Scattering theory

スタンフォード大学　Ralph S. Phillips 述
京　都　大　学　池　部　晃　生　記

この講演の予稿の題目は Purely decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle[1] となっており，講演内容も散乱理論一般というよりむしろ decaying modes を中心としたものであった．

波動方程式に関する内部問題と外部問題とではその差異があまりに大きいために，類似点が見過されがちであるが，波の decay という観点からは，それを強調すべきであろうというのが講演の主旨であった．そのために，まず内部問題に関して知られている顕著な結果について述べる．

内部問題[2]．滑らかな境界 $\partial\mathcal{O}$ を持った（内部）有界領域 $\mathcal{O}(\subset \boldsymbol{R}^3)$ における初期値境界値問題

（1）　$u_{tt}=\Delta u$　in $\mathcal{O}$

（2）　$u=0$　on $\partial\mathcal{O}$

（3）　$u(x,0)=f_1,\quad u_t(x,0)=f_2$

を考える．この問題の解は

（4）　$u(x,t)=\sum_n (a_n e^{i\lambda_n t}+b_n e^{-i\lambda_n t})\varphi_n(x)$

と表わされるが，ここに λ_n, φ_n は境界条件 (2) の下での固有値問題

$$\Delta u+\lambda^2 u=0 \quad \text{in } \mathcal{O}$$

の固有値の正の平方根および固有函数で，a_n, b_n は初期条件 (3) によって決定される定数である．λ_n は領域 $\mathcal{O}$ の functional $\lambda_n(\mathcal{O})$ であって，monotonicity

$$\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2 \Rightarrow \lambda_n(\mathcal{O}_1)\geqq\lambda_n(\mathcal{O}_2)$$

が成り立ち，また漸近分布

$$\lambda_n(\mathcal{O})\sim 2\pi\left(\frac{n}{\Omega V}\right)^{1/3} \quad (n\to\infty)$$

(Ω=単位球の体積$=4\pi/3$，$V=\mathcal{O}$ の体積）が知られている．

外部問題．内部領域 $\mathcal{O}$ の外部 $\mathcal{G}$ で問題 (1)-(3) を考える ($\mathcal{O}\to\mathcal{G}$，ただし $\partial\mathcal{G}=\partial\mathcal{O}$)．このとき作用素 $-\Delta$ は一様な無限多重度の連続スペクトル $[0,\infty)$ を持っており，(1)-(3) の解を，(4) を拡張した $\left(\sum_n \text{の代りに} \int \text{を用いる}\right)$ 形に書くことができるが，これは解 $u(x,t)$ の x を固定したときの漸近挙動を調べるのにはあまり効果的ではない．ところが，obstacle が適当な幾何学的条件——例えば convexity のごとき——を満足しているならば，x を固定したとき，

（5）　$u(x,t)\sim\sum c_n e^{\lambda_n t}\varphi_n(x)$

なる漸近表示が得られる．ここに c_n は初期条件によって定まる定数，λ_n, φ_n は

（6）　$$\begin{cases}\Delta u-\lambda^2 u=0 & \text{in } \mathcal{G}\\ u=0 & \text{on } \partial\mathcal{G}\end{cases}$$

をみたす eigenpair であって，λ_n については

（7）　$0>\mathrm{Re}\,\lambda_1\geqq\mathrm{Re}\,\lambda_2\geqq\cdots\to-\infty$

が成り立つようにできる．

ここで簡単に，(5), (7) に対する理論的根拠について述べておく[3]．初期 data $f=\{f_1,f_2\}$ に対して

$$\text{Energy}=\|f\|_E^2=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{G}}[|\nabla f_1|^2+|f_2|^2]dx$$

を定義し，有限 energy の data 全体の作る Hilbert 空間を H とする．初期値 $f\in H$ に時刻 t における data $\{u(x,t), u_t(x,t)\}$ ($u(x,t)$ は外部問題 (1)-(3) の解）を対応させる作用素を $U(t)$: $U(t)f=\{u(\cdot,t),u_t(\cdot,t)\}$ とすれば，$\{U(t)\}$，$-\infty<t<\infty$，は 1-parameter group of unitary operators in H をなす．そこで $\rho>0$ を十分大きく取って，$\{x:|x|<\rho\}$ が $\mathcal{O}$ をその内部に含むようにし，$D_\pm$ を次のように定義する．

$D_+=\{f:(U(t)f)(x)=0 \text{ for } |x|<\rho+t,\ t>0\}$,

$D_-=\{f:(U(t)f)(x)=0 \text{ for } |x|<\rho-t,\ t<0\}$.

