

日本数学会市民講演会

酔っぱらいは家にたどり着けるのか？

濱名裕治（筑波大学数理物質系）

1. はじめに

ある人：ランダムウォークを研究してるんやて？

わたし：はい. してます.

ある人：ん？ ランダムウォークの研究？

ランダムウォークの実践の間違いとちゃうか？

わたし：・・・そうかもしれん.

多くの人がもっているイメージ

酔っ払い = ランダムウォークする人



「ランダム」というものに抱くイメージ

考えを挟まないこと = 無作為

2024年秋季総合分科会での市民講演会における杉田洋氏の説明

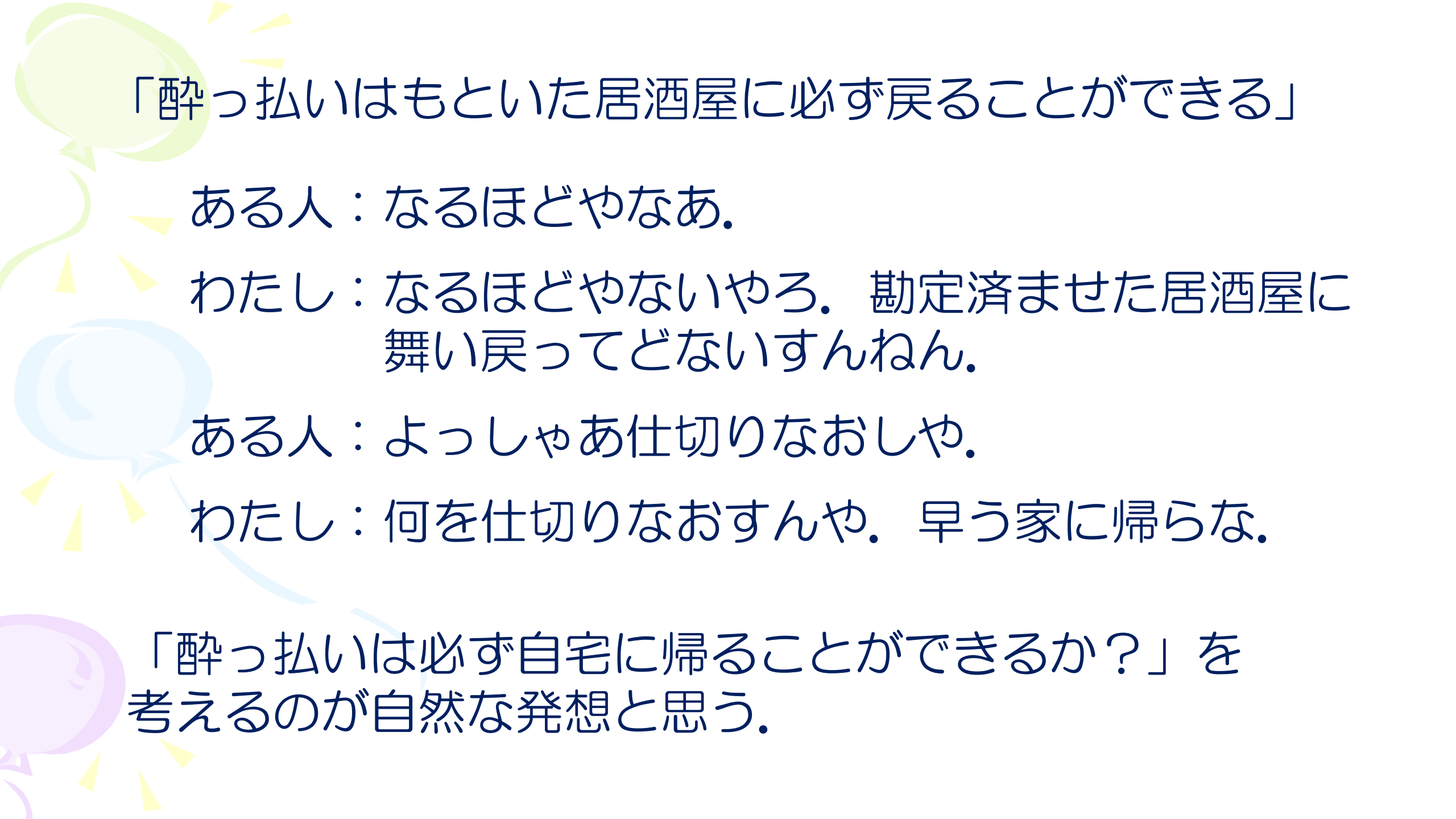


千鳥足でふらふらと歩く姿と「ランダムウォーク」
という単語の響きに絶妙な親和性がある。



巷でささやかれていること

酔っ払いはもといた居酒屋に必ず戻ることができる。
しかし、酒を飲ませた鳥を放つと戻ってこられない
こともある。



「酔っ払いはもといた居酒屋に必ず戻ることができる」

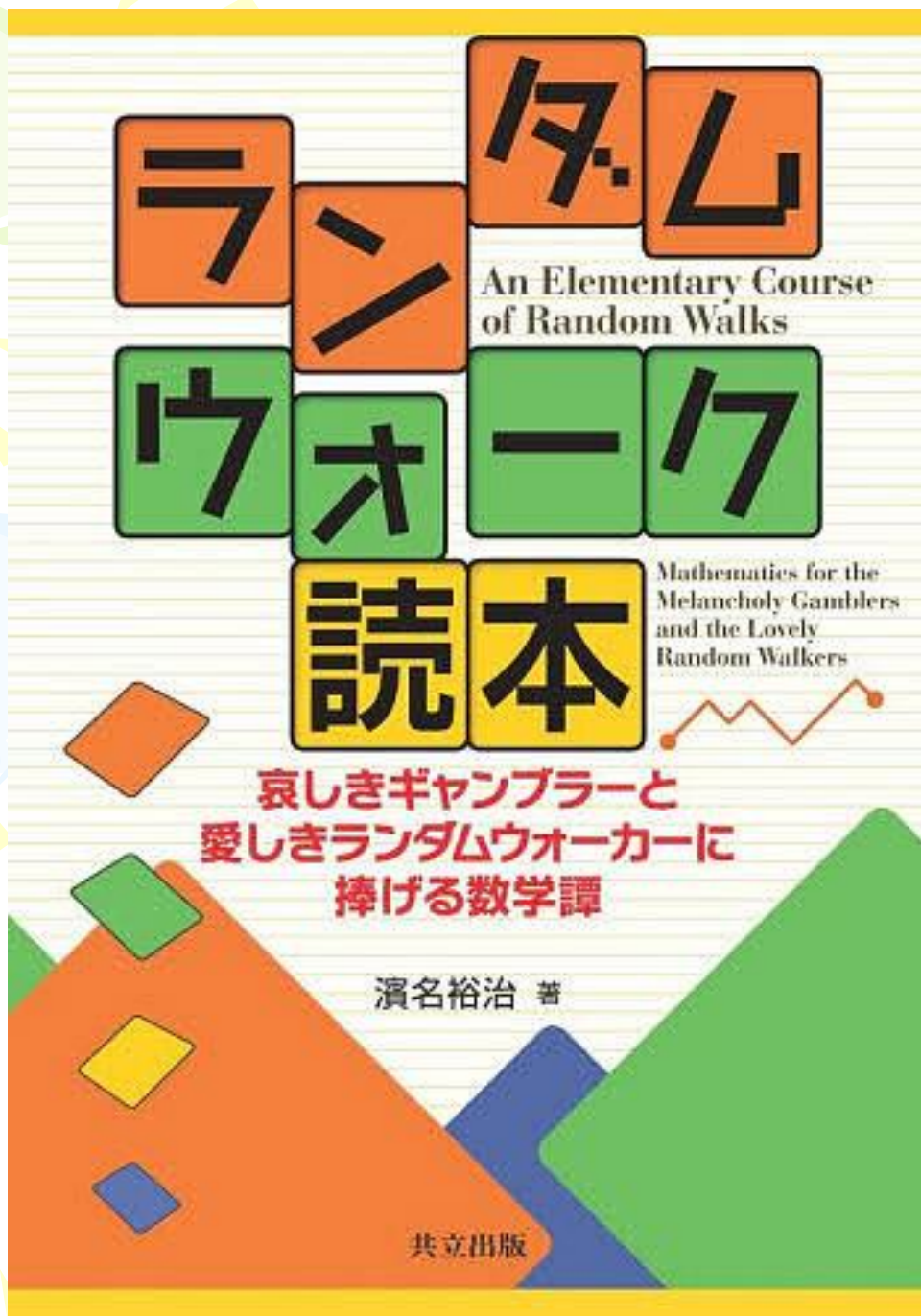
ある人：なるほどやなあ。

わたし：なるほどやないやろ。勘定済ませた居酒屋に
舞い戻ってどないすんねん。

ある人：よっしゃあ仕切りなおしや。

わたし：何を仕切りなおすんや。早う家に帰らな。

「酔っ払いは必ず自宅に帰ることができるか？」を
考えるのが自然な発想と思う。



2025年11月共立出版

この本の後半のさわりの部分を
解説しようと思います。

「さわりの部分」について

「話の最初の部分」とするのは誤用。
正しくは「話の要点」です。

2. もとの居酒屋に戻れるか？

d 次元ランダムウォーク

- $\mathbb{Z}^d$ 上の粒子のランダムな運動
- 原点を出発する
- 単位時間で隣接点に与えられた確率で移動する

時刻 n での粒子の位置を s_n とかく.

点列 $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ を d 次元ランダムウォークとよぶ.

1 次元ランダムウォーク

海沿いの一本道に居酒屋があることにして，勘定を済ませた泥酔客がふらふらとさまよい歩く．

2 次元ランダムウォーク

