ぐる位相的方法と伝統的方法のレフェリーとしての存在を期待できたと思うからである.

講演は来日した著名な人々の話を中心として，それに関連する日本人の話がつづいた．また日本人講演者について言えば，国際的によく知られた人をむしろ後にまわし，若い人をできるだけ前にもって来て外国からの参加者に早い時期にそれらの人々を紹介するようになっていた．その意味で 12 日 (A) 会場の特異点理論の講演と 13 日 (B) 会場の複素多様体論の講演はこの国際会議の性格をはっきりと打ち出したものであった．このことは外国からの参加者にもよく理解されたと思う．Atiyah は最終日の晩餐会の席上で上記の若い講演者の成果を特に高く評価していたし，Oxford へ帰ったあとこの国際会議の報告として Sullivan，Mather の話と共に松本，岡，坂本，加藤の話を紹介したという．また Spencer は複素多様体論の若い人達とくに井上の講演を非常に印象的であったと述べていた.

さすが来日した大家の講演には風格があって興味深いものが多かった．とくに Bott の話は内容および話術ともに格調高いものであった．しかし一般的に言って，最近インホーメーションがよくなったせいか筆者の聞いた範囲ではショッキングな結果といったものはむしろとぼしかったと思う．日本人講演者の話は内容的にはこれら外国の大家のものに一歩もひけをとらなかったし，ある部門ではは るかに勝っていた.

ともあれ，この国際会議で直接講演を聞くことによって，論文を読むのとは違ってそれぞれの思考法や問題点の捕え方をじかに理解できたのは非常に有益であった．この点は講演におけるよりもレセプションやティータイムでの discussion あるいは問題作製の過程により明確にされたが，多くの場合語学的な面から一方的にしゃべりまくられることになったのは残念であった．来日した人々がそれぞれ独自の思考法をもっていることは面白かったし，とくに Sullivan のオリジナリティーに富んだそれは強い影響を若い人々に与えた.

外国からの招待講演者は 1 年半以上前に決定され，招待状が出されたのは昭和 47 年正月であった．したがって当然安定した著名な人々の招待が優先されることになり，国際会議が開かれる時点でよい講演ができる人という視点をとりえなかった．しかし Bombieri, Sullivan, Mather，A'Campo など若い人々の時宜をえた参加はこれを十分に補うものであったと思う．これらの人々と日本の若い人達との交流はこの国際会議に生々とした生命をふき込んだといえよう.

日本人講演者は逆に国際会議の講演だけについて京大数解研における二回の研究集会で選考され，たまたまよい話題をその時持ち合せなかった人はこれまでの業績とは無関係に選にもれることになった．今回のような形で開催された国際会議ではこれも仕方のないことであったかも知れないが，このような選び方は異例のことと思う．今後はもっと適切な方法を考えるべきであろう．しかし一方ではこれが日本側の講演のレベルを高め密度を増したことも事実であった.

多様体に関する国際会議を開催しようという話がはじめて出た時に筆者がもっとも心配したのは，外国から一流数学者が実際に多数参加するだろうかということと，もう一つは来日数学者の講演を有難く拝聴するに止まらず日本人数学者がその国際会議で自己主張を十分にできるであろうかということであった．前者については当初予定していた招待講演者が数名を除いてすべて参加して，1970 年の Amsterdam，1971 年の Strasbourg の国際会議と比べて豪華な顔ぶれを幅広くそろえることができた．また後者についてはその当時具体的なあては全くなかったが，西田の講演をはじめこの国際会議の中心となった仕事がその後続々と現われて，各部門でのレベルが高く充実したわれわれの講演に外国からの参加者も圧力を感じたことと思う.

講演内容は Proceedings として東大出版会より 49 年春には出版される．これには会議での講演の外に問題集がつけられるが，これは加藤が責任者となって Adams, Browder，Wall，Sullivan 等の協力をえて，ぎっしりつまった講演のスケジュールの合間を利用して作製したもので，重要な現在未解決な問題を集めてこれからのこの方面の動向を浮きぼりにしており，この国際会議の成果の一つとして今後の研究活動の原動力となるであろう.

# 各地における講演記録

## A'Campo 教授講演記録

### 有限周期のモノドロミー

(1973 年 4 月 5 日　於立教大学)

A'Campo 教授は，4 月 5 日，春季学会の特別講演として，上記標題で講演された．以下はその概略である.

$P: \boldsymbol{C}^{n+1} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ を多項式函数，$H$ を $P^{-1}(0)$ とする．$\omega$ を $H$ 上の任意の一点として固定し，$\varepsilon$ を十分小さな正数

とすると次の Milnor fibering がよく知られている．$\psi=\arg(P): S_{\omega,\varepsilon}-H \longrightarrow S^1$，ここで，$S_{\omega,\varepsilon}$ は $\omega$ を中心，半径 $\varepsilon$ の $(2n+1)$-次元球面である．$F_\theta$ を $\psi^{-1}(\theta)$ で定義して，$\psi$ に対する connection を決めることによって，$S^1$ にそって1回転して得られる**幾何学的モノドロミー** $\varphi: F_\theta \longrightarrow F_\theta$ が isotopy のもとに決まる．また $\varphi_*: H_*(F_\theta) \longrightarrow H_*(F_\theta)$ は connection によらず一意的に決まり，これを(homology の意味での)**モノドロミー**と呼ぶ．このモノドロミーに関して次の2つの問題が基本的である．第1は Brieskorn による‘$\varphi_*$ は有限周期をもつだろう’という予想，第2は Milnor による‘上の fibering $\psi$ は compact group に reduce できるか？’という問題である．この講演ではこの問題について，ある意味での反例を示すことである．まず次のことが基本的な事実である．

**モノドロミー定理**．適当な正の整数 $e$ が存在して，

$$(\varphi_i{}^e-\mathrm{Id})^{i+1}=0 \quad (\varphi_i: H_i(F_\theta) \longrightarrow H_i(F_\theta)).$$

Malgrange の次の例は上の表現は一般にはベストであることを示している．

**例**(Malgrange)．$P=(z_1z_2\cdots z_n)^2+z_1^{2n+2}+\cdots+z_n^{2n+2}$ とすると $(\varphi_{n-1}^e-\mathrm{Id})^{n-1}\neq 0\ (\forall e>0)$ が成立する．これは Gauß-Manin connection と Fuchs 型方程式を使って証明される．さてモノドロミーが有限周期をもたない最初の例は次である．

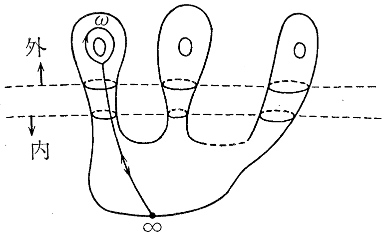
**例**(A'Campo)．$P(x,y)=(x^2+y^3)(x^3+y^2)$ とすると，$\varphi_*$ は有限周期をもたない．この証明は link の Alexander 多項式を計算して，それが円分多項式の積にならないことを示して得られる．一方上の反例は $P$ が原点で既約でないが，既約だと次の結果がある．

**定理**(Lê Dũng Tráng)，$P: \boldsymbol{C}^2 \longrightarrow \boldsymbol{C}$ が解析的に原点で既約ならば，(原点での)モノドロミーは有限周期をもつ．

これに対し，$\varphi_*$ が周期的であっても，幾何学的モノドロミー $\varphi$ は必ずしも周期的でないことを次の例で示す．

**例**(A'Campo)．$H=\{y=x^{3/2}+x^{7/4}\}$ で定義される既約な曲線を考える．そのとき，$\varphi$ は isotopy のもとで周期をもたない．

この証明のために，Milnor fibering の fiber $F_\theta$ の1点-コンパクト化 $F_\theta{}^+=F_\theta\cup\{\infty\}$ を考えて，基本群に自然に定義される写像 $\varphi_\sharp: \pi_1(F_\theta{}^+,\infty) \longrightarrow \pi_1(F_\theta{}^+,\infty)$ が周期を持たないことを言う．まず $L=\{y=x^{3/2}\}\cap S_\varepsilon{}^3$，$L_0=H\cap S_\varepsilon^3$ の2つの knot を考える．$\varepsilon$ を十分小さくとれば，$L_0$ は $L$ の tubular neighborhood $N$ の境界を心棒方向に2回転，fibre 方向に13回転していると考えられる．そこで，$L_0$ に対応する Milnor fibering を $N$ の外と内に分けて，外側の fibering は本質的に $L$ に対応する Milnor fibering に等しく，したがって多項式 $y^2=x^3$ で定義されていると考えてよく，その部分の幾何的モノドロミーは周期的である．一方内側の fibering は (2, 13)-knot の fibering と考えられこれも周期的である．さて，外側と内側のつなぎ目の部分，$S^1\times I$(あるいはその Copy)で，$\varphi$ を $S^1\times\{0\}$ に制限すると $\alpha$ 度回転し，$S^1\times\{1\}$ では $\beta$ 度回転，そのあいだは isotopy でつながっていると考えられる．したがって homology level でモノドロミーが周期的であることは明白だが，基本群の level で周期的でないことは，次図のような loop $\omega$ をとり $\varphi_\sharp^p\omega\neq\omega\ (\forall p>0)$ をみてやればよい．最後に A'Campo 教授はモノドロミーの周期性と特異点の分岐に関して，興味深い予想ものべられた．




（岡　睦雄記）

## J. F. Adams 教授講演記録

### Geometric dimension of bundles over $\boldsymbol{RP}^n$

(1973年4月18日　於京都大学)

有限複体 $X$ 上の，実，複素あるいは四元数体上の，ベクトル束全体のなす半群の Grothendieck 群を，$K_{\boldsymbol{R}}(X)$，$K_{\boldsymbol{C}}(X)$ あるいは $K_H(X)$ と書く．$\Lambda$ を $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ あるいは $H$ とすると，$K_\Lambda(X)$ の元は，ベクトル束の形式的な差 $[\xi]-[\eta]$ と書ける．さらに $\eta$ は自明と思ってよい．

**定義**．$\tilde{K}_\Lambda(X)\ni\lambda$ の**幾何学的次元** g. dim を，$\lambda=[\mu]-[n]$ を満足する最小の $n$ とする．

さて，$X$ を $n$ 次元実射影空間 $\boldsymbol{RP}^n$ とする．$\tilde{K}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}_{2^f}, f=[n/2]$, $\tilde{K}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}_{2^r}$, $\tilde{K}_H(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}_{2^s}$ であることが知られている．$\xi$ を $\boldsymbol{RP}^n$ 上の canonical な実線束とすると，$\tilde{K}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)\ni j(\xi-1)$ に対し，g. dim $j(\xi-1)\leq j$，また $\tilde{K}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)\ni\forall x$ に対し，g. dim $x\leq n$．実際 $\tilde{K}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)\cong[\boldsymbol{RP}^n, BO]$ で，$\boldsymbol{RP}^n$ は次元が $n$ より明らかである．

**命題**．$K_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)$ の元で，$O(1)$-束で代表されるのは，1 と $\xi$ だけである．

これは，$O(1)$-束は $BO(1)=K(\boldsymbol{Z}_2, 1)$ で分類されることより明らかである．以下，同様の命題を述べる．

**命題**．$K_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)$ の元で，$O(2)$-束で代表されるのは，2, $1\oplus\xi$，$2\xi$ だけである．

**命題**．$n\geqq 13$ とする．$K_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)$ の元で $O(3)$-束で代表されるのは，3，$2\oplus\xi$，$1\oplus 2\xi$，$3\xi$ だけである．

さて，$O(n)$-束は，$W_1=W_2=0$ なら，Spin(3)-束で表わせる．したがって

**命題**．$n\geq B$ とする．$K_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)$ の元で，Spin(3)-束で代表されるのは，3だけである．

**命題**．$K_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{RP}^n)$ の元で，Spin(4)-束で代表されるの

は，4, 4ξ だけである．

**命題**，$K_H(\boldsymbol{RP}^n)$ の元で $S_P(1)$-束で代表されるのは，

(i)　$n\equiv 2, 3, 4 \pmod 8$ の時，1 と canonical な $S_P(1)$-束．

(ii)　$n\equiv 1, 5 \pmod 8$ の時，4 elements.

(iii)　$n\equiv 6, 7, 8 \pmod 8$ の時，8 elements.

以上の他に，Spin(5)-束についても命題を述べられたが，よくわかりませんでした．

(西田吾郎記)

## Andrianov 教授講演記録

**Euler products in the theory of Siegel modular forms.**

(1973年4月21日　於京都大学)

$H_n=\{Z=X+iY\in M_n(\boldsymbol{C});\ {}^tZ=Z,\ Y>0\}$ を $n$ 次の Siegel 上半空間とする．$H_n$ 上の正則函数 $f$ で，すべての $\sigma=\begin{pmatrix}AB\\CD\end{pmatrix}\in Sp(n,\boldsymbol{Z})=\Gamma_n$ に対し

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^k f(Z)$$

を満たすもの($n=1$ のときにはさらに無限遠点での条件が加わる)を，$n$ 次の重さ $k$ の Siegel モジュラー形式とよび，その全体のなす空間を $\mathfrak{M}_k^n$ とかく．これは $\boldsymbol{C}$ 上の有限次元ベクトル空間をなす．$\mathfrak{M}_k^n$ の元 $f$ は次のような Fourier 展開を持つ．

$$f(Z) = \sum_N a(N)\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}\,(NZ)).$$

ここで $N$ は $\mathfrak{N}_n=\{N=(n_{ij})\in M_n(\boldsymbol{Q});\ {}^tN=N,\ N\geqslant 0,\ n_{ij},\ 2n_{ij}\in\boldsymbol{Z}\}$ なる行列全体を動く．このとき $a(N)$ はすべての $U\in SL_n(\boldsymbol{Z})$ に対し $a({}^tUNU)=a(N)$ を満たす．$\mathfrak{M}_k^n$ における Hecke 作用素 $T_k(m)$ が次のように定義される．$S_m=\{M\in M_{2n}(\boldsymbol{Z});\ {}^tMJ_nM=mJ_n\}$ $(m=1,2,\cdots)$ とする．ここで $J_n=\begin{pmatrix}0 & 1_n\\ -1_n & 0\end{pmatrix}$．$f\in\mathfrak{M}_k^n$ に対し

$$T_k(m)f = m^{nk-\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{\sigma\in\Gamma_n\backslash S_m} f|_k\sigma$$

と定義する．ここで $\sigma=\begin{pmatrix}AB\\CD\end{pmatrix}$ とすると

$$f|_k\sigma = \det(CZ+D)^{-k}f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}).$$

すべての $T_k(m)$ の同時固有函数からなる $\mathfrak{M}_k^n$ の基底が存在することが Maaß [1], Jarkovskaia [2] の結果からわかる．$f$ をすべての $T_k(m)$ の同時固有函数とし，$\lambda_f(m)$ を $T_k(m)$ の固有値とするとき，

$$\mathfrak{D}_f(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(m)}{m^S}$$

とおくと，$f$ に対し Dirichlet 級数 $\mathfrak{D}_f(s)$ が定義できる．一変数の保型函数論($n=1$ の場合)では次のことが重要な事実であった．1°. $\mathfrak{D}_f(s)$ が Euler 積を持つ．2°. $\mathfrak{D}_f(s)$ が函数等式を満たす．3°. $f$ の Fourier 展開の係数 $a(N)$ と固有値 $\lambda_f(m)$ の間に簡単な関係がある．この講義では $n\geq 2$ の場合についてこれらのことに関するいくつかの結果が述べられた．

1° については，$\mathfrak{D}_f(s)$ は $\mathfrak{D}_f(s)=\prod_p\mathfrak{D}_{f,p}(s)$，$\mathfrak{D}_{f,p}(s)=\sum_{\delta=0}^{\infty}\lambda_f(p^\delta)p^{-\delta s}$ とかけるが，ここで $t=p^{-s}$ とおくと次の定理が成立する．

**定理**([3]).

$$\mathfrak{D}_{f,p}(s) = P_{f,p}(t)/Q_{f,p}(t).$$

ここで $P_{f,p}(t)$，$Q_{f,p}(t)$ はそれぞれ次数が $2^n-2$, $2^n$ の整係数の多項式である．

これは志村氏の予想 [4] と一致している．

2° については，$Z_f(s)=\prod_p Q_{f,p}(p^{-s})^{-1}$ とおくと $n=2$ のときに次の定理が成立する．

**定理**([5], [6])．$Z_f(s)$ は有理形函数として全平面に解析接続でき，有限個の極をもち，

$$\psi_f(s) = (2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+2)Z_f(s)$$

とおくと

$$\psi_f(2k-2-s) = (-1)^k\psi_f(s)$$

なる函数等式を満たす．

3° については $n=2$ のときに $a(N)$ と $\lambda_f(m)$ の間にある関係が成り立つが [5], [6]，$n=1$ のときのような簡単な関係ではない．大雑把な言い方をすれば，$D$ を負の整数とするとき，$N_1,\cdots,N_k$ を行列式の値が $D$ となる $\mathfrak{N}_2$ の元の $N\sim N'\Longleftrightarrow\exists U\in SL_2(\boldsymbol{Z})$，${}^tUNU=N'$ なる同値関係の代表系とすれば，$a(mN_i)$ $(m=1,2,\cdots)$ から作られる Dirichlet 級数と $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ のある $L$ 函数の積と，$Z_f(s)$ とがほぼ等しくなる [5], [6].

最後にいくつかの問題および予想が述べられた．それを略述すると 1° $\Gamma$-factor が $\Gamma(s)\Gamma(s-k+2)$ となる函数等式を満たす Dirichlet 級数で $f\in\mathfrak{M}_k^2$ から Hecke 作用素により得られるものを特徴づけること．2° $f$ は Hecke 作用素の固有値で決まるか？ 3° $n\geq 3$ のときには $\gamma_{n,k}(s)$ を $\gamma_{1,k}(s)=\Gamma(s)$，$\gamma_{n,k}(s)=\gamma_{n-1,k}(s)\gamma_{n-1,k}(s-k+n)$ と帰納的に定義するとき，

$\psi_f(s)=(2\pi)^{-2ns}\gamma_{n,k}(s)Z_f(s)$ とおくと $Z_f(s)$ は

$$\psi_f\left(nk-\frac{n(n+1)}{2}+1-s\right) = (-1)^{k2^{n-2}}\psi_f(s)$$

なる函数等式を満たす．4° $Q_{f,p}$ の根 $\alpha_i$ $(1\leq i\leq 2^n)$ の絶対値について Ramanujan-Petersson 予想の類似として $|\alpha_i|=p^{\frac{1}{2}\left(nk-\frac{n(n+1)}{2}\right)}$ ということが予想される．

### 文　　献

[1] H. Maaß, Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen, Math. Ann., **124** (1951).