さて，$P_\pm$ を $D_\pm$ の直交補空間への正射影とし，

（8）　$Z(t)=P_+U(t)P_-$

とおけば，$\{Z(t)\}$ が $K=H\ominus(D_+\oplus D_-)$ における semi-group になることがわかる．$Z(t)$ が eventually（すなわちある $t>0$ に対して）compact 作用素となるならば，

（9）　$Z(t)\sim\sum E_n e^{\lambda_n t}$

なる漸近表示が可能となる．ここに λ_n は $\{Z(t)\}$ の infinitesimal generator B の固有値で，$\mathrm{Re}\,\lambda_n<0$ である．また E_n は λ_n に属する固有空

があれば，もっとよかったと思う．しかしこれは，隴を得て蜀を望むのたぐいであろう；上記1)～5)の講演だけからでもポテンシャル論が解析学や確率論の各分野にいろいろ関連をもつようすを，知ることができる．

来年フランスのニースで行なわれる Congress の部門別項目表を見ると，解析学に属する項目数は全体の項目数の三分の一を越え，それに応用解析学（といっても，現代では位相解析的手法が多分に入っている分野がかなり多い）をあわせると，全体の半分を優に越えている．この中で見ると，今回のわれわれの Conference の関係した分野はかなり広い範囲であり，その中でポテンシャル論に関連をもつ分野が少なくない．はなやかに多くの分野にまたがった理論としてもてはやされる理論は，もちろんそれに値する立派なものであるが，たまたま解析という名称の中に入っている項目だけでも，意外に（むしろ当然ながら）広い範囲にわたっている．ポテンシャル論的センスが活用される目的は，確率論のためであっても，偏微分方程式のためであっても——歴史的な意味でのポテンシャル論本来の問題のためであってもなくても——かまわないのであって，この方面の研究が今後一層盛んになることを予想し，かつ期待するものである．

編集部の依頼どおり，もっぱら‘印象’のみを記して本稿を終る．

印象記：確　率　論

丸 山 儀 四 郎（東京教育大学）

確率論に関係する講演者は，エルゴード理論を除けば，J. L. Doob（イリノイ大学），国田寛，伊藤清，藤曲-本尾の諸氏であった．これらの講演は，それぞれ違った方向のもので，確率論の中での主要な問題をとりあつかっている．確率論は，この会議のいわば脇役的な役割をもっていたし，外国人参会者も Jacobs を加えて二名であり，この会議の場を通じて，系統的に討論を組織するということにはならなかった．

Doob 教授の講演は‘確率論とポテンシャル論’と題するものであった．マルコフ過程が一つ与えられると，ポテンシャル核が定まり，ポテンシャルが対応すること，とくにブラウン運動に対しては普通のニュートンポテンシャルが対応すること——確率論からポテンシャル論への道——の平易な解説から話が始められた．この逆——ポテンシャル論から確率論への道——が，この話の主要な部分であり，その基本的な理論は Hunt によって構成されたわけである．そこでは，ポテンシャル核に推移確率作用素の半群が対応することを保証するため，最大値原理が重要な役目を果す．その後に別の方法が Meyer によって考えられた．それはポテンシャル論における Brelot の公理論的方法の流れをくむものである．これに対して Doob はより一般な枠組みのもとで，別の方法を考案した．出発の基礎となるのはコンパクト集合 K とその上の実数値関数のある族 S である．S によって K 上の確率分布が順序づけられる．そこで確率測度の全順序集合に対して一つの確率過程を対応させることができるというのが，この論の骨子になっている．そしてこの方法は，マルコフ過程を，これに対応する優調和関数に代入して得られる supermartingale の確率分布が順序づけられることに動機づけられているのである．

国田寛氏は‘多次元拡散過程の境界問題の L^2-解析’という題目で，確率論において最も近代的に深く解析学と関連する内容を講演した．もともと境界問題は Feller の有名な研究に端を発して，偏微分方程式の境界値問題と密接に関連し，マルコフ過程論の主要な研究テーマとなった．そして確率論は偏微分方程式論の成果に単に従属するのではなく，むしろ本質的に新しいものを生み出すことに成功した．特に近年この方法において，日本の確率論研究者は国際的にすぐれた数多くの成果をあげることができた．この論文は，バナッハ束上の submarkovian semigroup の生成作用素による特徴づけ，およびそのヒルベルト空間での特殊化を出発点として，拡散過程の境界問題を，豊富な解析の手段を背景として発展させ，重要な研究方向を示すものである．

伊藤清氏は‘標準的な可測彷徨関数’という題で，確率過程論の一般論における極めて基礎的な事柄を論じた．その内容は J. Math. Soc. Japan, **20** (1968) 所載の論文のそれと一体のものである．その基調をなす考えは，可測な確率過程の標本空間としては，それに固有の函数空間が自然な仕方で対応し，それが確率過程の好ましい version を与えるというのである．そのような函数空間の設定に，古典的な実関数論のいくつかの概念が有効に利用されるという点には興味深いものがある．

藤曲-本尾氏は‘カスケード半群の特徴づけ’について論じた．カスケード過程は宇宙線が物質を透過する際に生ずる粒子の消長などの物理的な現象の数学的なモデルであり，確率過程としては，分枝過程の一つの興味ある典型に属するもので，T. E. Harris などの研究がある．著者はこの論文において，数学的に巧妙な方法を導入した．状態空間として，単位区間上の測度の空間をとり，カスケードを記述する半群 cascade semigroup を特徴づける定義がなされる．かくしてカスケード過程は正の定数と分枝測度を特性量として一意的に定まることが示

