書　評

やさしくまなぶ超平面配置

―組合せ論とトポロジーの交わるところ―

吉永 正彦 著，日本評論社，2025 年

立教大学理学部数学科
阿部　拓郎

本書は超平面配置研究の第一人者による，待望の入門書である．Orlik と寺尾宏明による研究者必携のテキストはあれど，初学者に勧めるのであれば本書である．その本書の主役である，超平面配置とはどういうものかを振り返ってみよう．

超平面配置とはベクトル空間中の超平面の有限集合であり，直線上の点，あるいは平面中の直線の有限集合といった，幾何学的対象の一般化である．その研究がいつからなされたかは，あまりに素朴な対象なので断定はできないが（吉永氏も書いている通り，研究というレベルではなくとも領域を分けるという行為の中で人類には身近なものだったであろう），1970 年代のザスラフスキーによる『植木算の一般化』や Stanley による超可解性の研究，Brieskorn による補空間のコホモロジーの記述，Deligne による単体的配置の $K(\pi, 1)$ 性の証明などがおそらく発端であろう．その後 1980 年前後に，斎藤恭司，Orlik，Solomon，寺尾宏明らによってその研究の基礎が築かれた，かなり新しい研究分野である．いまや超平面配置の研究は，代数，幾何，組合せ論を中心として大きく進展している．更に本書でも触れられている，複素超平面配置の補空間のベッチ数が対数的凸性をみたす，という結果に端を発する一連の研究で，2022 年に June Huh 氏がフィールズ賞を受賞しており，超平面配置に興味を持たれた方もおられるのではないだろうか．そのような方，あるいは若い学生さんで同様の興味を持つ方にお勧めできる本がようやく現れた，といえるのが本書である．

本書は多種多様な超平面配置の研究分野の中でも，トポロジーと組合せ論，及びそれらの交わりに主な焦点を当てている．著者である吉永氏は超平面配置研究を世界的に牽引する研究者であり，その守備範囲はトポロジーや組合せ論に収まらず，代数，代数幾何や近年のマトロイドのホッジ理論など，超平面配置が関連する研究の多くを網羅している．超平面配置は元来，その研究対象としてのシンプルさ故，様々な研究手法が交わる点に面白さがあり，初期の研究者は当然のように多くの分野に精通していた．しかし時代は流れ，良くも悪くも細分化が始まっており，今現在研究分野すべてをカバーすることは極めて困難である．それが，入門書や新しいテキストの誕生に対する障害となっているのだが（全分

野を網羅する本を書こうとするととんでもない長さになるのは確実である），本書は焦点を絞り，かつ具体的なケースを多数扱うことで，入門書として完成されているといえる．しかし内容は深く，吉永氏はその広い専門性を生かして本書でも組合せ論とトポロジーの交わりをわかりやすく丁寧に説明している．

本書は『数学セミナー』に一年にわたって毎月掲載されていた連載をもとにしており，それに三つの新章と二つの付録（テンソル積・外積代数について，及び特性多項式計算ドリルの二つ）が追加される形で構成されている．第 1 章での単体的配置を通じた超平面配置の紹介を経て，第 2 章から第 4 章で，超平面配置の最も重要な組合せ不変量である特性多項式が導入されている．即ち第 2 章で植木算の二次元版としてのザスラフスキーの定理が導入され，第 3 章で削除制限定理という超平面配置の最も基本的な結果をもとに，特性多項式が帰納的に定義される．後述するが本書はこの『特性多項式』とは何なのかを，超平面配置及び関連する数学を通じて解き明かそうという試みをテーマとしていると感じる．その一例として，第 4 章において，一般次元におけるザスラフスキーの定理，つまり実数体の配置の補空間の分割数が特性多項式から計算されるという，超平面配置研究の始祖といえる結果が紹介され，補空間の幾何と特性多項式が関連付けられる．同時に第 2 章の最後で，特性多項式はある意味で，補空間の『サイズ』を測っているという吉永氏の説明があるが，これは特性多項式を通じて様々な『量』を研究してきた吉永氏らしい，興味深い洞察である．