[2] Н. А. Жарковская, Оператор Зигепя и операторы Гекке, Функциональный анализ и его приложения, 7 (1973).

[3] А. Н. Андрианов, Сферические Функции дпя *GLn* над локапьными полямии суммиров-оние рядов Гекке, Математический сборник, **83, 3** (1970).

[4] G. Shimura, On modular correspondences for

$Sp(n, \boldsymbol{Z})$ and their congruence relations, Proc. Nat. Acad. U. S. A., **49** (1963).
[5] А. Н. Андрианов, Ряды Дирихле с зйлеровским Прroизведением в теори зигелевых модулярных Форм рода 2, Труды Матем. института АН СССР, **112** (1971).
[6] А. Н. Андрианов, Зигелевы Формы и дзета-функции, Труды Матем. института АН СССР, **132** (1973).

(斎藤　裕記)

## M. F. Atiyah 教授講演記録

### 固有値と Riemann 幾何学

(1973年4月23日　於九州大学)

この講演は一般講演という性質上，問題の初等的な把握から解き起し，その問題の一般化されていく過程，そして最近の成果までを一息に示し，広い分野の人達に興味深いものであったと思う．また講演中に随所で参考文献をあげられ，初心者にも親切であった．

両端の固定された弦や，境界の固定された膜の振動はいわゆる基本振動の一次結合になる，すなわちその微分方程式の一般解は Laplace 作用素の固有関数で表わされる．膜とその境界が複雑なとき，固有値からその形が判別できるかという M. Kac の定式化，Laplace 作用素の固有値の分布からは区別できないという Milnor の 16 次元の二つのトーラスの例などを紹介しながら，講演は楕円型作用素に関して最近著じるしい発展をみた興味深い結果におよんでゆく．

Compact 多様体の上の Laplace 作用素の固有値 $\lambda$ について漸近展開

$$\sum_{\lambda} e^{-\lambda t} \sim \sum_{k=-n}^{\infty} a_k t^{k/2} \qquad t \to \infty$$

が得られる．右辺の主係数 $a_{-n}$ は与えられた数 $N$ より小さい固有値の数 $\varphi(N)$ の評価を与えている．すなわち

$$\varphi(N) = c_n a_{-n} N^{n/2} + o(N^{n/2}).$$

これは H. Weyl の古典的な問題に答えるものである．

各係数 $a_k$ は積分

$$a_k = \int_X \alpha_k(x)$$

で与えられる．$\alpha_k(x)$ は Riemann 計量から計算できる局所的不変量である．これはMinakshisundaram-Pleijel (Canad. J. Math, 1949) による結果で，Seeley (Proc. Sympos. pure Math, AMS, 1967) によって一般の $m$ 階の楕円型作用素の場合に拡張された．

McKean-Singer (J. of Diff. Geo., 1967) は $\alpha_k(x)$ の explicit な式を求め，それが古典的な不変量とどう関係しているかをみようとした．

関数上の Laplace 作用素を拡張して，$q$ 次微分形式の上の Hodge 作用素を考え，その固有値を $\lambda(q)$ とする．

Euler の標数は $q$ 次 Betti 数の交代和であるが，多様体 $X$ が三角形分割されている時は，$q$ 次の単体の数の交代和でよい．それと同様に de Rham の cohomology と $q$ 次微分形式についてやろうとすると $\Omega^q$ は無限次元なので少し見方を変えねばならない．

McKean-Singer は $t$ に無関係に

$$\chi(X) = \sum_q (-1)^q \sum_{\lambda(q)} e^{-\lambda(q)t}$$

が成立することを示した．ここで先ほどの漸近展開の式を代入して $t=0$ とすると

$$\chi(X) = \sum_q (-1)^q a_0(q) = \int_X \sum_q (-1)^q \alpha_0(q).$$

すなわち

$$\chi(X) = \int_X \theta \qquad \left(\theta = \sum_q (-1)^q \alpha_0(q)\right)$$

を得る．一方 Gauss-Bonnet の定理から

$$\chi(X) = \int_X K \qquad (K \text{ は Gauss 曲率}).$$

Mckean-Singer は $\theta = K$ を予想した．$\alpha_0(q)$ は複雑な項を持っているが，交代和をとる際それらが打ち消し合うかも知れない．

Patodi (J. of Diff. Geo., 1971) は $\alpha_0(q)$ を詳しく調べて打ち消し合うことを代数的に確かめて $\theta = K$ を示した．Gilkey (Advanced Math). はその後 $\theta$ と $K$ の性質を調べて両者が一致することを示し，別証明を与えた．

Patodi と Gilkey の idear は微分幾何の不変量から位相幾何の不変量を導く関係式，例えば Hirzebruch の指数定理

$$\mathrm{Sign}(X) = \int_X L(p)$$

や Riemann-Roch の定理などの証明に利用できることがわかった．Atiyah-Bott-Patodi (Invention Math. 1973).

最後に多様体の位相と固有値の関係に触れる．位相幾何学の方で知られているように Reidemeister torsion などのような微妙な不変量は，homology や cohomology のレベルではなく，多様体を三角形分割して chain のレベルで調べなければならない場合がある．微分幾何学の立場で言うとこれは de Rham の cohomology ではなく，$q$ 次微分形式のところで調べなければならない，言いかえると Hodge 作用素の 0-固有値だけでなく 0 でない固有値を考察しなければならないことを意味している．Singer-Ray (to appear). また Atiyah-Patodi-Singer (Bull. London Math. Soc. 1973) も同様の方向を持っている．この方面での近い将来の発展が期待できる．

(菅原民生記)

### Invariant theory and Riemann geometry

(1973年4月19日　於東京大学)

Hirzebruch の指数定理は多様体論において最も重要な定理の一つである．普通はコボルディズム理論を用いて証明するが，ここでは Gilkey の仕事を用いて不変形式論的に証明することを考えてみよう．Gilkey の定理

は次のように述べることができる.

閉多様体 $M$ 上に Riemann 計量 $g$ が与えられているとする. $M$ 上の形式 $\omega$ が, 局所的に, 計量 $g_{ij}$, その高階の微分 $\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}g_{ij}$, および $(\det g_{ij})^{-1}$ の多項式で表わされている場合を考える. そのような形式 $\omega$ が重さ $l$ をもつとは, 0 でない実数 $R$ に対して, 計量を $g$ から $R^2g$ に変える時, $\omega$ が $R^l\omega$ に変わる時のことを言う.

**定理**(Gilkey). 重さ $>0$ の形式は 0 である. 重さ 0 の形式は Pontrjagin 形式の多項式で表わされる.

ここで Potrjagin 形式とは, de Rham コホモロジーで Pontrjagin 類を与える形式で, 曲率テンソル $R_{ijkl}$ を 2-形式の行列と考える時, $\det(1+tR)$ の $t^{2i}$ の係数の定数倍として表わされる.

証明は Gilkey の論文(Atiyah 教授の虎の門ホールでの講演記録の参考文献を参照)による(教授は古典的な不変形式論, Bianchi の恒等式等を用いて初等的に証明された).

さて, Hirzebruch の指数定理の証明に戻ろう. 次の三つの段階に分ける.

1. 計量およびその高階の微分で表わされる形式 $\omega$ があって,

$$\mathrm{Sign}(M) = \int_M \omega$$

となる.

2. $\omega$ は Pontrjagin 形式の多項式である.

3. 多項式の形を定める.

1 は Atiyah 教授の虎の門ホールでの講演の主要な結果である. Sign$(M)$ は計量によらないから, $\omega$ が重さ 0 を持つことは明らかである. したがって Gilkey の定理により 2 が得られる. 3 は普通のコボルディズムを用いる証明と全く同じで, 複素射影空間, およびそのいくつかの直積において, Pontrjagin 類を調べれば, 直ちに Hirzebruch の多項式が得られる.

(川崎徹郎記)

## 不変式論と Riemann 幾何学

(1973年4月20日 於京都大学)

$X$ を Riemann 多様体, $g=(g_{ik})$ をその Riemann 計量とする. $X$ 上の $p$ 次微分形式 $\omega$ が計量 $g$ に canonically associated とは $\omega$ が局所的に $g_{ik}$, $g_{ik}$ の任意階の導関数および $\det(g_{ik})^{-1}$ の, 座標変換で不変な多項式で書けることを言う. この時 $\omega=\omega(g)$ と書く. $\omega$ がさらに, $\forall k\in \boldsymbol{R}$ に対し $\omega(k^2g)=k^l\omega(g)$, $l\in \boldsymbol{Z}$ を満たす時, $l$ を $\omega$ の **weight** と呼ぶ.

**例**. $R=R_{ijkl}dx^k\wedge dx^l$ を $X$ の直交座標$(x_i)$に関する曲率の局所表示とする. この時, 不変式 $\det\{I_n+(t/2\pi i)R\}$ の $t^{2i}$ の係数 $C_{2i}$ に対し, $P_i=(-1)^iC_{2i}$ を **pontrjagin form** と呼ぶ. weight $P_i=0$ であり, $X$ がコンパクトの時, 通常の pontrjagin 類を表す.

**定理**(Gilkey [1]). $X$, $g$ を上の通り. $\omega$ を $g$ に canonically associated な微分形式とする. この時, (i) weight $\omega>0 \Rightarrow \omega=0$ (ii) weight $\omega=0 \Rightarrow \omega$ は pontrjagin form の多項式で表される.

証明は古典的な不変式論のみを用いてできる. 実際, 定理は, 次に述べる命題と 2 つの補題から初等的にしたがう. 今, 曲率テンソル $R=R_{ijkl}$ の共変微分を一般に $R_\alpha=R_{ijkl,pqr\cdots\cdots}$ と表す. この時, $m(R)=\Sigma_q{}^*R_{\alpha_1}R_{\alpha_2}\cdots R_{\alpha_r}$ の形に書かける $p$ 形式を基本 $p$ 形式と呼ぶ. ここで, $*$ は $\alpha_i$ 達の中に現れるいくつかの添字に関する縮約, $q$ は残りの $q$ 個の添字に関する歪対称化を表す.

**命題**. $g$ に canonically associated な任意の $p$ 形式 $\omega$ は基本 $p$ 形式の一次結合で表される. すなわち, $\omega(g)=\sum_\alpha a_\alpha m(R_\alpha)$.

この命題は次の 2 つの古典的事実による. 1) metric テンソルの不変式は, すべて曲率テンソルとその共変微分の不変式である. 2) 曲率テンソルおよび, その共変微分の不変式は, '基本不変式' の一次結合となる.

**補題 1**. 基本 $p$ 形式 $m(R)=\sum_q{}^*R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_r}$ の weight は $q-2r-\varepsilon$ で与えられる. ここで, $\varepsilon=\sum\varepsilon_i$, かつ $\varepsilon_i$ は $R_{\alpha_i}$ の共変微分の階数である.

**補題 2**. $R_\alpha=R_{ijkl,pqr}\cdots$ において最初の 5 個の添字のうちどの 3 個に関して歪対称化しても結果は 0 になる.

定理の応用として Hirzebruch の符号定理の微分幾何学的な証明が得られる.

**定理**. $X$ を $4k$ 次元向きづけられた微分多様体, sign $X$ で $X$ の符号数を表す時,

$$\mathrm{sign}(X) = L_k(P_1,\cdots,P_k)[X].$$

ここで $L_k$ は $P_i$ の有理係数多項式.

古典的な証明はコボルディズム理論を用いた. 微分幾何学的には, まず $X$ に Riemann 計量 $g$ を導入しておく. 1) (Patodi [2]) $X$ 上, $g$ に canonically associated な $4k$ 形式 $\omega$ で, かつ weight 0 のものが存在し,

$$\mathrm{sign}(X) = \int_X \omega(g).$$

2) Gilkey の定理より, $k$ 変数多項式 $f$ が存在して

$$\omega(g) = f(P_1,\cdots,P_k).$$

これを $X$ 上で積分すれば

$$\mathrm{sign}(X) = \int_X f(P) = f(P)[X].$$

3) 最後に, 十分多くの例について計算し $f$ の形を知る.

同様の方法により, さらに一般に, 古典的な Riemann-Roch 定理, Lefschets 不動点定理などが証明でき, また境界付き多様体への符号定理の拡張も得られる. この時, 境界付きの場合に $R$-$R$ 等を一般化できるかが一つの問題である. なお講演全般については [3] を参照.

## 文　　献

[1] P. Gilkey, Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes, Advance in Math. (to appear).

[2] V. K. Patodi, Curvature and the eigenforms of the Laplace operator, J. Diff. Geom. **5**, (1971) 233–249.
[3] M. F. Atiyah, R. Bott, V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, Invent. Math., **19** (1973), 279–330.

（藤木　明記）

## Bombieri 教授講演記録

### On counting the number of points of a curve over a finite field.

（1973年4月18日　於名古屋大学）

$k=\boldsymbol{F}_q$ を $q$ 個の元からなる有限体，$k_m=\boldsymbol{F}_{q^m}$ を $k$ の $m$ 次拡大体とする．$C$ を $k$ 上で定義された特異点を持たない projective curve とし，その $k_m$ 上有理的な点の個数を $\nu_m(C)$ とすれば，$C$ の（$k$ 上での）合同ゼータ関数は，

$$Z(t, C/k) = \exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\nu_m(C)}{m}\cdot t^m\right)$$

によって定義される．合同ゼータ関数に関する Riemann の予想が $\nu_m(C)$ の下からの評価，

$$(*)\qquad \nu_m(C) \geqslant q^m - c\cdot q^{m/2} \qquad (m,\ \text{十分大})$$

と同値であることはよく知られている．これに対し，Stepanor は $\nu_m(C)$ の上からの評価，

$$\nu_m(C) \leqslant q^m + c\cdot q^{m/2} \qquad (m,\ \text{十分大})$$

を初等的に導いた．この‘上からの評価’からは，合同ゼータに関する Riemann の予想は直ちには導かれないのであるが，Stepanor の idea を用いて，これを初等的に示すことができる，まず Stepanor の結果を紹介しよう．

**定理．** $q$ が十分大きければ，$q$ と関係なく定まる定数 $c$ が存在して，$\nu_1(C)\leqslant g+c\cdot q^{1/2}$ と評価できる．

証明の概略を記す．$p$ を $k$ の標数，$\bar{k}$ を $k$ の代数的閉包，$\varphi: C\longrightarrow C$ を $k$ 上の Frobenius map とする．$x\in C$ に対し，

$$x = \varphi(x) \Longleftrightarrow x \text{ は } k \text{ 上有理的.}$$

$C$ が $k$ 上有理的な点を持つ場合を見ればよい．かかる点 $x_0$ を一つとっておく．$\bar{k}(C)$ を $C$ の $\bar{k}$ 上の有理関数体とし，$m\in\boldsymbol{Z}$ に対し，

$$R_m = \{f\in\bar{k}(C) \mid (f)\geqslant -m\cdot x_0\}$$

とおく．$(f)$ は $f$ の divisor．これは $\bar{k}$ 上の有限次元ベクトル空間である．証明は次の(1)～(5)に基づいている．

(1) $R_m\cdot R_l\subset R_{m+l}$．ここに $R_m\cdot R_l$ は $f\cdot g$，$f\in R_m$，$g\in R_l$，が張る $\bar{k}$ 上のベクトル空間．

(2) $\dim R_{m+1}\leqslant\dim R_m+1$．

(3) $R_m\circ\varphi=\{f\circ\varphi \mid f\in R_m\}\subset R_{mq}$．

(4) $R_l^{(p^\mu)}=\{f^{p^\mu} \mid f\in R_l\}$ とおけば，これは $\bar{k}$ 上のベクトル空間であり，$R_{l\cdot p^\mu}$ に含まれる．

(5) $C$ の genus を $g$ とするとき，$m>2g-2$ ならば
$$\dim R_m = m+1-g.$$

**Lemma.** $l\cdot p^\mu<q$ ならば，自然な写像

$$R_l^{(p^\mu)}\otimes_{\bar{k}}(R_m\circ\varphi) \longrightarrow R_l^{(p^\mu)}\cdot(R_m\circ\varphi)$$

は同型である．

この lemma が基本的である．証明は，$R_m$ の基底 $S_1, \dots, S_r$ を $\mathrm{ord}_{x_0}(S_i)<\mathrm{ord}_{x_0}(S_{i+1})$ となるようにとれば容易である．((2)を用いよ.) ただし $\mathrm{ord}_{x_0}(f)$, $f\in\bar{k}(C)$, は $x_0$ が $f$ の $\mathrm{ord}_{x_0}(f)$ 位の0点であるようにとった，$\bar{k}(C)$ の $x_0$ における valuation．この lemma から $l\cdot p^\mu<q$ であるならば，

$$\delta\left(\sum \sigma_i^{p^\mu}\cdot(S_i\circ\varphi)\right) = \sum \sigma_i^{p^\mu}\cdot S_i,\quad \sigma_i\in R_l,$$

とおくことにより，線型写像

$$\delta: R_l^{(p^\mu)}\cdot(R_m\circ\varphi) \longrightarrow R_l^{(p^\mu)}\cdot R_m$$

が定義される．ここでもし，$f\in\mathrm{Ker}\,\delta$，$f\not\equiv 0$，なる $f\in\bar{k}(C)$ が存在すれば，$k$ 上有理的な $C$ の点で $x_0$ 以外のものはすべて，$f$ の少くとも $p^\mu$ 位以上の0点であることは見易い．一方（重複度を込めた）$f$ の0点の個数は，$f$ の極の個数と等しい．したがって，$f\in R_{lp^\mu+qm}$ であることから，

$$\nu_1(C) \leqslant \frac{m}{p^\mu}\cdot q+l+1$$

を得る．また，$R_l^{(p^\mu)}\cdot R_m\subset R_{lp^\mu+m}$．よって(5)より，

$$lp^\mu<q,\ \ l>2g-2,\ \ m>2g-2,$$
$$(l+1-g)\cdot(m+1-g)>lp^\mu+m+1-g,$$

であるならば，確かに $\delta$ は定義され，$\mathrm{Ker}\,\delta\neq\{0\}$ である．ここで，例えば $m=p^\mu+g$ ととれば，定理が成り立つことは見易い．