される．カスケード過程の生成作用素もこれらの量によって具体的に書き表わされる．

L. Schwartz は最近，Minlos の理論を含み，一般位相空間上の Radon 測度の理論の展開を試みている（日本数学会から出ている lecture note；'数学'，17 巻 4 号；近く Tata 研究所から出る予定の本を参照）．4月2日の Schwartz の講演はその各論の一部に相当するものとみることができ，数列空間を足場にして，確率変数列に関する古典的な問題を近代的にとりあつかっている．

この国際会議の中心的な分野は偏微分方程式，関数解析であったが，これと密接に関連する分野として確率論が考えられ，この方面で国際的に有名な何人かの数学者を招待する努力が重ねられたが，その多くが実現できなかった．特に Kolmogorov の来日の可能性が伝えられ，確率論の研究者はもちろんのこと，その実現に参会者の期待がよせられていたことと思われるが，結局のところ実現されなかったことはまことに残念であった．しかし，戦前から日本の確率論研究者になじみの深い，Doob が初めて来日し，同じくエルゴード理論では日本に知己の多い西独の Jacobs 教授（エルランゲン大学），在外の角谷静夫，伊藤清氏を迎えることができた．

角谷氏は久しく日本の地をふまなかったし，Jacobs は以前から日本文化に特別に興味を示し，日本の古典を熱心に勉強している程であるので，両氏にとってこの会議は訪日のためによい機会になったことと思われる．Doob，Jacobs は短い滞在を利用して関西などの観光も楽しんでいた．Doob，Jacobs，角谷さん，鶴見御夫妻とすごした，残雪の中禅寺湖畔の一日はいつまでも記憶に残るところである．Doob は会期後，都立大学で講演した．その内容は Phragmen-Lindelöf-Heins の定理をブラウン運動を用いて，確率論的に証明することである．ブラウン運動を用いて，ニュートンポテンシャルや一変数関数論の結果が手際よく導かれることは幾多の例で知られている．この Doob の話はその意味で routine といえないこともないが，直観的で鮮かなものであった．

この国際会議のための準備の段階で持たれたシンポジウムで重要な成果が発表された．(1) 田中洋，'非線型生成作用素をもつマルコフ過程のあるクラスと chaos の伝播'，(2) 池田信行，'分枝過程について'，(3) 岡部靖憲，'マルコフ過程の境界問題における境界点の irregularity の解消' がそれである．これらは単にプログラムの都合で会議では講演されなかった．その後，8月下旬に，ハバロフスクで行なわれた日ソ確率論シンポジウムにおいて，上記の内容が発表され，討論の重要な対象になった．

印象記：エルゴード理論，Flow の理論

鶴見　茂（東京都立大学）

4月1日から8日に至る International Conference on Functional Analysis and Related Topics におけるエルゴード理論，Flow の理論に関する講演について，印象ないし感想をのべたい．Conference は関数方程式を中心とする Functional Analysis に力点が置かれたものであり，私がのべようとしているエルゴード理論や Flow の理論は Related Topics の方に属するので，講演数はごく少なかった．したがって，最近とみに生気を増し，研究も非常に活発になされているこの方面の全貌が浮きぼりされたわけではなかったが，行なわれた講演は，それぞれの分野における顕著な研究成果を総括した感銘の深いものばかりであった．

まず，4月3日に行なわれた

角谷静夫 (Yale 大)：Classification of ergodic transformations

は，Lebesgue 測度空間における ergodic transformations からなる可算部分群 G を考え，（I）$\varphi(\in G)$ にかんして不変で与えられた測度 m と同値な有限測度 μ が存在する場合，（II）$\varphi(\in G)$ に関して不変で m と同値な σ 有限，無限測度 μ が存在する場合，（III）先の（I），（II）のような μ が存在しない場合　に分けて，分類問題を論じたものであり，氏を中心とする多くの研究者の成果の報告であった．しかし，単なるすぐれた報告というにとどまらず，研究成果の全貌を明らかにしながら，今後の研究方向を示唆するものを与えたのは，さすが大家の氏ならではの感を深くした次第である．

次に4日に行なわれた講演

丹羽敏雄 (京大)：On the classical flows with discrete spectra

は，所用のため残念ながら聴くことができなかった．その立派な内容は print を通して知り得たが，講演そのものにふれられないのは申し訳ない．

さて，最終日の8日に行なわれた関係する講演は

久保　泉 (名大)：Representation of quasi-flows with multi-dimensional parameter,

吉沢尚明 (京大)：Rotation group of Hilbert space and some of its relations to Brownian motion,

Konrad Jacobs (Erlangen 大)：Combinatorial constructions in ergodic theory

の三つである．