第 5 章と第 6 章でグラフの彩色多項式との関連が語られる．つまりグラフから自然に定まるグラフ配置の特性多項式は，グラフの彩色多項式と一致するのだ．特性多項式は本書の三割近くを費やして，多くの例を用いて丁寧に解説されている．また付録 B にはこの特性多項式の計算ドリルがあり，まさに学生が手を動かして学ぶに相応しい内容となっている．吉永氏は第 1 章に現れたグリュンバウムのカタログに現れる配置の特性多項式をすべて計算したことがあるそうで，ものぐさで最近めっきり計算に手が動かない評者は仰天させられた．また吉永氏は上述の通り，特性多項式を削除制限定理を使って帰納的に定義し，第 5 章で well-defined 性を保証するという導入を採用しているが，これはとにかく手が動く定義であるというメリットがあり，入門書にマッチしたやり方であると改めて感じ入った．

第 7 章ではトポロメモリーというカードゲームを話の枕として，位相幾何学・ホモトピー型の大まかな説明が行われ，それを受けて第 8 章から第 10 章で，（コ）ホモロジーやベッチ数，基本群や CW 複体といった位相幾何の道具を用意したうえで，超平面配置の補集合のトポロジーが説明される．これらは今現在でも超平面配置の研究の中心に位置しているが，その契機ともいえる定理が，上述した特性多項式という組合せ不変量と，補空間のポアンカレ多項式という位相不変量が，本質的に一致するというかなりびっくりな結果である．更に第 11 章でこの『組合せ論的情報』という言葉を交差半順序集合として定式化し，第 12 章でメビウス関数を定式化することで特性多項式の計算ロジックを明確にしたうえで，第

14 章で，複素超平面配置の補空間のコホモロジー環は，その交差半順序集合，つまり超平面配置がどのように交わっているかというマトロイド的情報のみから記述される，という Orlik-Solomon の大定理が示される．即ち上述した組合せ不変量と位相幾何的不変量の一致は，このコホモロジー環の組合せ依存性の一つの系だった，というからくりである。本定理が，超平面配置研究を一つの研究分野として確立させる一因となったと言っても過言ではない．つまり吉永氏が第 14 章で指摘しているように，超平面配置の場合はある不変量が超平面配置の交わり方から記述されることがあり，それはどのような不変量か，を研究することが一大潮流となっており，その源流まで我々は本書でたどることができる．

第 13 章と第 15 章も特性多項式に関連した話題だが，第 13 章は代数的視点から，第 15 章は対数的凸性の視点からそれらを語っている．前者は超平面配置の対数的ベクトル場と自由性という代数幾何・可換環論的な対象から特性多項式を眺めている．後者は Huh 氏のフィールズ賞受賞の理由となった超平面配置の特性多項式の係数の対数的凸性の証明を，概略ではあるがかなり丁寧に説明している．ここは代数幾何がある程度仮定されておりレベルが高いが，非常に読みごたえがある章といえる．この二つのトピックはどちらも独立した一大分野を形成しており（特に後者は今世界的に研究されている），それらの分野に興味がある方は特性多項式についての部分に加えてここを読み，そこから巻末文献に進むことで超平面配置やマトロイドの研究を開始することも可能であろう．

このように本書には，吉永氏の広い興味と知見が随所に挿入されており，平易な話題の中にも最先端の研究テーマがちりばめられているのも魅力の一つである．例えば第 15 章の対数的凸性やワンダフルコンパクト化，第 9 章の $K(\pi,1)$ 性，第 11 章の順序集合の記述能力（これは如何にも吉永氏の数学の趣きがある），第 12 章の有限体法と特性準多項式などはまさに超平面配置の今のトレンドに踏み込んでいる．

また，上述の通り本書には多くの具体例や図が用いられ，具体的に手が動く仕様となっている点で入門書として最適であるが，同時に数学的厳密性は全くおろそかにされていない点も大きな特徴だろう．与えられうる証明は極めて厳密に与えられている．吉永氏の数学の特徴は，具体と抽象を自在に行き来する点にあると感じているが，その特徴がよく発揮されている数学書とも見てとることができよう．

また吉永氏は，本書の陰の主役といえる特性多項式を，部屋の数え上げ，補空間のサイズやポアンカレ多項式，有限体上の点の数え上げ，自由配置における対数的ベクトル場の基底の次数など，数多くの視点から解説・説明し，それをグラフの彩色多項式や対数的凸性へと大きく展開している．AI が数学研究のあり方を変えつつある中 (おそらく数学史に刻まれるであろう 2026 年 9 月にこれを書いている)，一つの対象を多角的に解釈することで分野横断的な視点を与えつつ，結果として全体の理解を深め，対象の新しい知見を得ようとする数学の在り方には，人間のなす数学の積み重ねと深淵，凄みがあるように，評者は感じた．