次に(*)，すなわち，合同ゼータに関する Riemann の予想を見る．射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ の有限次 Galois covering $C'$ で $C$ の Galois covering になっているものをとる．$G=\mathrm{Gal}(C'/\boldsymbol{P}^1)$，$H=\mathrm{Gal}(C'/C)$ とおくとき $H\subset G$ としてよい．さて $C'$ から $C$ への covering map を $\pi$ とすれば，$x\in C$ に対し，

$$x = \varphi(x) \Longleftrightarrow \forall y\in\pi^{-1}(x),\ \exists\sigma\in H,\ \varphi(y) = \sigma(y).$$

ここで，各 $\sigma\in G$ に対し，$\nu(C', \sigma)$ を，$C'$ の点 $y$ で，$\varphi(y)=\sigma(y)$ となるものの個数とすると，**上の Stepanor の方法を modify して，**

$$\nu(C', \sigma) \leqslant q+O(q^{1/2})$$

であることが示される．一方 Galois coverings $C'/\boldsymbol{P}^1$，$C'/C$ から

$$\sum_{\sigma\in G}\nu(C', \sigma) = |G|\cdot q+O(1),$$
$$\sum_{\sigma\in H}\nu(C', \sigma) = |H|\cdot\nu_1(C)+O(1)$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in H}\nu(C', \sigma) &= |G|\cdot q-\sum_{\sigma\in G-H}\nu(C', \sigma)+O(1)\\ &\geqslant |G|\cdot q-(|G|-|H|)(q+O(q^{1/2}))+O(1)\\ &= |H|\cdot q-O(q^{1/2})\end{aligned}$$

を得るが，これと直前の式から，$\nu_1(C)$ の下からの評価

$$\nu_1(C) \geqslant q-O(q^{1/2})$$

を得る　これは(*)に他ならない．

（三宅克哉記）

## The large sieve and its applications

(1973年4月19日　於京都大学)

多様体シンポジウムに出席されたBombieri氏は解析的整数論の研究においても優れたpioneerであった．この講演は今日まで過去約10年間同氏によって発見され世界の主だったこの道の研究者たちが競って完成してきた **large sieve** に関する綜合報告であった．座長であった筆者はnoteをとらなかったので，ここでは講演の主旨を多くは文献により主定理の変遷を中心として概略述べたいと思う．

**Brun** は $N$ を越えない自然数をならべある素数 $p$ の剰余類のいくつかを指定しそれに属するものを削除していくときなおどれほどのものが残されるかを調べた．その際たとえば $\sqrt{N}$ 以下のすべての素数 $p$ を考え $n\equiv 0 \bmod p$ となる $n$ を削除すれば $\sqrt{N}$ と $N$ との間の**素数**が残されるし $n\equiv 0,\ 2 \bmod p$ となる $n$ を削除すれば同じ範囲の**双子素数**が残される．残されたものの個数はそれぞれ

$$\frac{N}{\log N},\quad \frac{N}{\log^2 N}$$

のある定数倍以下になるが，その数え方が巧妙でそれを **Brun sieve** [1] と名付けている．

**Linnik** [9] はある種の問題では削除される剰余類の個数を各 $p$ ごとに $f(p)$ 個というように拡張する必要があることを述べ，始めて **large sieve** とよばれる方法を導入した．後に **Rényi** [12] がFourier解析の変形とみられる独創的な方法でLinnikの問題に取組んだ．Linnikの構想をとり入れた改良は **Roth** [13] と **Bombieri** [2] とによってなされた．当時24, 5才であったBombieriはRothの原稿を手に入れるやただちに別の方法を加えてさらに良い結果を完成し発表は同じ雑誌で同時になされた．別の方法とはDirichlet $L$ 函数の零点密度定理 [11] を細かく考察したものであった．

$Z$ 個の自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_Z$ はすべて $N$ 以下とし，素数 $p$ に対し，$n_j\equiv a \bmod p$ をみたす $n_j$ の個数を $Z(p,a)$ で表わすとき，上述の諸結果は結局

$$\sum_{p\leqq X} p\sum_{a=0}^{p-1}\left\{Z(p,a)-\frac{Z}{p}\right\}^2$$

を評価することであった．$X=\sqrt[3]{N/12}$ とし $\leqq 2NZ$ としたのがRenyiの結果であり，$X\geqq\sqrt{N/\log N}$ のとき $\ll ZX^2\log X$ としたのがRothの結果であり，Bombieriのは

$$\leqq 7\max(N, X^2)Z$$

であった．

$n=$ ある $n_j$ のとき $a_n=1$，しからざる場合 $a_n=0$ とすれば，$S(\alpha)=\sum_{n\leq N} a_n e(n\alpha)$ として

$$p\sum_{a=0}^{p-1}\left\{Z(p,a)-\frac{Z}{p}\right\}^2=\sum_{a=1}^{p-1}\left|S\left(\frac{a}{p}\right)\right|^2$$

が成立つことから，Bombieriは問題を

$$(1)\qquad \sum_{p\leqq Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\leqq(N+2Q^2)Z$$

の形に拡張したのであった．もっともこの結果は後に **Gallagher** [5], [6] が零点密度定理を使わない新しい方法で求めたものである．この一般化により長い間懸案になっていた多くの問題が解決された．たとえば **Renyi の問題**‘任意の自然数は素数と概素数（素因子の個数がbounded）との和として表わされる’などその1例である．

相異なる実数 $x_1, \cdots, x_R$ が $\min_{i\neq j}\|x_i-x_j\|\geqq\delta$ なる条件をみたすとする．ただし，$\|x\|=\min_n|x-n|$（$n$ 整数）である．このとき

$$\sum_{i=1}^{R}|S(x_i)|^2\leqq\left(N+\frac{2}{\delta}\right)\sum_{n\leq N}|a_n|^2$$

が証明されれば確かに(1)の改良となる．これについて，**Bombieri** と **Davenport** との共同研究 [3] があるが，Davenportの死後，**Bombieri** が先生にささげた論文 [4] はさすがに独創性のある優れたものであった．

最後に **Montgomery** によって開拓された新しい零点密度定理を導く方法，それにつながる **Ingham, Huxley** などの結果 [10], [8]，**Turan** のpower sum methodを使う **Gallagher** の研究 [7] などが紹介された．それらはすべてup to dateの問題で新人の活躍による開発をまつものであるが，前途は決して容易ではない．

### 文　献


[1] V. Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorèm de Golabach, Skrifter utgit av Videnskapsselkapet i Kristiania mat-naturvid. Kl. (1920), No. 3.

[2] E. Bombieri, On the large sieve, Mathematika, **12** (1965).

[3] E. Bombieri and H. Davenport, On the large sieve method, Abh. aus Zahlentheorie und Analysis zur Erinnerung an E. Landau, Berlin, 1968.

[4] E. Bombieri, A note on the large sieve, Acta Arithmetica, **18** (1971).

[5] P. X. Gallagher, The large sieve, Mathematika **14** (1967).

[6] ——, Bombieri's mean value theorem, Mathematika, **15** (1968).

[7] ——, A large sieve density estimate near $\sigma=1$, Inventiones math. **11** (1970).

[8] M. N. Huxley, The distribution of prime numbers, Large sieves and zero-density theorems, Oxford, 1972.

[9] U. V. Linnik, The large sieve, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **30** (1941).

[10] H. L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory, Springer, 1971.

[11] K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[12] A. Rényi, On the large sieve of U. V. Linnik, Compositio Math., 8(1950).
[13] K. F. Roth, On the large sieve of Linnik and Rényi, Mathematika, 12(1965).

(竜沢周雄記)

## W. Browder 教授講演記録

### Kervaire invariant

(1973年5月8日　於東京大学)

Browder 教授は，5月8日東京大学理学部において，標記の題のもとに講演された．以下はその要旨である．

多様体の分類理論にとって，二次形式の理論は不可欠である．例えば，$M^{4k}$ を $4k$-次元閉向きづけられた微分可能多様体とするとき，対称双一次形式

$$H^{2k}(M, \boldsymbol{Q}) \otimes H^{2k}(M, \boldsymbol{Q}) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$$
$$a \otimes b \longrightarrow (a \cup b)[M]$$

に associate した $\boldsymbol{Q}$ 上の二次形式の index として定義される sign$(M)$ は，$4k$-次元単連結 surgery broblem $f: N \to M$ の obstruction を完全に決定する；

$$\theta(f) = \frac{1}{8}(\mathrm{sign}(M) - \mathrm{sign}(N)).$$

また，$(4k+2)$-次元単連結 surgery problem $f: N \to M$ の場合には，$\boldsymbol{Z}/2$ 上の二次形式を用いて Arf-Kervaire obstruction

$$c(f) \in \boldsymbol{Z}/2$$

が定義される．しかしこの両者には，重大な違いがある．すなわち，前者の場合には obstruction が $M$ と $N$ とのそれぞれの不変量の差で記述されるのに反して，後者の場合には，そうではないということである．この講演では，この点をいかに改良するかということについて，教授の最近の研究結果が述べられた．これは教授の論文 (Ann.Math. 69年)をもっと幾何的に発展構成したものである．

$BO$ をベクトル束の分類空間，$\gamma$ を $BO$ 上の普遍ベクトル束，$BO\langle v_{q+1}\rangle$ を $BO$ の $Wu$-類 $v_{q+1}$ を kill した空間，$\bar{\gamma}$ を $BO\langle v_{q+1}\rangle$ 上に $\gamma$ をひきもどしたベクトル束，$\bar{\gamma}^{-1}$ をその逆とする．$K$ を $BO\langle v_{q+1}\rangle$ の十分大きな切片，$N$ を $K$ を $\boldsymbol{R}^n$ ($n$：十分大)に imbed した時の regular neighbourhood とする．$W = E(\bar{\gamma}^{-1}|N)$ とおく．さて $M^{2q}$ を $2q$-次元閉多様体としよう．$f: M \to N$ を $M$ の接束の分類写像とする．$f$ を imbedding で近似すると，$M$ は $W$ の部分多様体と考える時，容易にわかるように法束が自明である．そこで frame を固定して，$i: M \times \boldsymbol{R}^k \subset W$ と考える(幾何的 $Wu(q+1)$ orientation)．

$$V = \mathrm{Ker}\, i_*: H_q(M, \boldsymbol{Z}/2) \longrightarrow H_q(W, \boldsymbol{Z}/2)$$

とおく．この時，$\boldsymbol{Z}/2$ 上の二次形式

$$\psi: V \longrightarrow \boldsymbol{Z}/2 = \{\pm 1\}$$

が次のように定義される．$x \in V$ とする．この時ある compact 部分多様体 $X \subset W \times [0, \infty)$ が存在して，次の diagram が可換であるようにできる．

$$\begin{array}{ccccc} \partial X & \subset & X & \subset & W \times [0, \infty) \\ \parallel & & & & \cup \\ Q & \overset{j}{\subset} & M & \overset{i}{\subset} & W \end{array}$$

$x = j_*[Q]$．構成から，$Q$ は $W$ の部分多様体と考えるとき自然な法 $k$-frame をもつ．そこでこの $k$-frame が $X$ の $W \times [0, \infty)$ におけるそれに拡張される時 $\psi(x) = 1$，そうでない時 $\psi(x) = -1$ と定義する．これが $Q, X$ のとり方によらないことは，すぐわかる．そこで Arf-Kervaire 不変量 $c$ (または 'Democratic invariant') of $M \times \boldsymbol{R}^k \subset W$ を

$$c = \begin{cases} 1 & V \text{の過半数で} \psi = 1 \text{の時} \\ 0 & V \text{の丁度半分で} \psi = 1 \text{の時} \\ -1 & V \text{の過半数で} \psi = -1 \text{の時.} \end{cases}$$

と定義する．簡単な例として，$Y$ を $(2q+1)$-次元多様体，$g: Y \to S^1$ を微分可能写像で，fixed point $* \in S^1$ で $t$-regular なものとする．この時，$M = g^{-1}(*)$ とおけば，上の意味の Arf-Kervaire 不変量 $c$ が定義されるが，$c = -1, 0, 1$ のおのおのの値をとる $Wu(q+1)$-oriented 多様体が存在する．

(森田茂之記)

### Differential manifolds and homotopy theory.

(1973年5月12日　於京都大学)

種々の category (Diff. PL. Top.) の多様体の分類問題を考える時，一つの model となるのは，PL 多様体の smoothing の問題である．この問題には，Milnor, Cairns, Hirsch, Mazur, Lashof, Rothenberg 等により，次の結果が与えられた．$M$ を PL 多様体，$t_M$ を PL 接バンドルとする．

**定理**．$M$ が compatible smooth structure を持つための，必要十分条件は $t_M: M \to BPL$ が $M \to BO$ に lift できることである．またこの時，smooth structure の concordance 類全体はホモトピー集合 $[M, \mathrm{PL}/0]$ と一対一対応する．

この定理は，PL 多様体を一つ定め，その PL 同値類の中で，微分多様体の分類を可能にする．PL 多様体の代りに，一つのホモトピー型 $X$ を与え，同じ問題を考える．この時この問題が解をもつには，$X$ が Poincaré 複体でなければならない．さて $X$ を Poincaré 複体，$\mathcal{S}(X)$ を $X$ の smoothing の concordance 類の全体とする．

**定理**．$X^m$ を Poincaré 複体で $m \geq 5$ とする．$\pi_1(X) = \pi$，$L_k(\pi)$ を Wall 群とすると次の完全列がある：

$$L_{m+1}(\pi) \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} [X, G/0] \xrightarrow{\sigma} L_m(\pi).$$

さてこの surgery 完全列の応用，あるいは一般化として，コンパクト Lie 群 $K$ が作用している多様体の場合を考える．二つの $K$-空間 $X, Y$ の間の写像としては，単なる同変写像ではなく，次のような強いものを考える．

**定義**．$f: X \to Y$ が **isovariant** とは，$f$ が同変であり，かつ $g \in K$ に対し $gf(x) = f(x)$ なら $g(x) = x$ をみたすこ

とである．また，category $\mathcal{C}_K$ を，object は $K$-多様体，morphism $f: X \to Y$ は isovariant かつ $G$ の部分群 $H' \subset H$ に対し $f$ は $X^{(H)} \subset X^{(H')}$ の法束 $\nu_{H.H'}(X)$ から $\nu_{H.H'}(Y)$ への束写像になっているものとする．

さて，$X$ を $K$-多様体とする時，$\mathcal{C}_K$ における $X$ の homotopy smoothing を考えることができるが，それの $H$-cobordism 類全体を $\mathcal{S}_K(X)$ と書く．また Wall 群の analogy として，$\mathcal{C}_K$ からアーベル群への functor $L_m(\ )$ が定義され（ただし Wall 群と異り，幾何学的定義である），次の定理が成り立つ．

**定理**．次元に関するある条件の下で，次の完全列が存在する：

$$L_{m+1}(X) \to \mathcal{S}_K(X) \to [X/K, G/0] \to L_m(X).$$

（西田吾郎記）

### Manifolds and homotopy theory.

（1973年5月14日　於大阪大学）

多様体の分類問題を考え，いわゆる Browder-Novikov theory とその equivariant version を紹介する．

多様体の分類は0次元，1次元では自明であり，2次元では compact connected manifolds $M, N$ が homeomorphic の必要十分条件は，orientability が同じでかつ Euler characteristic が等しいことであった．しかしこのきれいな古典的結果は次元が高くなると望めない．例えば，任意の finitely presented group $\pi$ に対して $\pi_1(M)=\pi$ となる4次元 manifold が存在するからである．

次の category を考えよう．

Diff = differentiable manifolds と diffeomorphisms

PL = PL-manifolds と PL-homeomorphisms

Top = topological manifolds と homeomorphisms.

そうすると，自然に次の functors がある．

$$\text{Diff} \longrightarrow \text{PL} \longrightarrow \text{Top}.$$

これらの functors はどれも epic でも monic でもなく，これらの関係を調べることは，次のように言いかえられる．Diff→PL のところで述べると．

**定理**(Milnor, Lashof and Rothenberg). PL-manifolds が smoothable の必要十分条件は，その tangent PL-microbundle $t_M$ が linearizable であり，smoothing の concordance class は $t_M$ の linearization の仕方と1対1に対応する．

このようにそれぞれの構造は tangent bundle に反映されていることに着目し，前の分類問題を考えてみよう．

space $X$ が与えられた時，いつそれが smooth $m$ manifold と homotopy equivalence になるか？　という問題を考えると，先ず必要条件として $X$ は Poincaré duality

$$[X] \cap : H^q(X) \xrightarrow{\cong} H_{m-q}(X)$$

を満さなければならない（ただし $[X] \in H_m(X)$ で $q$ は任意）．そういうのを Poincaré space とよぶことにすると，次の定理が成立．

**定理**．もし $k \gg m$ ならば，次のような Spivak normal fiber space $(\xi, \alpha)$ が存在して，unique である．

$$E_0(\xi) \xrightarrow{p} X \text{ fiber space with fiber} \simeq S^{k-1}$$

$$\alpha : S^{m+k} \xrightarrow[\text{degree } 1]{} T(\xi) = X \bigcup_p CE_0(\xi).$$

$X$ を Poincaré space とし，homotopy smoothing の集合 $\mathcal{S}(X)$ を考える．つまり $\mathcal{S}(X) = \{(M, h), M \text{ smooth manifold}, h: M \to X \text{ homotopy equivalence}\}/\sim$ ただし $(M_0, h_0) \sim (M_1, h_1) \Longleftrightarrow \exists (W, H)$ s. t. $\partial W = M_0 \cup -M_1$, $H: W \to X \times [0,1]$ homotopy equivalence で $H|M_i = (h_i, i), i=0,1$.

$X$ が homotopy type の中で smoothable ならば，前の Spivak normal fibration は linear bundle の構造をもつことになり，Milnor, Lashof and Rothenberg の定理の一般化が考えられる．

$\mathcal{L}(\xi) = \{(\eta, b)\}/\sim$　ただし $\eta$ : linear bundle on $X$ $b: \eta \longrightarrow \xi$ fiber homotopy equivalence で$\sim$は

$$\begin{tikzcd} & B_O \arrow[r] \arrow[d] & G/O \\ X \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B_G & \end{tikzcd}$$

なる lifting の homotopy class で入れる（一つ存在すれば $[X, G/O]$ と1対1に対応）．その時

**定理**．$X$ : Poincaré space $\dim X \geqq 5$, $\pi_1(X) \cong \{1\}$,

$$P_{m+1} \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}(\xi) \xrightarrow{\theta} P_m$$

が set としての exact．つまり $\mathcal{L}(\xi)=\phi \Rightarrow \mathcal{S}(X)=\phi$ であり，$\mathcal{L}(\xi) \neq \phi \Rightarrow \theta^{-1}(0) = \eta(\mathcal{S}(X))$，かつ $P_{m+1}$ は $\mathcal{S}(X)$ に operate する，$\omega : P_{m+1} \times \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$．そして $\eta(x) = \eta(y) \Longleftrightarrow x, y$ が同じ orbit に入る．ただし，ここで

$$P_i = \begin{cases} 0 & i : \text{odd} \\ Z & i = 4k \\ Z_2 & i = 4k+2. \end{cases}$$

$\pi_1(X) = \pi \neq \{1\}$ の時は Wall により Wall group $L_m(\pi)$ が定義され，同様に

$$L_{m+1}(\pi) \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}(\xi) \xrightarrow{\theta} L_m(\pi)$$

が exact.