縦横に道が通っている街で酔っぱらった客がさまよい歩く．

題目は「家にたどり着けるか？」だけれども，まずは，もとの居酒屋に戻れるかどうかの考察から始めることにする．

F = ランダムウォークがいずれ原点に戻る確率

$F = 1$ のとき、ランダムウォークは再帰的であるという。

「酔っ払いはもといいた居酒屋に必ず戻ることができる」
というのは、2次元ランダムウォークが再帰的であることと解釈できる。

または非再帰的

$F < 1$ のとき、ランダムウォークは過渡的であるという。

「酒を飲ませた鳥を放つと戻ってこられないこともある」
というのは、3次元ランダムウォークが過渡的であることと解釈できる。

「 F = ランダムウォークがいずれ原点に戻る確率」であった。

初めて原点に到達する時刻で場合分けすることで、 F は次のように表示することができる。

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$$

【 m が奇数のときは $P(S_m = 0) = 0$ であることに注意】

一般に、 d 次元ランダムウォークに対して、直接 $F = 1$ を確認するのは容易ではない。

もう少し検証可能な条件を与える.

G を次で定める.

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$$

$$G = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{2n} = 0)$$

定理 $F = 1 \iff G = \infty$

もう少し詳しく $G(1 - F) = 1$ を示すことができる.

隣接点に等確率で移動するとき

Pólya の定理

$$P(S_{2n} = 0) \sim 2 \left(\frac{d}{4\pi n} \right)^{\frac{1}{2}d} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$G = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{2n} = 0)$ であった。定理より次がわかる。

