件を得ました．この結果により，特にカラビ・マルクス現象，すなわち正の定曲率をもつ完備なローレンツ多様体の基本群は有限である（言いかえると $G/H = O(n,1)/O(n-1,1)$ に固有不連続に作用する群は有限群のみである）という現象を，等質空間として大きく一般化した枠組みから捉えることが可能になりました．

さらに，小林先生は「どのような G/H に対して $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクト多様体となる Γ が存在するか」すなわち「どのような局所的な幾何構造がコンパクトモデルをもつか」という問いを提起しました．この自然な問題は，小林先生自身による先駆的な研究の後に，分野を超えて多くの数学者を惹きつけました．特にコンパクト商の存在の障害を調べるために，離散群の群コホモロジー，特性類，調和写像，エルゴード理論，ユニタリ表現論など多岐にわたる手法が用いられてきました．難しくも奥が深いこの問題は現在でも活発に研究されています．

離散群の作用の変形や商空間上の解析へと理論はさらに広がっています．リーマン幾何の設定では，セルバーグやヴェイユの局所剛性定理によりコンパクト商が非自明な変形をもつのは上半平面の商のみであることが知られていましたが，擬リーマン幾何においては本質的に高ランクの空間でも $G/H = G' \times G'/\Delta G'$ $(G' = SO(n,1), SU(n,1))$ など変形可能な例があることが小林先生により示されました．また，変形の研究と関連して小林先生と Fanny Kassel 氏は作用の固有性を定量化した sharpness の概念を導入し，アノソフ表現や高階タイヒミュラー空間の研究とのつながりが生まれました．さらに，以上の幾何の理論をもとにした $\Gamma\backslash G/H$ 上の大域解析の研究がはじまり，局所変形によって変化しない $\Gamma\backslash G/H$ 上のラプラシアンの固有値が存在するというリーマン幾何の設定では起こらなかった新しい現象が発見されました．

「無限次元表現の分岐則」も，今回の受賞題目である「無限次元の対称性の数学的研究」に直接表れている小林先生の研究を代表するテーマです．分岐則とは群の表現を部分群に制限したときの振る舞い，たとえばどのように既約分解するかを記述するものです．リー群の表現の分岐則において，有限次元表現の制限やコンパクト部分群への制限は古典的な

研究対象であり，たとえばリー群の既約表現の分類や構造の記述においても，コンパクトリー群の既約有限次元表現のカルタン部分群への制限（表現のウェイト）や実半単純リー群の既約無限次元表現の極大コンパクト部分群への制限（$(\mathfrak{g}, K)$ 加群，K タイプ）などが直接用いられてきました．また，有限次元表現のテンソル積分解も分岐則の重要な例で，分解を記述するアルゴリズムが知られています．一方で，無限次元表現の非コンパクト群への制限は極めて複雑な振る舞いをし，一般に連続スペクトルが現れるため，より解析的な問題になります．小林先生は，「無限次元表現の制限はいつ離散的に分解するか（連続スペクトルをもたないか)」という問いに対して，一般的な判定条件を与え，無限次元表現の分岐則の理論を創始しました．特に 1990 年代の三部作の論文では，それぞれ幾何的，解析的，代数的方法により，分解が離散的になる原理が明らかになりました．表現の離散分解性は精密な分岐則の解析が期待できる枠組みであり，不変微分作用素による解析，余随伴軌道の幾何，D 加群などを用いて多方面から研究されています．非コンパクト群の作用でありながら，コンパクト群のように振る舞うという意味では，表現の離散分解性と作用の固有性には共通の思想が感じられます．最近，適切な設定のもとで，作用の固有性から離散分解性を実際に導く結果も示されています．

離散分解性以外にも表現の分解のよい設定として，小林先生は「表現の既約分解がいつ無重複（重複度 1 以下）となるか」という問題を考え，無重複性を生み出す幾何学的舞台となる可視的作用の概念を導入しました．従来，表現の無重複性に対しては代数的，組み合わせ論的なアプローチで有限次元表現への分解を考えるものが中心でしたが，可視的作用はリー群の複素多様体への作用に関する幾何的性質として，表現が有限次元か無限次元か，また分解が離散的か連続的かを問わず，無重複性を統一的に捉えています．

また，表現が関数空間として実現されているときに分岐則に対応して定まる大きな群の表現空間から小さな群の表現空間への写像（対称性破れ作用素）の研究も，小林先生が中心となって近年急速に発展しています．特に，Verma 加群の特異ベクトルを微分方程式によって求める F-method は，対称性破れ作用素を構成する強力な方法であり，新しい作用素を系統的に発見するとともに，Rankin-Cohen ブラケットや共形幾何に現れる微分作用素の公式に極めて見通しのよい表現論的解釈をもたらしました．

実単純リー群の無限次元既約表現のうち最も “小さな” 表現である極小表現も表現論における重要な研究対象です．調和振動子やテータ対応などに現れるメタプレクティック群のヴェイユ表現が最もよく知られた極小表現の例です．小林先生は極小表現のもつ高い対称性に着目して「極小表現をモチーフとした大域解析」をテーマとした研究を興しました．この研究は，共形幾何学を用いた極小表現の構成，シュレディンガー模型，フーリエ変換の一般化と変形など，異なる分野を結びつける理論としても広がっています．

上で述べた「離散群の作用の固有性」,「表現の制限の離散分解性」,「表現の無重複性」の

判定は，深く調べる価値の高い対象や精緻な研究が可能である対象を抽出する役割をもっています．他にも「表現の誘導や制限の有限重複性」（大島利雄氏と共同）や「誘導表現の緩増加性」（Yves Benoist 氏と共同）などもそのような性質をもつ結果であり，小林先生は既存の問題を解決するだけでなく，豊かな定理や理論が自然に生まれてくる土壌を作る仕事をされてきたのだと思います．

以上で僭越ながら小林先生の研究についてご紹介させていただきましたが，興味を持たれた方は先に述べた記念論文集の冒頭，また何より小林先生ご本人による解説，たとえば雑誌『数学』の論説「表現の分岐則の理論における最近の進展」（第 71 巻第 4 号：2019 年秋季号）をぜひご覧ください．

最後になりますが，このたびのご受賞を改めてお祝いいたします．先生のご指導のもと，先生の数学に触れ，学ぶことができたことを大変ありがたく思っております．今後ますますのご健勝とご活躍をお祈り申し上げます．