次 group action をもった場合を考えよう．$K$ : compact Lie group とする．最も一般の category では $t$-regular 等うまくいかないので，不本意ながら制限したものを考える．

**定義**．$K$-map $f$ が isovariant とは $gf(x)=f(x) \Longrightarrow gx=x$.

isovariant $h$-($s$-) cobordism theorem は容易に得られる．$M$ : smooth $K$-manifold で $H \subset K$ を任意の subgroup とした時 $M^{(H)} = \{m \in M, \exists g, \text{s.t. } gK_m g^{-1} \supset H\}$ と

おき．$\dim M^{(H)}/K \geqq 5$ ならば abelian group $L_*^K(M)$ が定義され

$$L_{m+1}^K(M) \to \mathcal{S}_K(M) \to [M/K,\ G/O] \to L_m^K(M)$$

が exact．ただし $L_m^K(M)$ は次の性質をもつ．$f: M \to N$ で $f$ がすべての orbit type の pair に対して，それぞれとその差に関して $\pi_1$ の同型を induce する時，$f_*: L_m^K(M) \to L_m^K(N)$ は同型となる．そして $Z_4$-grading をもつ．

以上が話のあらすじだが，2 年程前に Amherst conference で Browder が講演した内容とほとんど同じであり，Hauptvermutung, Triangulation, Transformation group へとはなばなしい応用を産んだ Novikov-Browder theory も一段落したことを示していると言えよう．

(川久保勝夫記)

**Manifolds and homotopy theory**

(1973 年 5 月 16 日　於九州大学)

球面改変(surgery)の理論は，与えられたホモトピー型をもった多様体を分類する問題を研究するために発展した．

$m$ 次元 Poincaré 空間 $X$ ($[X] \in H_m(X)$ が存在して，各 $q$ に対して同型 $[X] \cap: H^q(X) \approx H_{m-q}(X)$ が成りたつ) に対して $m$ 次元(閉じた可微分)多様体 $M$ とホモトピー同値写像 $f: M \to X$ の対 $(M, f)$ を考える．$(M_0, f_0)$ と $(M_1, f_1)$ が同値($h$ 同境)とは，$m+1$ 次元多様体 $W$ とホモトピー同値写像 $F: W \to X \times I$ が存在して $\partial W = M_0 \cup M_1$, $F|M_i = f_i\ (i=0, 1)$ を満たすときにいう．その同値類の集合を $\mathcal{S}(X)$ と書く．

単連結な Poincaré 空間 $X$ 上には，Spivak normal fibre space といわれる spherical fibre space $\xi$ が存在する．これは球面の中へ埋めこまれた多様体の法束の analogy である．$X$ 上の線形 $k$-平面束 $\eta$ とファイバーホモトピー同値写像 $b: E_0(\eta) \to E_0(\xi)$ の対 $(\eta, b)$ を考える．$(\eta_0, b_0)$ と $(\eta_1, b_1)$ が同値とは，ファイバーホモトピー同値写像 $\alpha: E_0(\eta_0) \to E_0(\eta_1)$ が存在して，$b_0 = b_1 \alpha$ を満たすときにいう．その同値類の集合を $\xi$ の linearization といい，$\mathcal{L}(\xi)$ と書く．

$\mathcal{S}(X)$ の元が与えられると，$\xi$ には線形束の構造がホモトピーを除いて定まるので，$\eta: \mathcal{S}(X) \to \mathcal{L}(\xi)$ が定義される．さらに，$\mathcal{S}(X)$ と $\mathcal{L}(\xi)$ の間の関係は，次の球面改変完全系列によって与えられる．

$X$ を単連結な $m$ 次元 Poincaré 空間とすると，$m \geqslant 5$ のとき，可換群 $P_i$ が存在して，系列

$$P_{m+1} \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}(\xi) \xrightarrow{o} P_m$$

は次の意味で完全である．(1) $o^{-1}(0) = \eta(\mathcal{S}(X))$ (2) $\eta(x) = \eta(y) \Longleftrightarrow \exists g \in P_{m+1},\ x = \omega(g, y)$．ここに，$P_i = 0\ (i \equiv 1(2))$, $= \boldsymbol{Z}\ (i \equiv 0(4))$, $= \boldsymbol{Z}_2\ (i \equiv 2(4))$．$o$ は球面改変障害，$\omega$ は $P_{m+1}$ の $\mathcal{S}(X)$ 上への作用を表わす．

これは Wall により単連結でない場合に拡張されている．

$M$ を $S^{m+k}\ (k \gg m)$ の中へ埋めこみ，その法束を $\nu$, $\eta$ を $X$ 上の線形束とする．写像度 1 の写像 $f: M \to X$ とその上の束写像 $b: \nu \to \eta$ の対 $(f, b)$ を normal map という．normal map $(f, b)$ の normal cobordism $(W, F, B)$ とは，(1) $m+1$ 次元多様体 $W$ (2) 写像 $G: W \to X \times I$ (3) 束写像 $B: \omega \to \eta$ (ここに $\omega$ は $W$ の $S^{m+k} \times I$ の中での法束)で，$\partial W = M \cup M'$, $G|M = g$, $B|\nu = b$ を満たすものをいう．Thom の transversality theorem によって，$\mathcal{L}(\xi)$ の元は normal map の normal cobordism class と対応する．

さて，normal map を normal cobordism によって，もっと連結度の高い写像に変えることを考える．normal cobordism の構成は，球面改変によってなされる．そのとき，球面改変障害が $m = 2q$ のとき，$q$-連結な写像を $q+1$ 連結にするときにおこる．すなわち，$\pi_q(f) \cong K_q(f) = \mathrm{Ker}(f_*: H_q(M) \to H_q(X))$ の元を図式(1)で表わすとき，それを(2)のように拡張するための障害である．

$$(1)\quad \begin{array}{ccc} S^{q-1} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ D^q & \longrightarrow & X \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{ccc} S^{q-1} \times D^{q+1} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ D^q \times D^{q+1} & \longrightarrow & X \end{array}$$

$q$ が偶数のとき，その障害は次のように表わされる．

$$o(f, b) = \mathrm{Index}\ M - \mathrm{Index}\ X$$

ここに Index $M$ は $(x, y) = (x \cup y)[M]$ で定義される．$H^q(M; \boldsymbol{Q})$ 上の双線形形式の符号定数で，さらにこれは Hirzebruch の指数定理により，$M$ の Pontrjagin 類で表わすことができる．

$q$ が奇数のとき，その障害は，$\phi(x) = (x, x)$ で定義される $K^q(f; \boldsymbol{Z}_2)$ 上の，$\boldsymbol{Z}_2$ に値をもつ 2 次形式(同伴双線形形式は正則)の Arf 不変量である．単連結の場合球面改変の理論で残っている重要な問題は，一般的に Kervaire 不変量 $K$ を定義して，この場合にも

$$o(f, b) = K(M, \cdots) - K(X, \cdots)$$

という形に表わすこと，そして $K$ の計算しやすい方法を工夫することである．2 次形式の一般的な構成は $M$ が，その法束が自明であるように $2q+k$ 次元多様体 $W$ に埋めこまれ，$W$ が条件(*)を満たすときにできる．(*)‘$W \times I$ に埋めこまれた $q+1$ 次元多様体 $Q$ の法束は，$q$ 平面束へ reduce できる’．このとき $K^q(f)$ 上で定義される 2 次形式の同伴双線形形式は正則でなくてもよい．したがって，その不変量は乗法に関して $\boldsymbol{Z}_3$ に値をもち，逆元は存在しない．最後に，この 2 次形式の Grothendiek monoid の 0 でない元の例が，写像 $(-S^{2q}) \cup 3P^{2q} \to P^{2q} \times \boldsymbol{R}^k$ を使ってつくられた．

なお，条件(*)は[1]で与えられている条件‘$Wu$ 類 $v_{q+1}(W) = 0$’を幾何学的に意味づけている．

**文　献**

[1] W. Browder, The Kervaire invariant of

framed manifolds and its generalization, Ann. of Math., **90**(1969), 157–186.

（森　雅光記）

## 広中平祐教授講演記録

### Łojasiewicz の不等式について

（1973年4月6,7日　於京都大学）

超関数の解析関数による割り算が可能だということは Hörmander によって多項式のとき [4]，および Łojasiewicz によって一般のとき [5] が証明された．そこで重要な役割を果すのは Łojasiewicz の不等式である．広中教授はその不等式が特異点の解消 [2] を使って証明できることを指摘された．すなわち次の不等式 I～IV を示した．なお元の割り算可能の件については Atiyah [1] が特異点の解消によって容易に証明できることを示している．

$Q$ をコンパクトな $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする．$f, g$ を $Q$ の近傍で定義された実解析関数とする．そのとき次の不等式が成り立つ．

**不等式 I.** $f$ の零点集合が $g$ の零点集合を含むなら，正の定数 $K, N$ が存在して，すべての $x \in Q$ に対して

$$K|g(x)| \geqslant |f(x)|^N$$

となる．

**不等式 II.** $g$ の零点集合を $A$ とおけば，正の定数 $K$, $N$ が存在して，すべての $x \in Q$ に対して

$$K|g(x)| \geqslant \operatorname{dis}(x, A)^N$$

となる．

**定義.** $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $A$ がコンパクト subanalytic とは，コンパクト実解析多様体 $X$ と $X$ から $\boldsymbol{R}^n$ への実解析写像 $f$ が存在して，$A=f(X)$ となることを言う．なお一般の subanalytic の定義は [3], [6] を参照．

Subanalytic 集合について次の補題のように特異点の解消ができる．

**補題.** $A_i$ を有限個の subanalytic な $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする．$x_0$ を $\boldsymbol{R}^n$ の一点とする．そのとき有限個の $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への解析写像 $\pi_\alpha$ が存在して次のことが言える．

(1) $U$ を $\boldsymbol{R}^n$ の単位球体とするとき，$\pi_\alpha(U)$ の $\alpha$ に関する和集合は $x_0$ の近傍となる．

(2) 任意の $i$ と $\alpha$ に対して $\pi_\alpha^{-1}(A_i)$ は quadrant の和集合になる．ただし quadrant とはその上で座標関数が常に一定の符号をもつか，または常に零になる集合で極大なものを言う．

これによって次の不等式が得られる．

**不等 III.** $A, B$ をコンパクト subanalytic な $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする．$Q$ をコンパクトな $A, B$ を含む集合とする．そのとき正の定数 $K, N$ が存在してすべての $x \in Q$ に対して

$$\operatorname{dis}(x, A\cap B) \leqslant K(\operatorname{dis}(x, A)+\operatorname{dis}(x, B))^N$$

となる．

$A, B$ を $C^\infty$ 多様体で，かつ subanalytic な $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とし，$\bar{A}\supset B$, $A\cap B=\phi$ とする．$A, B$ の次元をおのおの $a, b$ とする．

$$\square = \boldsymbol{R}_{n-a,a}\times\boldsymbol{R}_{n-b,b}\times P^{n-1}(\boldsymbol{R})$$

$$\triangle = \{(\zeta, \eta, \xi)\in\square \mid \zeta\supset(\eta \text{ と } \xi \text{ で張られた線型部分空間})\}$$

とおき，$\square$ に距離関数 $\delta$ を入れ，$x\in A\cap(B$ の管状近傍$)$ に対して

$$d(x) = \delta((T_x(A),\ T_{p(x)}(B),\ \overrightarrow{p(x)x}),\ \triangle)$$

とおく．ただし $p$ は $B$ への射影．

**定義.** $A, B$ が **Whitney 条件**を満たすとは，各点 $y\in B$ とすべての $A$ の元の収束列 $x_n\to y$ に対して $\lim_{n\to\infty} d(x_n)=0$ が成り立つことを言う．また **Łojasiewicz-Whitney 条件**を満たすとは，各点 $y\in B$ に対して $y$ の近傍 $Q$ と正の定数 $K$, $N$ が存在してすべての $x\in Q\cap A$ に対して

$$d(x) \leq K\operatorname{dis}(x, B)^N$$

が成り立つことを言う．

**不等式 IV.** $A, B$ が Whitney 条件を満たせば Łojasiewicz-Whitney 条件を満たす．

#### 文　献


[1] M. F. Atiyah, Resolution of singularities and division of distributions, comm. pure appl. Math., **23**(1970), 145–150.

[2] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., **79**(1964), 109–326.

[3] Hironaka, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra-In honor of Professor Akizuki, Kinokuniya, Tokyo,（近刊）.

[4] L. Hörmander, On the division of distributions by polynomials, Ark. Mat., **3**(1958), 555–568.

[5] S. Łojasiewicz, Sur le problem de division, Studia Math., **18**(1959), 87–136.

[6] 広中平祐教授講演記録, 数学, **25**(1972–73), 72–75.


（塩田昌弘記）

## 小林昭七教授講演記録

### Hyperbolic 多様体についての 2, 3 の話題

（1973年4月22日　於名古屋大学）

Hyperbolic 多様体に関連する 4 つの問題について主として話された．

**定義.** $M$ を $n$ 次元複素多様体，$E$ をその部分集合，$B$ を $\boldsymbol{C}^n$ の単位開球，$\mu$ を $B$ 上のポアンカレ計量からきまる volume とする．$B$ から $M$ への正則写像全体の集合を $\operatorname{Hol}(B, M)$ とする時

$$\mu_M(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{K}\mu(f_i^{-1}(E));\ \bigcup_{i=1}^{K} f_i(B)\supset E,\ \{f_i\}_{i=1}^{K}\subset\operatorname{Hol}(B,\ M)\right\}$$

により $E$ の測度を定義する．$M, N$ を $n$ 次元複素多様体とし $\varphi: M\to N$ を正則写像とすると $\varphi$ は measure-decreasing である．すなわち $E\subset M$ に対して $\varphi^*\mu_N(E)=$

$\mu_N(\varphi(E))$ とおき $\varphi^*\mu_N$ を定義すると $\varphi^*\mu_N \leqq \mu_N$ が成り立つ.

**定義**. $M$ が measure hyperbolic とは任意の $E\subset M$ に対して，もし $E$ の開核が空でなければ，$\mu_M(E)\neq 0$ が成り立つ時にいう.

**定理**. エルミット多様体 $M$ の正則断面曲率が強負定値ならば，$M$ は hyperbolic である.

**定理**. エルミット多様体 $M$ のリッチ曲率 $R_{i\bar{j}}$ が $(R_{i\bar{j}})\leqq(-cg_{i\bar{j}})$ (ただし，$c$ は正の定数，$g_{i\bar{j}}$ はエルミット計量)を満たせば，$M$ は measure hyperbolic である.

**問題** $(A)$. コムパクト measure hyperbolic 多様体は射影的代数多様体か.

**問題** $(B)$. 等質(measure) hyperbolic 多様体は $\boldsymbol{C}^n$ の有界領域か.

**問題** $(C)$. $\mu_M$ および小林擬距離 $d_M$ はいつ滑らかか.

$\mu_M$ は $M$ 上の $(n,n)$ 型実 $2n$ 形式とみられるから局所的に $\mu_M=(\sqrt{-1})^{n^2}\mu_M^* dz_1\wedge dz_2\wedge\cdots\wedge dz_n\wedge d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n$ とかける. ここに $\mu_M^*$ は実函数，$M$ が等質なら $\mu_M^*$ は滑らかである. 一般には $\mu_M^*$ は滑らかでないが，超函数のいみで次の2形式を考える；

$$R=-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\log\mu_M^*}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}dz_\alpha\wedge d\bar{z}_\beta.$$

$R$ が負定値かどうかが問題になる. もしそうなら $(A)$ と関連してコホモロジーの消滅定理がえられるかどうか？また $(B)$ に関してはこの場合 Piatetskii-Sapiro 達の理論から $(B)$ は肯定的と思われる.

$d_M$ が滑らかかどうかについてはそうでない $M$ の例がある.

**問題** $(C')$. $\boldsymbol{C}^n$ の領域 $D$ の境界が滑らかなら $d_D,\mu_D$ は滑らかか？

**問題**(楕円体問題). $\boldsymbol{C}^2$ の座標を $(z,w)$, $z=x+iy$, $w=u+iv$ とし

$$E=\left\{(z,w)\in\boldsymbol{C}^2;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{u^2}{c^2}+\frac{v^2}{d^2}<1\right\}$$

とする. この時 $E$ はいつ単位開球に正則同値か.

$a\neq b$ かつ $c=d$ の時は成木氏により解かれている. $a\neq b$ かつ $c\neq d$ の時は $(C')$ が証明され $d_E$ が $E$ のカラテオドリ距離と異なることが示せればよい.

**問題** $(D)$. $M$ をコンパクト複素多様体，$A$ をそのアルバネーセ多様体とし，$\varphi: M\to A$ を標準写像とする. $f: \boldsymbol{C}\to M$ を正則写像とする時，$\varphi\circ f$ はいつ定数写像になるか.

これに関連しては最近の松島-Stoll の仕事がある.