$d = 1, 2$ のとき, $G = \infty$, $d \geq 3$ のとき, $G < \infty$ である。

定理

$d = 1, 2$ のとき, ランダムウォークは再帰的である.

$d \geq 3$ のとき, ランダムウォークは過渡的である.

Pólya がこの問題を考えるきっかけになったのは「チューリッヒ近郊の公園を散歩中に何度も同じ若いカップルに遭遇するのに気づいた」からだと言われている.

【R. Durrett著, 松本裕行訳「確率論」p. 308より】

「チューリッヒ大学の裏山に沿った通りとそれに十字に交わった道に囲まれた住宅街を漫然と散歩しながら思いついた」という話もある.

【池田信行著「偶然の輝き」p.67より】

隣接点に移動する確率が異なる場合

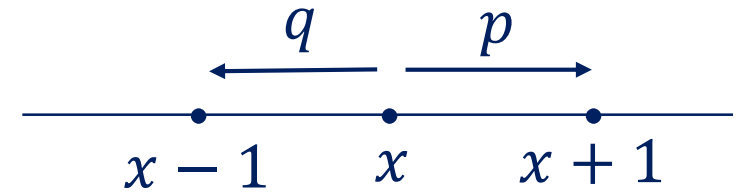
ちょとばかり

Pólya の定理のような都合のよいものを得るのは難しい。

$d = 1$ のとき

$x \rightarrow x + 1$ となる確率が p

$x \rightarrow x - 1$ となる確率が $q = 1 - p$



たまたまうまく計算出来て、次が得られる。

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

定理 1次元ランダムウォークが再帰的となるための必要十分条件は、 $p = \frac{1}{2}$ である。

1次元のときは，もう少し詳細な情報が得られ，次が成立することが知られている。

定理

(1) $p > q$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \text{ a.s.}$$

(2) $p < q$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty \text{ a.s.}$$

(3) $p = q$ のとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \text{ a.s.} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty \text{ a.s.}$$