(大本日出夫・金行壮二記)

## N. H. Kuiper 教授講演記録

### A generalization of convexity

(1973年4月19日　於東北大学)

I. H. E. S. 所長の Kuiper 教授は，上記題目について興味のある講演をされた. 以下にその概要を記す.

**1.** absolute curvature の定義. $M^n$ を closed な $n$ 次元微分可能多様体，$E^N$ を $N$ 次元ユークリッド空間，$f: M^n\to E^N$ を immersion とする. $z$ を $E^n$ の単位コベクトルとする. ほとんどすべての $z$ に対して，$M^n$ 上の実数値関数 $zf$ は非退化の critical points を持つから，$\mu(zf)$ を $zf$ の非退化の critical points の個数とする. そのとき，$f$ の absolute curvature $\tau(f)$ を次で定義する：

$$\tau(f)\equiv\int_{z\in S^{N-1}}\frac{\mu(zf)}{\mathrm{vol}\,S^{N-1}}\cdot\alpha,$$

ここで，$S^{N-1}$ は $E^N$ 内の単位球で ($E^N$ のベクトルと，その双対ベクトルとを同一視している)，$\alpha$ は $S^{N-1}$ の体積元素とする. たとえば $n=1$ の時は，$\rho$ を曲線 $f(M^1)$ の曲率とし，$S$ をその弧長とするとき，$\tau(f)=\pi^{-1}\int|\rho dS|$ であることが知られており，また $n=2$, $N=3$ の時は，つまり3次元ユークリッド空間 $E^3$ 内の閉じた曲面に対しては，$K$ を induced metric に関するガウス曲率，$d\sigma$ を $M^2$ の面積元素とするとき，

$$\tau(f)=\int_{M^2}\frac{|Kd\sigma|}{2\pi}.$$

さらに，次のような量 $\alpha(M)$ を定義する. critical points が非退化であるような任意の関数 $\varphi: M^n\to R$ に対して，$\alpha(M^n)\equiv\inf_{\varphi}\mu(\varphi)$ と置く. その時次の定理が成立する.

**定理 1.** $f: M^2\to E^3$ を immersion. $M^2$ : closed 2次元 $C^\infty$-多様体. $\chi(M^2)$ を $M^2$ の Euler characteristic とする. そのとき

$$\tau(f)\geqq\alpha(M^2)=4-\chi(M^2)$$

が成り立つ.

**2.** Tight immersion の定義. ある immersion $f: M^n\to E^N$ が $\tau(f)=\alpha(M^n)$ を満足する時，$f$ は tight であるという(または，$f$ は minimal absolute total curvature をもつと言う). ついでに，写像 $f$ が substantial とは，$f(M^n)$ が $E^N$ の任意の超平面に含まれないときに言う. $f(M^n)$ の tightness と convexity との間の関係については，以下のような定理が成り立つ. $H$ を $E^N$ の任意の半平面とする.

**定理 2.** $f: M^n\to E^N$ : embedding. $f(M^n)$ が convex set であるための必要十分条件は，$f(M^n)\cap H$ がすべての半平面 $H$ に対して，contractible であること.

**定義**. $f$ が two-piece property (TPP) をもつとは，任意の半平面 $H$ に対して，$f(M^n)\cap H$ が connected かまたは空である時に言うことにする (T. Banchoff).

**定理 3.** $E^3$ 内に embed された closed $C^\infty$-曲面 $M$ に対して次の三つは同値な条件である.

(i) $\int_M|Kd\sigma|$ が最小値をとる；

(ii) $\tau(f)=\alpha(M)$；

(iii) $f$ が TPP をもつ.

**3.** この分野における一般的な問題は，'closed な $n$

次元微分可能多様体 $M^n$ と自然数 $N\geq n$ を与えたとき，$M^n$ の $E^N$ への smooth tight immersion で substantial なものが存在するか？，また存在する時に $f(M^n)$ について，何がわかるか？　また $f$ や $M^n$ の微分可能性を下げることができるか？，である．

終りに教授はその具体的な例として，2次元実射影空間の $E^5$ への tight embedding の例と，Moebius band の $E^4$ への tight embedding（この時の，'tight' の定義については，下記論文 [2] を参照）の例を書いてみせて，講演を終えられた．

この方面の研究の歴史は大変古いが，D. Ferus による lecture note が Springer から出版されている．Kuiper 教授自身による解説と最近の結果は次の2つの論文に表われている．

### 文　献

[1] N. H. Kuiper, Minimal total absolute for immersions, Inventions math., **10** (1970), 209–238.

[2] N. H. Kuiper, Tight topological embeddings of the Moebius band, Journ. Diff. Geo., **6** (1972), 271–283.

また TPP については，

[3] T. F. Banchoff, The two-piece property and tight $n$-manifolds with boundary in $E^N$, Trans. A. M. S., **161** (1971), 259–267.

を見られるとよいと思う．

（剱持勝衛記）

## Convexity の一般化

（1973年4月20日　於京都大学）

ここでの目的は tight imbedding の概念を convexity の一般化としてとらえることにある．また，この概念と全絶対曲率の最小性との関係についても若干述べる．

まず $D$ を $N$ 次元ユークリッド空間 $E^N$ のコンパクト集合とする．そのとき

(*)　$D$：凸 $\Longleftrightarrow$ $E^N$ のすべての閉半空間 $H$ に対して $H\cap D$ は $\phi$ または可縮，

がなりたつ．このことを少しちがった角度から眺めて，convexity を拡張してみよう．$M$ をコンパクト空間とし，$f: M\to E^N$ をうめこみまたははめこみとする．与えられた $E^N$ の上の一次形式 $z$ と実数 $c$ とに対して，

$$(z\circ f)_c=\{x\in M \mid z\circ f(x)\leq c\}$$

とおく．そうすると，(*)は $f$ がうめこみのとき，

$f(M)$：凸 $\Longleftrightarrow$ $\forall z$，$\forall c$ に対して，$(z\circ f)_c$ は $\phi$ または可縮，

ということに他ならない．そこで，$M$ が可縮がないようなときの convexity の拡張として，次の定義を導入する：

$f$ : **tight** $\longleftrightarrow$ $\forall z$，$\forall c$ に対して，$(z\circ f)_c$ は必要以上に複雑でない．

むろん '必要以上に複雑でない' ということを厳密にしなければならないが，その前に二，三の例について説明しよう．

**例 1.** $M=S^1\times[0,1]$．これがホモトピー円周であることを考えて上の '必要以上に複雑でない' ということを，i) $\phi$，または ii) 可縮，iii) ホモトピー円周であるとする．このとき，$E^2$ への tight imbedding は凸集合からその内部の凸集合を抜いたようなものしかない．$M$ の $E^3$ への tight imbedding の例は図1で，図2は tight ではない．

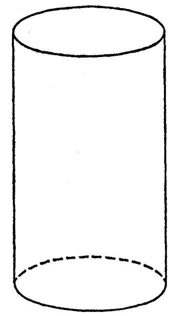


図 1

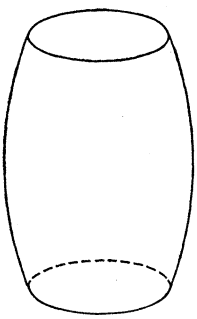


図 2

**例 2.** $M$＝メービウスの帯．これもホモトピー円周だから，tight の定義は上と同じとする．$M$ の $E^4$ へのうめこみの例として次のものがある．$\{1,2,3,4,5\}$ を $E^4$ 内のある4次元単体の頂点とし，三角形 $(1,2,3)$，$(2,3,4)$，$(3,4,5)$，$(4,5,1)$，$(5,1,2)$ を順番につなげば，これはメービウスの帯の三角形分割を与え，容易にわかるように，これは $M$ の $E^4$ への tight imbedding である（図3；$E^3$ へ適当に射影したもの）．

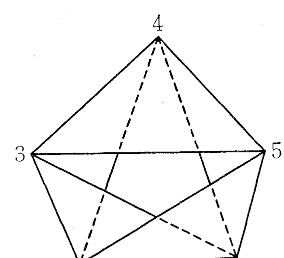



図 3

逆に $E^4$ への tight imbedding で，どの3次元部分空間にも含まれないようなものは，上のようなものしかないこともわかる．

**例 3.** $M=S^n$．この例では，'必要以上に複雑でない' ということは，i) $\phi$，または ii) 可縮，iii) ホモトピー $n$-球面，という意味にしておかねばならない．このとき，tight imbedding は，Fenchel の定理，Chern-Lashof の定理と密接な関係にある．

これらの例から，tight の定義を次のようにするのが一番もっともらしい：すなわち，うめこみ $f: M\to E^N$ に対して，

**定義**. ほとんどすべての$E^N$の単位ベクトル$z$に対して，$z\circ f$の臨界点の個数が最小であるときに，$f: M\to E^N$を **tight imbedding** という．

以後 tight とはこの意味でつかう．

**例 4**. 代数幾何における Veronese 写像 $f: RP(2)\to E^5$ は tight imbedding である：

$$f([x_1, x_2, x_3]) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2,\ x_2x_3, x_3x_1, x_1x_6),$$

ここで，$(x_1, x_2, x_3)\in S^2$，$[x_1, x_2, x_3]$ は$(x_1, x_2, x_3)$があらわす$PR(2)$の元．

与えられた閉多様体が tight imbedding を許すかどうかについて，次の定理をのべた：

**定理**. $M$を$(p-1)$-連結，$2p$次元多様体とする．$M$が$E^N$へ tight に imbed されるならば次のどちらかがなりたつ：

(1) $N-2p=1$ または 2，(このとき$M$は parallelisable)，

(2) $M$の中で自己交点数 1 の$S^p$がある(このとき $2p=4, 8, 16$).

この定理をつかえば，tight imbedding を許さない多様体の例をつくることができる．

(成木勇夫記)

### A Generalization of Convexity and Minimal Absolute Total Curvature.

(1973年4月24日　於九州大学)

§1. 3次元ユークリッド空間の曲線や輪環面(Torus)を例にとって，曲線や曲面の凸性，曲率，関数の臨界点(Critical Point)等を説明した．$\varphi$をコンパクトな連結$C^\infty$多様体$M$上の$C^\infty$関数とするとき，点$x_0\in M$において$d\varphi(x_0)=0$となるとき，$x_0$を関数$\varphi$の臨界点という．$x_0$を関数$\varphi$の臨界点とするとき，行列$(\partial_j\partial_i\varphi)(x_0)$が退化しないとき，すなわち$\det(\partial_j\partial_i\varphi)(x_0)\neq 0$のとき，$x_0$を$\varphi$の非退化臨界点(Non-degenerate Critical Point)という．点$x_0$を関数$\varphi$の非退化臨界点とするとき，点$x_0$のある近傍$U$における局所座標系$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$で$u_\alpha(x_0)=0$，$(\alpha=1, 2, \cdots, n)$かつ$U$上でいたるところ恒等式

$$\varphi = \varphi(x_0)-u_1^2-u_2^2-\cdots-u_i^2+u_{i+1}^2+\cdots+u_n^2$$

が成立するようなものが存在する．そして 0 または正の整数$i$を点$x_0$における関数$\varphi$の指標(Index)とよぶ．いま$\mu_i(\varphi)$を関数$\varphi$の指標$i$の非退化臨界点の個数とし，$\mu(\varphi)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i(\varphi)=$関数$\varphi$の非退化臨界点の密度(個数)とする．また$\beta_i(M)$を$M$の$i$次元ベッチ数(Betti Number)とする．このとき Morse の不等式から

$$\mu_i(\varphi)\geqq \beta_i(M) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

が成立する．したがって

$$\mu(\varphi) = \sum_{i=0}^{n}\mu_i(\varphi)\geqq \sum_{i=0}^{n}\beta_i(M) = \beta(M)$$

が得られるし，さらに

$$\sum_{k=0}^{n}(\mu_k(\varphi)-\beta_k(M))t^k/(1+t)$$

が非負係数の多項式となることから

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mu_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k(M) = \chi(M)$$

が成立する．ここに$\chi(M)$は$M$の Euler 特性数(Euler Characteristic)である．特に 2 次元曲面$M^2$に対しては$\mu(\varphi)\geqq 4-\chi(M^2)$が成立する．

§2. いま$M\xrightarrow{f}E^N\xrightarrow{z}\boldsymbol{R}$において，$f$を多様体$M$の$N$次元ユークリッド空間$E^N$へのはめこみ(immersion)，$z$を$E^N$上の線形関係とするとき，$\mu(zf, U)$を$M$の領域$U$における関数$zf$の非退化臨界点の密度とし，

$$\tau(f, U) = \mathcal{E}_z\mu(zf, U) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(S^{N-1})}\int_{z\in S^{N-1}}\mu(zf, U)dv(S^{N-1})$$

を考える．ここに$dv(S^{N-1})$は単位球面$S^{N-1}$の体積要素とする．この量は閉曲線に対しては，その曲率を$\rho$とし，$s$を弧長とすると，$\frac{1}{\pi}\int|\rho||ds|$となり，また$E^3$の閉曲面に対してはその Gauss 曲率を$K$，面積要素を$d\sigma$とすれば$\frac{1}{2\pi}\int|K||d\sigma|$となる．そして$M\xrightarrow{f}E^N$の絶対全曲率(Absolute Total Curveture)は

$$\tau(f) = \tau(f, M^n) = \mathcal{E}_z\mu(zf, M^n)$$

で定義する．いま$\Phi(M)$を$M$上の非退化臨界点のみをもつ$C^\infty$-関数の集合とし，

$$\mu_i(M) = \min\{\mu_i(\varphi)\,|\,\varphi\in\Phi(M)\}, \quad (i=0, 1, \cdots, n)$$

$$\mu(M) = \min\{\mu(\varphi)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i(\varphi)\,|\,\varphi\in\Phi(M)\}$$

とおくと，次の不等式が成立する：

$$\tau(f)\geqq\mu(M)\geqq\beta(M).$$

例えば単位円$S^1$のとき$\mu(S^1)=\beta(S^1)=2$，$E^3$の曲面$M^2$のとき$\mu(M^2)=\beta(M^2)=4-\chi(M^2)$である．

はめこみ　$M\xrightarrow{f}E^N$

は$\tau(f)=\mu(M)$のとき tight であるという(N. H. Kuiper, Colloque de Géométrie Différentielle Globale, Bruxelles, 1958, 75–87 および S. Kobayashi-K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vol. II, 1969 では minimal immersion とよんでいる．また convex immersion とよぶこともある)．$S^1$は$E^2$に tight immersion をもつ．それは任意の閉曲線に対しては Fenchel の定理により，$\int|\rho||ds|\geqq 2\pi$で等号が成立するのはこの曲線が$E^2$の凸領域の境界すなわち凸閉曲線のときに限るからである．また$E^3$の閉曲面$M^2$のとき$M^2\xrightarrow{f}E^3$が tight immersion であるとすれば

$$\frac{1}{2\pi}\int|K||d\sigma| = 4-\chi(M^2)$$

が成立する．したがって任意の線形関数$z: E^3\to\boldsymbol{R}$に対して関数$z\circ f$は$4-\chi(M^2)$個の非退化臨界点をもつことがわかる．

§3. そこで次ような問題が考えられる.

**問題 1.** $M^n$ が与えられたとき tight immersion $f: M^n \to E^N$ が存在するか.

**問題 2.** もしあるとすれば，それを如何ように定めるか.

これらの問題についての結果を次に述べよう.

[I] $E^3$ の閉曲面 $M$ に対しては次の命題は互いに同値である.

1) $f: M \to E^3$ は tight immersion である.

2) $E^3$ の任意の平面は $f(M)$ を高々2つの部分に分ける.

3) $E^3$ 上のほとんどすべての線形関数を $M$ 上に制限すれば，$4-\chi(M)$ 個の非退化臨界点をもつ.

[II] a) 向きづけ可能な閉曲面，Euler 特性数が $\chi(M) \leqq -2$ なる向きづけ可能でない閉曲面は何れも3次元ユークリッド空間 $E^3$ に tight immersion できる. (N. H. Kuiper, Comment. Math. Helv., **35** (1961), 85–92).

b) 実射影平面，Klein 管 (Klein Bottle) は $E^3$ に tight immersion できない. (N. H. Kuiper, ibid.)

c) Klein 管と輪環面との連結和 (connected sum) $M$ は $\chi(M)=-2$ で向きづけ可能でないので，$E^3$ に tight immersion できる.

d) 実射影平面 $P^2$ は $\chi(P^2)=1$ で $E^3$ には tight immersion できないが，$E^5$ には tight immersion できる. この tight immersion が具体的に与えられている. (N. H. Kuiper).

[III] a) compact homogeneous Kähler 多様体は十分高い次元のユークリッド空間に tight immersion できる. (S. Kobayashi, Tohoku Math. J., **19** (1967), 63–74).

b) $M^{18}$ を $S^9$ 上の $S^9$-bundle とすれば，$M^{18}$ はどんなユークリッド空間にも tight immersion できない.

[IV] a) $\chi(M)=-1$ なる閉曲面がユークリッド空間に tight immersion できるか否かの問題は未解決であり，また高次元のコンパクト多様体についても多くの研究がなされている. tight immersion をもつということは稀な性質のように思われる.

[V] 区分的線形多様体 (P. L. Manifold) の tight immersion の問題は T. F. Banchoff の研究がある.

(村主恒郎記)

## M. Mahowald 教授講演記録

### On double suspension homomorphism

(1973年4月19日　於京都大学)

球面のホモトピー群の2成分における EHP 列は，Kan とその周辺の人々によって，unstable な Adams スペクトル列の言葉で書けることが知られている. $S^n$ の unstable な Adams スペクトル列 $E_r(S^n)$ において，微分加群 $E_1(S^n)=(\Lambda(n-1), d)$ を考えると，$\Lambda(n-1) \subset \Lambda(n)$ で，$\Lambda = \bigcup \Lambda(n)$ は有階代数かつ，$H(\Lambda; d) \cong \mathrm{Ext}_A^{**}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)$ である. $\Lambda$ は $\lambda_i \in \Lambda^{1,i+1}$ で生成され，その構造は次のように与えられる.

**命題.** $I=(i_1, \cdots, i_q)$ を自然数の列とする時，$\lambda_I = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_q}$ と書く. この時 $\Lambda$ は $\boldsymbol{Z}_2$-加群としては，$\{\lambda_I;\ I=(i_1, \cdots, i_q),\ 2i_j > i_{j+1}\}$ なる basis を持つ. また

$$d\lambda_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} \lambda_{n-1} \lambda_{i-1}.$$

また，$\Lambda(n) \subset \Lambda$ は，$i_1 \leq n$ なる admissible base $\lambda_I$ で生成された部分加群である. さて double suspension を考えるために，ファイバー空間 $W_n \to S^{2n-1} \to \Omega^2 S^{2n+1}$ を考える. この時，対応する $E_1$ 項の完全列は，$0 \to \Lambda(2n-2) \to \Lambda(2n) \to \kappa_2 \Lambda(4n) \oplus \kappa_1 \Lambda(4n-2) \to 0$ となる. ただし，$\kappa_1, \kappa_2$ はおのおの degree を $(1, 2)$, $(1, 3)$ だけ shift する作用素を表わす. したがって

**命題.** $E_2(W_n) \cong H(\kappa_2 \Lambda(4n) \oplus \kappa_1 \Lambda(4n-2), d)$.

**定理.** 準同型写像 $f_n$; $E_2^{s,t}(W_n) \to E_2^{s,t}(W_{n+1})$ が存在し，$6s > t+20-4n$ の時，$f_n$ は同型である.

**命題.** $\Lambda(W_n) = \kappa_2 \Lambda(4n) \oplus \kappa_1 \Lambda(4n-2)$ における微分 $d$ は次式で与えられる.

$$d(\kappa_2 \lambda_I \oplus \kappa_1 \lambda_J) = \kappa_2 d\lambda_I \oplus \kappa_1 (\lambda_0 \lambda_I + d\lambda_J + a)$$

ただし，$\lambda_I \in \Lambda(4n-1)$ の時 $a=0$，$\lambda_I = \lambda_{4n} \lambda_{I'}$ の時 $a=(d\lambda_{4n+1}) \cdot \lambda_{I'}$ で与えられる.

この命題により上の $f_n$ は $\Lambda(W_n)$ から $\Lambda(W_{n+1})$ への chain map として次のように定義される.

$$f_n(\kappa_2 \lambda_I \oplus \kappa_1 \lambda_J) = \kappa_2 \lambda_I \oplus \kappa_1 (\lambda_J + a).$$

さて $f_n$ の上の定義は，純代数的であり，これが geometric に定義されることが望ましい. 今，$g$ を次の合成写像とする

$$g: \Omega^2 S^{4n+1} \xrightarrow{H} \Omega^2 S^{8n+1} \xrightarrow{\Sigma^2} \Omega^4 S^{8n+3} \xrightarrow{P} \Omega^2 S^{4n+1}$$

ただし，$H$ は Hopf invariant, $\Sigma^2$ は double suspension, $P$ は Whitehead product から導かれた写像である. この時，$f_n$ が geometric に定義されるには，次の予想が成立すればよい.

**予想.** (1) $g + \Omega^2(2\iota): \Omega^2 S^{4n+1} \to \Omega^2 S^{4n+1}$ は $\Omega^2 S^{4n+1} \to S^{4n-1} \subset \Omega^2 S^{4n+1}$ に lift できる.

(2) 上の lift $\bar{g}: \Omega^2 S^{4n+1} \to S^{4n-1}$ のファイバーは $W_n$ である.

なお，定理の証明は代数的であるが，計算が複雑でよく follow できませんでした.

(西田吾郎記)

## J. N. Mather 教授講演記録

### Haefliger's classifying space.

(1973年4月5日　於立教大学)

Harvard 大学の J. N. Mather 教授は多様体論国際会議に参加のため来日され，春の学会で特別講演された. 講演内容は最近めざましく発展しつつある foliation の分類空間に関するもので，彼自身の研究と，さらにそれを一般化した W. Thurston 氏の結果の報告であった.

以下はその概略である．

**定義**. $\Gamma$ を topological groupoid とする．位相空間 $X$ 上の $\Gamma$-構造とは $X$ の開集合の上で定義された $\Gamma$ に値をもつ1-コサイクルの同値類のことである．すなわち $X$ 上の $\Gamma$-構造は，$\{U_i\}$ を $X$ の開被覆とすると，対 $\{U_i, \gamma_{ij}\}$ で，$\gamma_{ij}: U_i \cap U_j \to \Gamma$ が連続かつ，$U_i \cap U_j \cap U_k$ 上で $\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ をみたすもので代表される．

**$\boldsymbol{\Gamma}$ の例**. $\Gamma_q^r$ を $\boldsymbol{R}^q$ の $C^r$-級微分同相写像の germ からなる groupoid とする．この時 $\Gamma_q^r$ の units 全体は $\boldsymbol{R}^q$ に同一視され，sheaf topology によって $\Gamma_q^r$ は topological groupoid になる．

$\Gamma(X)$ で $X$ 上の $\Gamma$-構造全体の集合を表わす．$X$ 上の $\Gamma$-構造 $\omega_0, \omega_1$ は，$X \times I$ 上の $\Gamma$-構造 $\Omega$ で $\Omega | X \times \{0\} = \omega_0$ $\Omega | X \times \{1\} = \omega_1$ の時，ホモトープであるといい，$X$ 上の $\Gamma$-構造のホモトピー類を $\bar{\Gamma}(X)$ で表わす．$\bar{\Gamma}(\ )$ は，contravariant functor である．

**定理**(Haefliger). Functor $\bar{\Gamma}$ は表現可能である．すなわち，ある位相空間 $B\Gamma$ が存在して，$\bar{\Gamma}(X)$ と $[X, B\Gamma]$ に自然な全単射がある．

$\Gamma_q^r (r \geqq 1)$ の元 $f$ に対して，$df(x)$ (点 $x$ での $f$ の微分) を対応させて，写像 $\nu: \Gamma_q^r \to GL(q, R)$ を定義する．$\nu$ のホモトピー論的ファイバーを $B\bar{\Gamma}_q^r$ とかく．

**定義**. $G$ を位相群とする．$\hat{G}$ で $G$ に discrete topology をいれた群を表わす．恒等写像 $\hat{G} \to G$ のホモトピー論的ファイバーを $\bar{G}$ とする．$\bar{G}$ は $G$ の道 $\gamma: [0,1] \to G$ で $\gamma(0) = e$ なるもの全体に，$\bar{G} \ni \gamma \mapsto \gamma(1) \in \hat{G}$ を連続にする最弱位相をいれた空間とみなせる．

**定理**(Thurston). $G_q^r$ を $R^q$ の $C^r$-級$(r \geqq 0)$微分同相写像でコンパクトな台をもつもの全体のつくる群に $C^r$-位相をいれたものとする．この時，$B\bar{G}_q^r$ から $\Omega^q B\bar{\Gamma}_q^r$ への連続写像で，整係数ホモロジー群の同型写像をひきおこすものが存在する．ただし $\Omega^q(B\bar{\Gamma}_q^r)$ は $B\bar{\Gamma}_q^r$ の $q$-次の loop space である．

**系**. $B\bar{\Gamma}_q^0$ は contractible である．また $\overline{B\Gamma_q^\infty}$ は $(q+1)$-連結である．

**例**($B\bar{G}$ の Haefliger's Model). $H$ を位相空間 $B$ に作用している群とする．この時 groupoid $\Gamma_{H.B}$ を次のように定義する．$\Gamma_{H.B} = \{(h, x);\ h \in H,\ x \in B\}$ $\Gamma_{H.B}$ の積は，$x = h'x'$ の時に $(h, x) \cdot (h', x') = (hh', x')$ と定義する．$B\Gamma_{H.B}$ は universal $H$-bundle に同伴する $B$ をファイバーとする bundle であるが，特に $H = \hat{G}$, $B = G$ ととると $B\Gamma_{\hat{G}.G}$ は $B\bar{G}$ に等しい．

このあと，上の定理の証明の outline が説明された．それによると証明は第一段階．Groupoid $\Lambda_q^r$ の構成：$Z$ を $R^{q-1}$ の $R^q$ への $C^r$-級 imbedding でコンパクト集合の外では $R^{q-1} \ni x \mapsto (x, t_0) \in R^{q-1} \times R = R^q$ の形のもの全体に $C^r$-位相をいれたものとする．Groupoid $\Lambda_q^r$ は $Z$ の局所同相写像の germ のつくる groupoid に sheaf topology をいれたものとする．第二段階．$B\Lambda_q^r$ と $\Omega^{q-1} B\Gamma_q^r$ がホモトピー同値であることの証明．第三段階．$BB\bar{G}_q^r$ の構成と整係数ホモロジーの同型をひきおこす写像 $B\bar{G}_q^r \to \Omega(BB\bar{G}_q^r)$ の存在の証明．第四段階．$B\Lambda_q^r$ と $BB\bar{G}_q^r$ がホモトピー同値であることの証明．と四段階にわかれる．以上のことより直ちに $H_*(B\bar{G}_q^r, Z) \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega^q B\bar{\Gamma}_q^r, Z)$ がわかる．

なお，この講演内容は国際会議の時の教授のアブストラクトに沿ったものであり詳しくはそちらを参照されるとよい．　(水谷忠良記)

## F. Raymond 教授講演記録

### Holomorphic Seifert Fibering

(1973年4月19日　於名古屋大学)

この講演は，Conner-Raymond による一連の仕事を，[4] を中心に述べたものである．Seifert Fibering は，1933年 Seifert [9] によって，3次元多様体について導入されたが，Holmann [5], [6] によって一般化され，その基礎的研究がなされた．Conner-Raymond は [1] において，closed aspherical manifold 上の effective な toral group action の構成について考察したが，このとき Seifert Fibering があらわれた．彼等は [4] において，[1] の定理(8.1)(後述)の holomorphic な場合への拡張を試みた．これには Kodaira [7] による operator を持つ sheaf を係数とする群のコホモロジーが重要な役割りを果たす．以下その内容を要約することにする．

$M$, $V$ を解析空間とし，$f: M \to V$ を $V$ の上への holomorphic map とする．いま，$v \in V$ に対して complex $k$-torus $T$ の complex automorphism の作る有限群 $F_v$ が定まり，$f^{-1}(v) = T/F_v$ となるものとする．このような $V$ を base とする typical fiber が $T$ となる holomorphic Seifert fibering を分類することは大きな問題である．

上の例として，次のものがある．

(1) $V$ が一点からなるとき，$M$ は complex flat manifold である．

(2) smooth category とか continuous category で考える．例えば，$W$ を contractible manifold，$N$ をその diffeomorphism の作る properly discontinuous group で，右から $W$ に作用するものとする．いま $V = W/N$ がコンパクトとする．$N$ の torsionless central extension $0 \to Z^k \to \pi \to N \to 1$ に対し，closed aspherical manifold $M$ と $k$-torus $T$ の $M$ への作用が定まり，$\pi_1(M) = \pi$, $M/T = V$ となる．これが [1] の(8.1)である．

(3) Kodaira の elliptic surface の中には，上の条件をみたすものが沢山ある．すなわち，$M$ を compact complex 2-manifold, $V$ を non-singular algebraic curve, $f: M \to V$ を $V$ の上への holomorphic map で $f^{-1}(v)$, $v \in V$ が一般的に elliptic curve (すなわち complex 1-torus) となる場合である．

以下一般に，complex $k$-torus $T$ が $M$ に左から作用

する場合を考える．そして $M/T=V$ とする．このとき，この作用が homologically injective, injective, locally injective という概念が定義されるが，homologically injective→injective→locally injective が成立する．そして homologically injective なら [2] の Fibering Theorem (4.2) が成立し，locally injective なら [4] の定理(7.3)が成立する．

以上の応用例として，次の3つを述べた．

(1)　elliptic surface の構成法．

(2)　$V=CP_1$ 上の elliptic surface $M$ には，3個より多くの分岐点が存在する．そして，すべての singularities は multiple fiber である．

(3)　上のような2つの elliptic surfaces $M_1, M_2$ に対して，次の3つの条件は同値である．

(a)　$\pi_1(M_1)\cong\pi_1(M_2)$.

(b)　$M_1$ と $M_2$ は diffeomorphic.

(c)　$M_1$ と $M_2$ の間に fiber を保つ diffeomorphism が存在する．

次に，この理論で，$M$ が Kähler のとき，complex torus の holomorphic action は homologically injective となることを述べ，これが Matsushima の equivariant deformation of complex structures と関係があることを述べた．

最後に Kodaira のコホモロジーを用いる以上の構成法を [4] にしたがってスケッチした．さらに Kähler manifolds の集合が非常に薄い集合であることを述べた．

## 文　　献


[1] P. Conner-F. Raymond, Actions of compact Lie groups on aspherical manifolds, Topology of Manifolds, Markham Pub. Co., (1969), 227–264.

[2] P. Conner-F. Raymond, Injective actions of toral groups, Topology, **10** (1971), 283–296.

[3] P. Conner-F. Raymond, Injective Operations of the Toral Groups II, Proc. of the 2nd Conf. on Compact Transf. Groups, Part II, Lecture Notes in Math. No. 299, Springer, (1972), 109–123.

[4] P. Conner-F. Raymond, Holomorphic Seifert Fibering, ibid. 124–204.

[5] H. Holmann, Quotientenräumen Komplexer Mannigfaltigkeiten nach Komplexen Lieschen Automorphismen Gruppen, Math. Ann., **139** (1960), 383–402.

[6] H. Holmann, Seiferten Faserräume, Math. Ann., **157** (1964), 138–166.

[7] K. Kodaira, On compact analytic surfaces III, Ann. of Math., **78** (1963), 1–40.

[8] K. Kodaira, Compact complex analytic surfaces I, Amer. J. Math., **86** (1964), 751–798.

[9] H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta Math., **60** (1933), 147–238.


(白岩謙一記)

## Can we cancel $Z$'s in $Z\times G\cong Z\times H$?

(1973年4月23, 24日　於 大阪大学)

$M_1, M_2$ を可微分閉多様体とする．このとき $S^1$ との直積が微分同相 $S^1\times M_1\cong S^1\times M^2$ であるが，基本群が同型ではない $\pi_1(M_1)\not\cong\pi_1(M_2)$ ということが起り得るかという問題を考える．群論的には表題にあるように $Z\times G\cong Z\times H$ であって，$G\not\cong H$ であるような $G, H$ を見出すことである．さて完全列

$$1\longrightarrow Z\xrightarrow{\times n}Z\xrightarrow{\sigma}Z_n\longrightarrow 1$$

と全射準同型写像 $\nu: N\to Z_n$ を固定しておく，$n$ と素な整数 $m$ に対して，直積 $Z\times N$ の部分群 $K_m$ を

$$K_m=\{(s,\alpha)\,|\,\sigma(s)=m\cdot\nu(\alpha)\}$$

によって定義する．自然な完全列

$$1\longrightarrow Z\xrightarrow{i}K_m\xrightarrow{j}N\longrightarrow 1$$

が $i(s)=(ns, e)$, $j(s,\alpha)=\alpha$ によって与えられる．これは中心拡大であるからコホモロジー群 $H^2(N;\ Z)$ の元を定める．$K_1$ の定めるコホモロジー類を $a$ とすれば，$K_m$ の定めるコホモロジー類は $m\cdot a$ である．次の定理が成り立つ．

**定理 1.** (i) $K_m\cong K_{m+n}$, (ii) $Z\times K_m\cong Z\times K_1$.

**定理 2.** $N$ の中心が単位群であるとき，$K_m\cong K_1$ が成り立つ必要十分条件は，同型写像 $\Phi: N\cong N$ が存在して，$\Phi^*(a)=\pm m\cdot a$ が成り立つことである．

いま $\nu: N\to Z_n$ の核を $\pi$ とし，$N$ は半直積 $\pi\circ Z_n$ に同型であると仮定しよう．すなわち集合として $N=\pi\times Z_n$ であり，$\pi$ の自己同型写像 $T$ で $T^n=1$ となるものが存在して，$(\alpha, \sigma(s))\cdot(\beta, \sigma(t))=(\alpha\cdot T^s(\beta), \sigma(s+t))$ が成り立つ．$n$ と素な整数 $q$ に対して，半直積 $L_q=\pi\circ Z$ を $(\alpha, s)\cdot(\beta, t)=(\alpha\cdot T^{qs}(\beta), s+t)$ によって定義する．このとき，

**定理 3.** (i) $mq\equiv 1 \pmod n$ であれば，$K_m\cong L_q$,

(ii) $Z\times L_q\cong Z\times L_1$.

**定理 4.** $H_1(\pi;\ \boldsymbol{Q})$ が有限生成であって，

$$(I-T_*): H_1(\pi;\ \boldsymbol{Q})\cong H_1(\pi;\ \boldsymbol{Q})$$

が成り立っているとき，$L_q\cong L_1$ が成り立つ必要十分条件は，$\mathrm{Out}\,\pi=\mathrm{Aut}\,\pi/\mathrm{Inn}\,\pi$ において，$T^q$ が $T^{\pm1}$ と共役になることである．

23日の講演において，これらの定理をすべて証明され，さらに次の実例が示された．

**例.** $\pi=Z_{11}$, $n=10$ のとき，$N=\pi\circ Z_{10}$ を

$$Z_{11}\circ Z_{10}=\{x, y\,|\,x^{11}=1,\ y^{10}=1,\ yxy^{-1}=x^2\}$$

によって定義する．このとき

$$L_1=Z_{11}\circ Z=\{x, y\,|\,x^{11}=1,\ yxy^{-1}=x^2\},$$
$$L_3=Z_{11}\circ Z=\{x, y\,|\,x^{11}=1,\ yxy^{-1}=x^8\}$$

となるが，定理3, 4によって，$Z\times L_1\cong Z\times L_3$ であるが $L_1\not\cong L_3$ が成り立つ．

翌24日の講演においては，多様体を具体的に構成した．

可微分閉多様体 $Y$ と，周期 $n$ の微分同相写像 $T: Y$

$\to Y$ を固定しておく．$\lambda=\exp(2\pi i/n)$ とする．$n$ と素な整数 $m$ に対して，直積 $S^1\times Y$ から $(t,y)=(t\lambda^{-m}, Ty)$ によって生成される同値関係によって定義される等化空間を $X(m)$ とする．$X(m)$ は可微分閉多様体である．このとき

**定理 5**. 微分同相 $S^1\times X(1)\cong S^1\times X(m)$ が成り立つ．

証明．$S_1, S_2$ を $S^1$ のコピイ，$Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}$ を $Z_n$ のコピイとし，$T^{(1)}, T^{(2)}$ をそれぞれ $Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}$ の生成元とする．直積 $S_1\times S_2\times Y$ 上の $Z_n^{(1)}\times Z_n^{(2)}$ の作用を

$$T^{(1)}(t_1, t_2, y) = (t_1, t_2\lambda^{-1}, Ty),$$
$$T^{(2)}(t_1, t_2, y) = (t_1\lambda^{-m}, t_2, Ty)$$

によって定義すれば，軌道空間についての微分同相

$$S_1\times S_2\times Y/Z_n^{(1)}\times Z_n^{(2)} = S_1 \underset{Z_n^{(2)}}{\times} (S_2 \underset{Z_n^{(1)}}{\times} Y) = S_2 \underset{Z_n^{(1)}}{\times} (S_1 \underset{Z_n^{(2)}}{\times} Y)$$