$d \geq 3$ のとき

隣接点に移動する確率がどのようなものであっても
次が成り立つことが知られている。

$$P(S_n = x) \leq An^{-\frac{1}{2}d} \quad (x \in \mathbb{Z}^d)$$

特に, $x = 0$ として $P(S_{2n} = 0) \leq Bn^{-\frac{1}{2}d}$ が得られる。

定理 次元が3以上のランダムウォークは過渡的である。

問題は2次元ランダムウォークの再帰性の条件である。

隣接点に等確率で移動するときは再帰的であった。

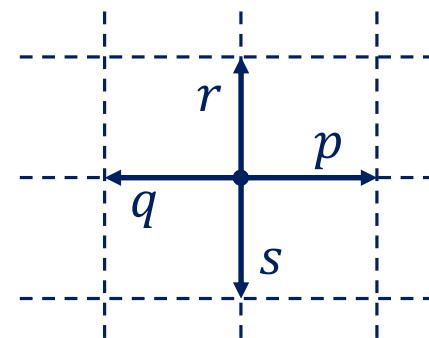
今は隣接点に等確率で移動するとは限らない場合を考えている。この場合でも再帰的となることはあるのだろうか？

$(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$ となる確率が p

$(x, y) \rightarrow (x - 1, y)$ となる確率が q

$(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$ となる確率が r

$(x, y) \rightarrow (x, y - 1)$ となる確率が $s = 1 - p - q - r$



定理 2次元ランダムウォークが再帰的となるための必要十分条件は、 $p = q, r = s$ である。

3. 家にたどり着けるのだろうか？

これまで、居酒屋で勘定を済ませて店を出た酔っぱらいがもとの居酒屋に戻ってくることを話題にしていた。

「よっしゃ飲みなおしや」というアウトドア派はともかくもとの居酒屋に戻ってきてどないすんねん。ちゃんとうちに帰らなあかんやろ。

というのが一般社会人の普通の考え方だと思う。

というわけで、ここからは、居酒屋で勘定を済ませて店を出た酔っぱらいが、無事に家にたどり着けるかどうかを話題にしたい。

$x \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$F(x)$ = ランダムウォークがいつかは x に到達する確率
と定める.

ランダムウォークが再帰的であることの定義: $F(0) = 1$

ランダムウォークが再帰的であるとき

すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $F(x) = 1$ となるだろうか?

ランダムウォークが過渡的であるとき

すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $F(x) < 1$ となるだろうか?

定理

ランダムウォークが再帰的であるとき, すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $F(x) = 1$ が成り立つ.

再帰的となるための必要十分条件

$d = 1$ のときは $p = q$

$d = 2$ のときは $p = q, r = s$

このときは必ず家に帰ることができる.

ただし, その日のうちに帰ることができるかどうかは $\dots$.

問題はランダムウォークが過渡的であるとき

$x \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = x)$$

と定める. $G(0) = G$ であった.

ここで $P(S_0 = x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ のとき} \\ 0 & x \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$ とする.

定理

$x \in \mathbb{Z}^d, x \neq 0$ とする. ランダムウォークが過渡的であるとき

$$F(x) = \frac{G(x)}{G}$$

が成り立つ.