が成り立つ．さらに $X(1)\cong S_2 \underset{Z_n^{(1)}}{\times} Y$, $X(m)\cong S_1 \underset{Z_n^{(2)}}{\times} Y$ が成り立つ．さて，$X(1)$ をファイバー，$Z_n^{(2)}$ を構造群とする可微分ファイバー束 $S_1 \underset{Z_n^{(2)}}{\times} X(1)\to S_1/Z_n^{(2)}$ は，構造群が $S^1$ に拡張できて，自明なファイバー束となる．すなわち

$$S^1\times X(1) \cong S_1/Z_n^{(2)}\times X(1) \cong S_1 \underset{Z_n^{(2)}}{\times} X(1) \cong S_1\times S_2\times Y/Z_n^{(1)}\times Z_n^{(2)}$$

が成り立つ．同様に $S^1\times X(m)\cong S_1\times S_2\times Y/Z_n^{(1)}\times Z_n^{(2)}$ が成り立つ．証明終．

次に $Y$ を適当に選んで $\pi_1(X(1))\not\cong\pi_1(X(m))$ となる実例を作ろう．

$G=Z_{11}\circ Z_{25}=\{a, b\,|\,a^{11}=b^{25}=1,\ bab^{-1}=a^3\}$ とする．

$$h(a)=\begin{pmatrix}\lambda & & & & 0\\ & \lambda^3 & & & \\ & & \lambda^9 & & \\ 0 & & & \lambda^{27} & \\ & & & & \lambda^{81}\end{pmatrix},\quad h(b)=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1\\ \zeta & & & & 0\end{pmatrix}$$

によって準同型写像 $h: G\to U(5)$ が定義される．ただし，$\lambda=\exp(2\pi i/11)$, $\zeta=\exp(2\pi i/5)$ とする．$h$ によって $S^9$ 上の $G$ 作用が与えられるが，この $G$ 作用は自由作用であることがわかる．$G$ の正規部分群 $Z_{11}$ による軌道空間を $Y=S^9/Z_{11}$ とすれば，$Y$ 上には $Z_{25}=G/Z_{11}$ が自由に作用する．$Z_{25}$ の生成元を $T$ とし，既述の方法によって，$S^1\times Y$ の等化空間として，$X(1)$, $X(3)$ を構成する．このとき，

$$\pi_1(X(1)) = \{x, y\,|\,x^{11}=1,\ yxy^{-1}=x^3\},$$
$$\pi_1(X(3)) = \{x, y\,|\,x^{11}=1,\ yxy^{-1}=x^9\}$$

となり，定理 4 によって $\pi_1(X(1))\not\cong\pi_1(X(3))$ がわかる．他方定理 5 によって $S^1\times X(1)\cong S^1\times X(3)$ が成り立つ．

(内田伏一記)

## Manifolds with no periodic maps

(1973 年 4 月 25 日　於大阪市立大学)

$X$ を aspherical 閉多様体とする．すなわち $X$ の普遍被覆空間 $X^*$ が可縮であるものとする．このとき $X\simeq K(\pi_1(X), 1)$ となる．さて，$X$ のホモトピー同値写像のホモトピー類全体の作る乗法群を $\varepsilon(X)$，基点 $x\in X$ を保つホモトピー同値写像のホモトピー類全体の作る乗法群を $\varepsilon(X,x)$ によって表わすとき，障害理論によって

$$\varepsilon(X,x) = \mathrm{Aut}\,(\pi_1(X,x))$$
$$\varepsilon(X) = \mathrm{Out}\,(\pi_1(X,x)) = \mathrm{Aut}\,(\pi_1(X,x))/\mathrm{Inn}\,(\pi_1(X,x))$$

が成り立つ．

$X$ 上に有限群 $G$ が効果的に作用し，不動点 $x$ をもつとする．各元 $g\in G$ に対して，$g_*: \pi_1(X,x)\cong\pi_1(X,x)$ を対応させることによって，準同型写像 $\Theta: G\to \mathrm{Aut}(\pi_1(X,x))$ を得る．Smith 理論によって次の定理が成り立つ．

**定理 1**. $X$ が aspherical 閉多様体であれば，$\Theta$ は単射である．

**系**. $X$ が aspherical 閉多様体であって，$\mathrm{Aut}\,(\pi_1(X,x))$ が有限位数の元を単位元以外にもたないものとすれば，$X$ 上の有限群の効果的作用は自由作用に限る．

次に，$X$ 上に有限群 $G$ が効果的に作用し，必ずしも不動点をもつとは限らない場合について考える．準同型写像 $\Theta$ の定義を修正して，自然な準同型写像 $\Psi: G\to \mathrm{Out}\,(\pi_1(X,x))$ が定義できる．このとき次の定理が成り立つ．

**定理**(A. Borel). $X$ が aspherical 閉多様体で，$\pi_1(X)$ の中心が単位群であれば，$\Psi$ は単射である．

この Borel の定理と定理 1 によって，次の条件をみたす 4 次元 aspherical 閉多様体 $M(k)$ がすべての整数 $k>2$ に対して構成できる．

(i) 有限群 $G$ が $M(k)$ 上に効果的に作用すれば，$|G|\leqslant 2k$ が成り立ち，

(ii) さらに $|G|$ が奇数であれば，$G$ 作用は自由作用に限られる．

(iii) $M(k)$ 上には周期 $k$ の自由作用がある．

さて，$Y$ を aspherical 閉多様体，$\varphi: Y\to Y$ を同相写像とし，$X$ を $\varphi$ の写像トーラスとする．すなわち

$$X = Y\times[0,1]/(y,0)\sim(\varphi(y),1).$$

このとき，$\pi_1(X)=\pi_1(Y)\underset{\varphi_*}{\circ}Z$ が成り立つ．$\pi$ を群とし，$\Phi: \pi\to\pi$ を同型写像とすれば，半直積 $L=\pi\underset{\Phi}{\circ}Z$ が

$$(\alpha, m)\cdot(\beta, n) = (\alpha\cdot\Phi^m(\beta), m+n)$$

によって定義される．$\Phi$ によって生成される $\mathrm{Out}\,\pi$ の部分群を $(\Phi)$，その正規化群を $N(\Phi)$ で表わす．$\pi$ の中心を $K$ とするとき，次の定理が成り立つ．

**定理 2**. (i) $(\Phi)$ が無限巡回群であり，(ii) $(I-\Phi): K\to K$ が単射であり，(iii) $I-\Phi_*: H_1(\pi;\boldsymbol{Q})\cong H_1(\pi;\boldsymbol{Q})$ が成り立つとき，次の列は完全列である．

$$1\to K/(I-\Phi)K\to \mathrm{Out}\,(L)\to N(\Phi)/(\Phi)\to 1.$$

さらに，$\pi$ がアーベル群であれば，分解する．

**例**. $Y=T^2$ を 2 次元トーラスとする．$\varphi: T^2\to T^2$

を $\varphi(z_1, z_2)=(z_2, z_1z_2)$ によって定義する．ただし $T^2=S^1\times S^1$ とみて，$z_1, z_2$ は絶対値1の複素数とする．$\varphi$ の写像トーラスを $X$ とすれば，$\pi_1(X)$ の中心は単位群で $\mathrm{Out}(\pi_1(X))=Z_2$ である．

講演時間の都合で，表題にあるような多様体の構成については述べられなかったが，参考文献をあげておく．

### 文　献


[1] P. Conner–F. Raymond, Manifolds with few periodic homeomorphisms.

[2] P. Conner–F. Raymond–J. Weinberger, Manifolds with no periodic maps.

いずれも，Proc. 2-nd Conf. on Compact Transf. Groups, Vol. II, Springer Lecture Notes 299 (1972) に記載されている．


(内田伏一記)

## Actions of groups on $K(\pi, 1)$-manifolds

(1973年4月29日　於北海道大学)

$M^n$ を $n$ 次元 closed aspherical manifold (すなわち，$K(\pi, 1)$-manifold) とし，その上に compact connected Lie 群 $G$ が effective に作用している場合，(i) $M$ の Euler 標数 $\chi(M)=0$，(ii) $G$ は torus $T^k$, $k\leqq(\pi_1(M)$ の centre の階数)．(iii) isotropy 群はすべて有限となる．

$(T^k, X)$ を位相空間 $X$ 上の $T^k$-作用で，自然な準同形 $e_*^x : \pi_1(T^k, *)\to(X, x)$ が monomorphism となるものとする．$X=M^n$ の場合，このことは成立する．$H=\mathrm{Im}(e_*^x)\subset\pi_1(X, x)$ とおく．これは，$\pi_1(X, x)$ の centre に含まれる．$X_H$ を $H$ に対応する $X$ の covering space とする．path 空間の演算により，$T^k$ の作用は，$X_H$ に lift され，また $X$ は群 $N=\pi_1(X, x)/H$ の右からの作用をもち，$T^k, N$ の作用空間 $(T^k, X_H, N)$ が得られる．$T^k$ の作用と $N$ の作用は可換である．このことは，$X_H$ の作用は，実際には split して，$(T^k, X_H, N)=(T^k, T^k\times X_H/T^k, N)$ と表わせることを意味する．$X_H/T^k$ は simply connected な空間で，これを $W$ とかく．したがって，作用 $(T^k, X)$ に作用 $(W, N)$ が対応し，$W/N=X/T^k$ となる．この例は，Moebius band の境界の曲線に沿う，$S^1$-作用によって得られる，Klein bottle 上の $S^1$-作用にみられる．

$W$ を contractible manifold, $N$ を discrete 群で，$(W, N)$ を，$W$ 上の $N$ の properly discontinuous な作用とする．$T^k$ は，$T^k\times W$ の上に，$t(t', w)=(tt', w)$ によって作用するが，この $T^k$ の作用と可換な作用 $(T^k\times W, N)$ で，projection map $(T^k\times W, N)\to(W, N)$ が $N$-equivariant となるようなものを考える．このような作用は，$(tw)\alpha=(m(t, w, \alpha), w\alpha)$ と表わされる．しかるに，$m(t, w, \alpha)=tm(1, w, \alpha)$ だから，写像 $m : W\times N\to T^k$ で，$m(w, \alpha)m(w\alpha, \beta)=m(w, \alpha\beta)$ となるものだけを考えればよい．$m$ は写像 $\tilde{m} : N\to\mathrm{MAPS}(W, T^k)$ を引きおこす．$\mathrm{MAPS}(W, T^k)$ は自然な $N$-module の構造をもち，$\tilde{m}(\alpha\beta)=\tilde{m}(\alpha)\cdot\alpha\tilde{m}(\beta)$ となるから，$\tilde{m}\in Z^1(N;\ \mathrm{MAPS}(W, T^k))$ とみなされる．$\tilde{m}_1, \tilde{m}_2$ の定める作用に関して，equivariant homeomorphism $(T^k, T^k\times W, N)_2\to(T^k, T^k\times W, N)_1$ が存在するための必要十分条件は，$\tilde{m}_1\sim\tilde{m}_2$ だから，コホモロジー群 $H^1(N;\ \mathrm{MAPS}(W, T^k))$ を扱えば十分である．$W/N$ が compact である場合，短完全列 $0\to\mathrm{MAPS}(W, Z^k)\to\mathrm{MAPS}(W, R^k)\to\mathrm{MAPS}(W, T^k)\to 0$ に対応するコホモロジー完全列の連結準同形は同形 $H^1(N;\ \mathrm{MAPS}(W, T^k))\xrightarrow{\simeq}H^2(N; Z^k)$ となる．$w\in W$ を固定，$N_w$ を $w$ の isotropy group とするとき．$\tilde{m}$ は準同形，$N_w\to\mathrm{MAPS}(w, T^k)\cong T^k$ を定め，これは，準同形 $i^* : H^1(N; \mathrm{MAPS}(W, T^k))\to H^1(N_w; T^k)\cong\mathrm{Hom}(N_w, T^k)$ を引きおこす．$i^*$ をしらべることによって，次の結果が得られる．

**定理 1.** $a\in H^2(N; Z^k)$ が，coverings $T^k\times W\to(T^k\times W)/N=M$ に対応するための必要十分条件は，$a$ に $Z^k$ の $N$ による central group extension $0\to\pi_1(T^k)\to\pi\to N\to 0$ が対応し，$\pi$ が torsion free となることである．

上に述べた作用 $(W, N)$ の中，$N$-equivariantly homeomorphic なものだけを考えることにする．$a, b\in H^2(N; Z^k)$ に対しそれぞれ $Z^k$ の $N$ による torsion free, central group extensions が対応するものとする．

**定理 2.** $a, b$ に対応して，$(W, N)$ を用いて構成される effective な $T^k$-作用の多様体をそれぞれ $M, N$ とするとき，$(T^k, M)$, $(T^k, N)$ の間に，$T^k$-equivariant homeomorphism (diffeomorphism) が存在するための必要十分条件は，$a=b$．

$T^k$ を complex torus, $N$ を上半平面上の Fuchsian group にとるとき，複素構造をもつ，実4次元多様体を生ずる．これは，小平 elliptic surface といわれるものとなる．上の結果は，このような複素曲面の holomorphic equivariant classification を与える．しかも，このような二つの多様体，$M_1^4, M_2^4$ が homeomorphic なるための必要十分条件は，$\pi_1(M_1^4)\cong\pi_1(M_2^4)$ となる．

主要定理に関しては，P. E. Conner and F. Raymond, Actions of compact Lie groups on aspherical manifolds, Topology of Manifolds, Ed. J. C. Contrel & C. H. Edwards Jr. Markham, Chicago, 1969, 227-264 を参照されたい．

(鈴木治夫記)

## S. Smale 教授講演記録

### Questions in Global Analysis from Economics

(1973年4月19日　於名古屋大学)

この講演で，Smale は19世紀の経済学者 Pareto の理論を一般化して，大域的解析学の問題として定式化し，さらに，Morse 理論の一般化と関連させる方法について述べた．主として，[2], [3], [4] に含まれていることの紹介である．以下簡単にその内容を記述する．

(1) $R$ を実数空間とし，$l$ 個の商品の状態全体のなす商品空間を $P=\{(x^1,\cdots,x^l)\in R^l|x^i>0\}$ とする．ここで，$x^i$ は $i$ 番目の商品の量である．いま $m$ 人の消費者がいるとして，$P$ の $m$ 個の直積 $P^m=\{x=(x_1,\cdots,x_m)|x_i\in P\}$ を考える．$x_i$ は $i$ 番目の消費者の商品所有の状態を表わす．$\omega\in P$ を固定して，$W=\{x\in P^m|\sum_{i=1}^m x_i=\omega\}$ とする．これは，生産がない場合，すなわち，商品の総計が一定という状況のもとでの，各人の商品保有の状態全体のなす空間である．$u_i: P\to R$ を $i$ 番目の消費者の効用関数とする．すなわち $u_i(x)<u_i(x')$ のとき，$i$ 番目の消費者については，$x$ より $x'$ の方がよい状態である．いま，$W\ni x=(x_1,\cdots,x_m)\mapsto u_i(x_i)\in R$ によって定まる関数も同じ $u_i$ で表わす．そして $u: W\to R^m$ を $u=(u_1,\cdots,u_m)$ とする．

(2) 以上を一般化して，$W$ を微分可能多様体，$u: W\to R^m$ を $C^\infty$ 級写像，$u=(u_1,\cdots,u_m)$, $\dim W\geqq m$ とする．このとき，$x\in W$ が古典的 Pareto 点とは‘$u_i(y)\geqq u_i(x)$, $i=1,\cdots,m$, かつある $k$ に対して $u_k(y)>u_k(x)$ となるような $y\in W$ は存在しない’をみたすものをいう．すなわち，消費者全員に対して，より良い点は存在しないということである．$m=1$ のとき，これは最大ということである．

$I$ を実数の区間とし，$\varphi: I\to W$ が微分可能で，次の条件をみたすとき，admissible curve という．‘$\frac{d}{dt}(u_i(\varphi(t)))>0$, $i=1,\cdots,m$’．$x\in W$ を通る admissible な道が存在しないような点全体の集合 $\mathcal{O}$ を critical Pareto set という．すると明らかに，古典的な Pareto 点は $\mathcal{O}$ に属す．そして，$m=1$ のときは，停留点となる．

次に $x\in\mathcal{O}$ が安定(または $x\in\mathcal{O}_S$)とは，$x$ の任意の近傍 $V(x)$ に対して，適当な $x$ の近傍 $W(x)$ が存在して，$W(x)$ から出発する admissible curve は，すべて $V(x)$ にとどまるときをいう．これは，極大の概念の拡張であって，古典的な Pareto 点が安定であることもすぐわかる．

(3) $x\in\mathcal{O}$ とか，$x\in\mathcal{O}_S$ のための条件について言及し，具体例として[2]の例2, 3について解説し，最後に[4]の結果，すなわち，コンパクト多様体 $W$ と $u: W\to R^2$ に関する Morse 理論の一般化との関連について，[2]の例4を用いて説明した．

## 文　　献


[1] G. Debreu, Theory of Value, John Wiley, New York, 1959.

[2] S. Smale, Global Analysis and Economics I, Salvador Sympo. on Dynamical Systems (1971), Academic Press, New York, to appear.

[3] S. Smale, Optimizing Several Functions, Proc. of International Sympo. on Manifold, Tokyo (1973), to appear.

[4] S. Wan, Thesis, Univ. of California, Berkeley 1973.