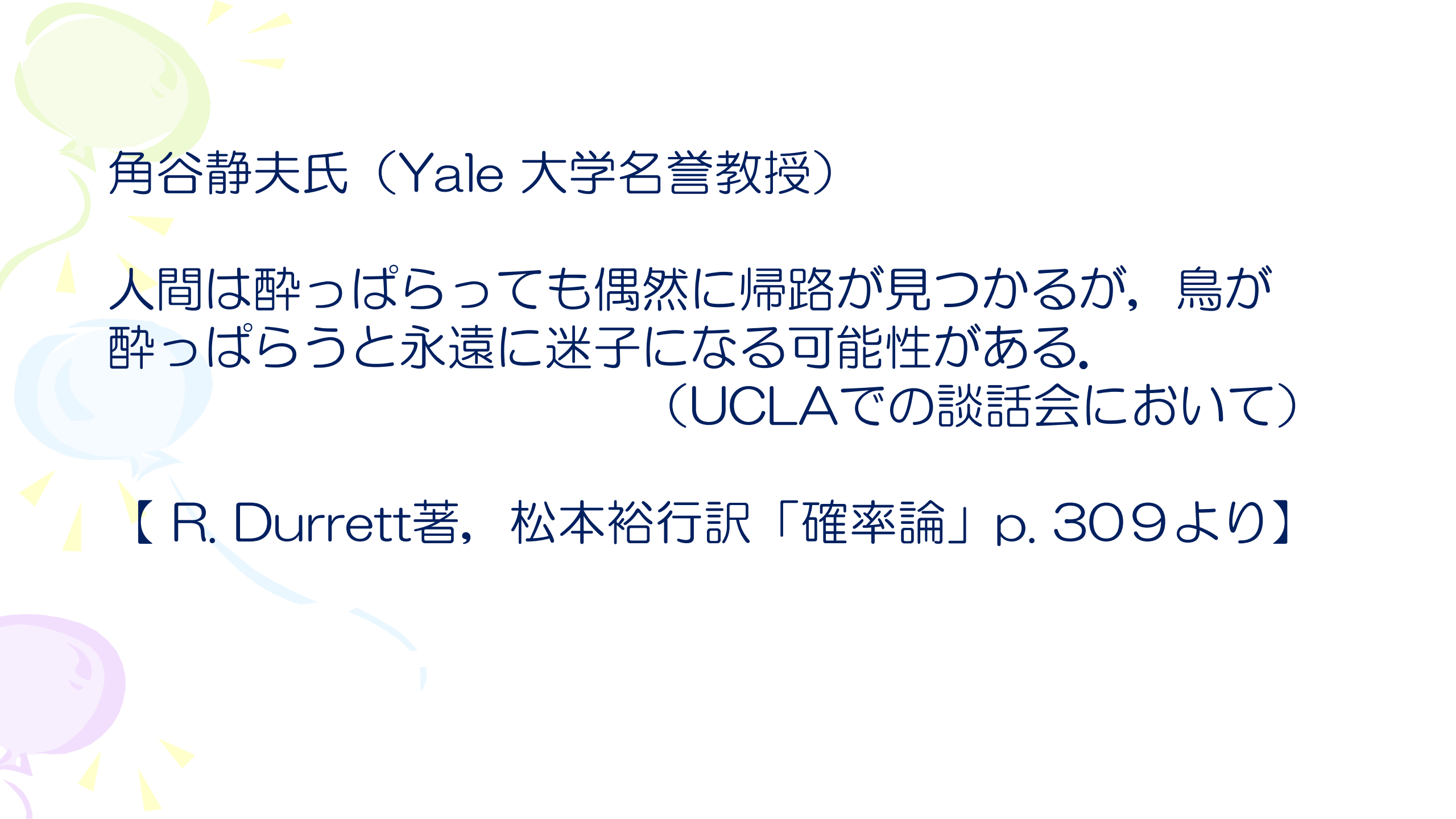
勘定を済ませて居酒屋を出た酔っぱらいが
もとの居酒屋に戻ってこられるとは限らない状況

($d = 1$ であれば, $p \neq q$ のとき)

($d = 2$ であれば, $p \neq q$ または $r \neq s$ のとき)

どうにかこうにか自宅にたどりつけるかどうか.

$G(x) = G$ である点 x に自宅があるかどうかにかかっている.



角谷静夫氏（Yale 大学名誉教授）

人間は酔っぱらっても偶然に帰路が見つかるが、鳥が酔っぱらうと永遠に迷子になる可能性がある。

（UCLAでの談話会において）

【 R. Durrett著，松本裕行訳「確率論」 p. 309より】

$d = 1$ のときをちょっとだけ掘り下げしてみる.

実は, $\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ のとき} \\ 0 & x \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$ とするとき,

$G(x)$ は次の差分方程式をみたすことがわかる.

$$G(x) - \delta_0(x) = pG(x-1) + qG(x+1)$$

この差分方程式は解くことができ、 $p > q$ のとき

$$G(x) = \begin{cases} G & x \geq 0 \text{ のとき} \\ \left(\frac{p}{q}\right)^x G & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる.

$x \neq 0$ のとき $F(x) = \frac{G(x)}{G}$ であったから次を得る.

定理

$d = 1$ とする. $p > q$ のとき, 次が成り立つ.

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ のとき} \\ \left(\frac{p}{q}\right)^x & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ランダムウォーク
読本

An Elementary Course
of Random Walks

Mathematics for the
Melancholy Gamblers
and the Lovely
Random Walkers

哀しきギャンブラーと
愛しきランダムウォーカーに
捧げる数学譚

濱名裕治 著

共立出版



ご清聴ありがとうございました。