(白岩謙一記)

## Periodic attractor in cellular biology

(1973年4月20日　於京都大学)

2 つの全く同質の細胞が互にはなれて独立に存在する場合にはそれぞれ全くおなじ定常状態をしめし，それが近よってお互いの間にある物質の交流(拡散)がはじまるとこれによつて定常状態が破れ，新しい不安定性が生じることを，連立線形の常微分方程式系の話として説明したのは Turing であって，1952年の‘Physico-chemical basis of Morphogensis’Cambridge Phil. である．彼は上に述べた不安定性が形態形成の基礎であるという主張をしたのである．ここでは非線型の問題として，同じような問題を次のように考察しよう．1つの細胞の状態は $k$ 個の Enzyme(酵素)の濃度 $P$ であらわされるものとする．$P\subset \boldsymbol{R}^k$ かつ $P=\{x\in\boldsymbol{R}^k, x^i\geqslant 0\}$ である．さらに，このような細胞が $N$ 個，あつまった場合の状態は $x\in(P^N)$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$, $x_i\in P$ であらわされるとする．そして空間 $\mathcal{S}=(P^N)$ での常微分方程式系：

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}=\mathcal{X}(x)$$

を考察する．この $\mathcal{X}(x)$ の形を後にさだめるが，先ず個々の細胞について方程式を立てておこう．1つの細胞については

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt}=\mathcal{R}(x)\quad (\text{ただし } x \text{ は } k\text{-vector})$$

であって，$\mathcal{R}$ は $P$ から $\boldsymbol{R}^k$ への map であり，この解 $\varphi_t(x)\in P$ でありかつ $\varphi_0(x)=x\in P$ である．もしこの解が常微分方程式論の言葉での globally asymptotic stable であればわれわれはこれを‘死んだ’細胞の状態だと言うことにする．さて $N$ 個の細胞が接し，その enzymes の間に diffusion が存在するとき，

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\mathcal{R}(x_i)+\sum_{j=1}^N \mu_{ij}(x_j-x_i)\qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

という Turing のシステムが考えられる．ただし $\mu_{ij}$ は $\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^k$ への map としての定数対角行列である．このような連立方程式系にもし，‘唯一の周期解が存在し，かつほとんどすべての軌道はこの周期解に $t\to t\infty$ で収束する(構造安定)’ならばそのとき(3)を‘生きている’力学系とよぶことにする．

そのとき次のような結論があたえられた．

$k=4$ のとき，$\mathcal{R}$ が存在して，$\mu_{ij}$ を適当に定めるならば，

(a) 個々の細胞で $\frac{dz}{dt}=\mathcal{R}(z)$ は‘死んでいる’

(b) 上の(3)の方程式は‘生きている’力学系である．

(山口昌哉記)

## D. Sullivan 教授講演記録

### A new result in the topology of Kähler spaces

(1973年4月19日　於東北大学)

M. I. T. Sullivan 教授は1973年4月19日に東北大学において，上記題目について，興味のある講演をされた．多様体の有理型ホモトピー型に関する非常に基本的で自然な理論の展開で，彼自身のいうように，なぜ今となってはじめてこのような理論が現われたのか，奇異の感がしないでもない(逆説的意味をこめて)．

本講演では，特に基本群に限って話をし，それゆえ，国際会議での一般論よりも，明解であった．以下にその概要を記す．

多様体には幾何的な基本群 $\pi_1{}^{\mathrm{geo}}$ (ふつうの基本群) の他に解析的，あるいは de Rham の基本群 $\pi_1{}^{\mathrm{analytic}}$ というものが定義され，例えば多様体が Kähler の時には，$\pi_1{}^{\mathrm{anal}}$ は非常に特別な形を持つ．$\pi_1{}^{\mathrm{anal}}$ は，実巾零リー群の塔 $\{\cdots\to N_k\to N_{k-1}\to\cdots\to N_1=H_1(M,\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^n\}$ であらわされる．$\pi_1{}^{\mathrm{geo}}$ から周期(非可換)をとるという操作による $N_k$ への自然な写像が存在する．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \pi_1^{\mathrm{geo}} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
\Big\{\cdots \arrow[r] & N_k \arrow[r] & N_{k-1} \arrow[rr, dashed] & & N_2 \arrow[r] & N_1 = H_1(M,\boldsymbol{R})\Big\} = \pi_1^{\mathrm{anal}}
\end{tikzcd}
$$

この周期写像の $N_k$ への像は $\pi_1/[\underbrace{\pi_1,\pi_1,\cdots,\pi_1}_{k\text{ 重可換子}}]/\mathrm{torsion}$ と一致する．もちろん $N_1$ への写像は，サイクルに沿う積分として得られ，$N_k$ への写像も，そのホモロジー以上に，ホモトピー類による積分として与えられる．古典的な場合と同様にその cokernel 空間として，(非可換)ヤコビ多様体が得られる．それは格子のバンドルとなる．基点を動かすことにより，円環体が連続に動くからである．

$\pi_1{}^{\mathrm{anal}}$ はくり返して，外積代数を構成することによって定義される．今，$a_M$ を $M$ 上の $C^\infty$-型式のなす多元環とする．まず，de Rham の定理より，$H_1(M,\boldsymbol{R})=H^1(M,\boldsymbol{R})$ は，{閉1型式}/{完全1型式} と同型である．$(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ を，$H^1(M,\boldsymbol{R})$ の底を与える閉1次型式とする．$(x_1,\cdots,x_n)$ をとり，外積代数 $\Lambda(x_1,\cdots,x_n)$ をつくり，$dx_j=0$ とする．$\Lambda(x\ ,\cdots,x_n)$ より $a_M$ への写像 $\rho_1$ が $\rho_1(x_j)=\omega_j$ と定義することにより得られる．次に，この写像 $\rho_1$ の2次元のコホモロジーの核を考える．今，$\sum a_{ij}^l x_i\cap x_j$ を核の底とする．$l=1,2,\cdots,d$．その時新しい外積代数，$\Lambda(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_d)$ をつくり，$dy_l=\sum a_{ij}^l x_i\cap x_j$ と定義する．写像 $\rho_2:\Lambda(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_d)\to a_M$ を $\rho_2(y_l)=\eta_l$ となるよう定義する．ここで $\eta_l$ は $d\eta_l=\sum a_{ij}^l\omega_i\cap\omega_j$ の解である．次に第3の構成のため $\rho_2$ の2次元コホモロジーでの核を考える．底を

$$z^k=\sum b_{ij}^k x_i\cap x_j+c_{ij}^k y_i\cap y_j$$

として，新しい外積代数 $\Lambda(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_d,z_1,z_2\cdots)$ を考え，写像 $\rho_3:\Lambda(x,y,z)\to a_M$ を同様に定義する．この操作をくり返すことにより，一つの外積代数 $\Lambda(x_i;y_i;z_i;\cdots)$ が定まる．これが，いわば，$\pi_1{}^{\mathrm{anal}}$ の dual というべきものである．$\Lambda(x_i;y_j)$ に対して，自然に $\boldsymbol{R}^{n+d}$ にリー群の構造が入り $\boldsymbol{R}^{n+d}$ の不変型式の多元環が，$\Lambda(x_i;y_j)$ となる．$(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,d)$．このリー群は巾零となり，それを $N_2$ とする．同様の操作で $\Lambda(x_i,y_j,z_k)$ に対して，$N_3,\cdots$ と定義をして行く．このようにして，$\pi_1{}^{\mathrm{anal}}$ が定義される．

さて，多様体が複素数体上の代数的多様体の場合を考えよう．その時，多様体には $J$ 作用素がある．新しい微分 $d_c$ を $d_c=JdJ^{-1}$ で定義すると，この閉型式を完全型式で割ったコホモロジー $H_{dc}(V)$ は $H_{\mathrm{de\ Rham}}(V)$ に等しい．今，$d_c\omega=0$ となる型式からなる多元環 $a_V^{d_c=0}$ に $d$ で微分を与えた多元環を考える時 $V$ が Kähler なら，それは，$H^*(V)$ に $d=0$ という微分を与えたものと，同型になり，一方，de Rham 多元環 $a_V$ にも等しくなる．したがって de Rham 多元環と $H^*(V)$ という多元環は等しくなり，例えば，次のような定理が成り立つ．

**定理**．複素数体上の代数的多様体の $\pi_1{}^{\mathrm{anal}}$ は，$H^1$，$H^2$ およびカップ積 $H^1\otimes H^1\to H^2$ によって完全に決定される．

(注意．一般には $N_1,N_2$ のみしか定まらない)

その他，いろいろの応用が期待されるであろう．

(佐藤　肇記)

## R. Thom 教授講演記録

### Canonical stratification in jet space

(1973年4月25日　於名古屋大学)

話の内容は jet space にうまい stratification を導入しようとするものであった．

初めに stratification の定義にはじまって，その基本的性質がていねいに述べられた．例えば

**定理** (The first isotopy lemma). $f,g:M^p\to R^n$ 可微分写像かつ stratified set $A\subset R^n$ 上 transversal とする．この時，

1) $f^{-1}(A)$ および $g^{-1}(B)$ は stratified set.

2) 今 $F_t:M^p\to R^n$ なる isotopy で $F_0=f$，$F_1=g$ かつ $F_t$ は $A$ 上 transversal なものが存在するとする．この時 $f^{-1}(A)$ と $g^{-1}(B)$ は stratification の構造をたもって，同相．

さて今 compact Lie group が compact 多様体 $M$ に作用しているとする．この時 $M$ 上に同値関係を $x\sim y \Leftrightarrow Gx=gGyg^{-1}$ で定義する．ここに $Gx=\{h\in G\cdot hx=x\}$．このとき $M$ は各同値類を stratum とする stratification をもつ．

$G$ の compact 性をはずすと上のことはもはや成りたたないが，$G$ が代数群であり $M$ への作用も代数的であるとする．この時 $M$ 上に次のような stratification を入れることができる．各 stratum は $G$ orbits からなり，各 stratum の orbits 達は isotopic.

今 jet space $J^r(n,p)$ を考える．この時代数群 $L_n^r\times L_p^r$ が $J^r(n,p)$ に作用している．上に述べたことを使うと $J^r(n,p)$ 上の stratification で $L_n^r\times L_p^r$ の作用と compatible であり，各 stratum 上の orbits 達は isotopic なものが存在する．この時この stratifications は projection $J^{r+1}(n,p)\to J^r(n,p)$ と compatible であるようにできる．これを jet space の canonical stratification と呼ぶ．さて

**定理** (Mather). $f: R^n\to R^p$ が differentiable の意味で structurally stable⇔各点で $J^r(f)$ は $J^r(n,p)$ の各 orbit に transversal.

**定理** (Arnord). $f$ が ‘simple’ singularity をもつ function ($p=1$) のとき，$J^r(f)$ を通る stratum と orbit は一致する．

**Conjecture.** $f$ がすべての strata に transversal ならば，$f$ は topological に structural stable.

最後に complex analytic な場合に jet space に stratification を導入する別な idea が示された．

(土屋昭博記)

### The cut locus of an imbedded manifold into Euclidean space

(1973年4月27日 於北海道大学)

ユークリッド平面上になめらかな単純閉曲線があり，曲線上の各点から内部に向って，円周が一定の速さで拡がっていく時，このすべての円周の包絡線は，初め，境界曲線の平行曲線をえがく．しばらく時間がたつと，この曲線に特異点が生ずる．例えば，境界曲線が，放物線 $y=-x^2$ の部分をもつとき，平行曲線は，頂点における曲率の中心を通過した後，縮閉線上の二点と自分自身との交点によって小三角形が作られ，いわゆる catastrophy 理論においてつばめの尾と呼ばれる特異点が生ずる．一般にこのような平行曲線は，propagation process における wave front とみられるから，その特異点は wave front の安定特異点で，丁度 catastrophy 理論によって与えられるものである．ここでわれわれは，この平行曲線の二重点の軌跡に注目する．これが境界曲線の cut locus と呼ばれるものである．アメリカの数学者，H. Blum の理論によれば，われわれが対象物を見る時，この wave front の cut locus が頭の中で多少とも無意識に把握され，cut locus の各点において境界までの距離関数が得られる．この距離関数は最小値をもつ．対象物をつかむためには，その安定な位置を与える対象物の境界の共通法線を基本的に用いなければならないが，この距離関数の特異点は，このために重要な役割を演ずる．cut locus の特異点も重要なもので，その中には，頂点，三重点がある．このような理論は，生理学的見地から非常に興味があるが，詳細には立ち入らない．われわれの目的は，cut locus を数学的に精密に考察することである．

$n+1$ 次元ユークリッド空間 $R^{n+1}$ における $n$ 次超曲面 $H_n$ が，方程式 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ によって定義されているとする．一点 $p\in R^{n+1}$ を固定するとき，各点 $m\in H$ に対し，距離関数 $d^2(m,p)\geqq 0$ が定まる．$p$ から $H$ にいたる距離を，最小法線の長さで定義する．Sard の定理により，ほとんどすべての点 $p$ に対し，$p$ から $H$ にいたる法線は有限個で，他のどの法線よりも短い最小法線をもつ．$d^2(m,p)$ が，$m$ において，$H$ 上 non-degenerate critical quadratic point をもつとき，法線 $pm$ は単純であると言う．再び Sard の定理により，ほとんどすべての点 $p$ に対して，$d^2(m,p)$ は，non-degenerate critical quadratic points (有限個) だけをもつ．超曲面 $H\subset R^{n+1}$ の cut locus $K$ をその補集合の任意の点が単純な絶対最小法線をもつような最大閉集合と定義する．標準楕円においては，cut locus は，二焦点を結ぶ線分である．次に $K$ の特異点を考える．$M^n$ を，$n$ 次元微分可能多様体とし，$f: M^n\to R^{n+N}$ を十分高い微分可能性 ($C^r$ 級) をもつ任意の写像とする．$C^r(M^n,R^+)$ を $M^n$ 上の負でない実数値関数全体の $C^r$-位相に関する空間とするとき，任意の $y\in R^{n+N}$ に対し，対応する距離関数 $d^2(y,f(x))$, $x\in M^n$ をとることにより，写像 $\Phi_f: R^{n+N}\to C^r(M^n,R^+)$ が定まる．$C^r(M^n,R^+)$ は，Banach 空間で，Morse functions 全体を，最高次元の stratum とする stratification をもつ．これは，J. Cerf [Publ. I. H. E. S. **39** (1970), 185–353] によって詳しく与えられている．さらに，$C^\infty(M,R^+)$ は，有限余次元の部分多様体を strata とする標準 stratification $\Sigma$ を持つ．オランダの数学者 Loovanga によれば，ほとんどすべての微分可能 ($C^\infty$) 写像 $f$ に対し，$\Phi_f$ は，$\Sigma$ に関して transversal となる．$C^\infty(M,R^+)$ において，Catastrophy 理論の記号を借り Maxwell Set, $M_{XW}$ を閉集合で，任意の $g\in C^\infty(M,R^+)-M_{XW}$ が単純な絶対最小値をもつものと定義する．$M_{XW}$ は，$C^\infty(M,R^+)$ の標準 stratification の一部で，したがって Loovanga の定理からほとんどすべての写像 $f: M^n\to R^{n+N}$ に対して，$\Phi_f$ が $M_{XW}$ に関して transversal となる．このとき，$\Phi_f^{-1}(M_{XW})=K$ が，$f$ の cut locus と一致することが容易に見られる．したがって，cut locus の generic singularities を知るには，関数空間の Maxwell set の特異点に着目し，写像 $\Phi_f$ による transverse intersections をとればよい．

このことは低次元の場合容易に確かめられる．例えば平面上のなめらかな単純閉曲線 $f: S^1\to R^2$ の場合，写像 $\Phi_f: R^2\to C^\infty(S^1,R^+)$ が対応するから，Maxwell set において，余次元 2 までの特異点が生ずる．余次元 1 の stratum は，すべての critical points が，non-degenerate で，二つの critical values が一致する関数から成り，cut locus において微分可能曲線弧を与える．余次元 2 の strata は，一つは $x^4$ 型の最小値の critical value を与えるもので，cut locus の端点をつくる．他の一つは，すべての critical points が，non-degenerate で，三つの critical values が一致するものから成り，これは cut locus の三重点を作る．この議論はさらに一般に，リーマン面における cut locus にまで拡げられる．

最後に，古典微分幾何学への応用にふれる．平面上のなめらかな単純閉曲線の内部は，内部の cut locus に変位レトラクトされるから，その cut locus は，可縮 1 次元多面体 (tree) となり，少くとも二つ端点をもつ．この二点は，最小法線を与え，そのおのおのの間に最大法線が少くとも一つづつあるから，4 頂点定理が得られる．また cut locus $K=K_{\min}$ を単純絶対最小法線によって定義したが，最小の代りに最大値をとって議論が平行に進められ，いわば，最大値 cut locus $K^{\mu}$ が得られる．楕円に対しては，$K_{\min}$ は二焦点を結ぶ線分，$K^{\mu}$ は，短軸上二つの曲率中心を結ぶ線分であり，これらは中心において交わる．$R^2$ 上の一般な，なめらかな単純閉曲線に対しても，$K_{\min}$ が，曲線内部の変位レトラクトになることと，写像の拡大に関する位相幾何学的性質から，$K_{\mathrm{mim}} \cap K^{\mu} \neq \phi$ がいえる．　(鈴木治夫記)

## Theory of catastrophy and the morphogenesis

(1973 年 4 月 23 日　於京都大学)

I) 形態の理論のプログラム，‘記述’について，すべての科学的な研究が取りあつかう現象は，巨視的な意味において普通の時空の空間における‘形態’と考えられそれを記述することが第 1 のステップであると思われる．そのために基質空間(今のところ時空の 4 次元空間)における**通常点**つまりその点の近傍には如何なる形態的アクシデントも現れない点，とそれらの点の集合の補集合をなす点集合の要素(これを**カタストロフ点**とよぶ)を区別することからはじめる．例えば実験的形態を考える場合，研究者はある箱 $B$ の中にある状態$(\alpha)$のシステムを準備する．これらの準備は一つの仕様書に完全に規定されている．このように状態$(\alpha)$が準備されて後，観察者は時空の直積空間 $B\times T$ において，状態$(\alpha)$から自然な発展として生起する形態変化を観察する．特に$(\alpha)$からでたカタストロフの集合 $K_{(\alpha)}$ を決定することが重要である．状態$(\alpha)$からでたカタストロフ $K_{(\alpha)}$ が時間区間 $T_1$ において**構造安定**であるとは，$(\alpha)$ に十分近い$(\alpha')$をとったとき，$B\times T_1$ からそれ自身への同相写像 $h_\alpha$ が存在し，$h_\alpha(K_\alpha)=K_\alpha'$ となることを意味する．また形態変化 $K$ が抽象的に定義された**形態形成場**によって与えられるということは次のように定義される．ある普遍的な基質空間 $W$，普遍的なカタストロフ $\tilde{K}$ が支えられ，状態$(\alpha)$の近くの状態 $(\alpha')$ からでたすべての形態変化は，連続写像 $\Phi: B\times T_1 \to W$ (これは $\tilde{K}$ に対して縦断的である.)によって規定される場合とする．特に上の $h$ および $\Phi$ が時間軸への射影と両立しうるものになっているとき，このカタストロフ $K$ を 1 つのクレオドとよぶ．このようにして，初期条件 $(\alpha)$ を可能なかぎり変化させてできるクレオドの集合を文例集 (Corpus) とよぶが，形態変化の記述は次のような手続きでおこなわれる．1) 上のような文例集をつくる．2) それが有限型かどうかをチェックする．3) クレオドのいくつかの集合で安定な条件つきクレオドをみつけ，4) その組織レベルを確定し，5) 各レベルを特徴づける商の形態の集合を確定する．これらの手続は言語学や，組織学でつかわれている手続である．

次に II) の‘説明’にうつるが，記述と説明の区別は重要であるがむずかしく，認識論的な成熟度が要求される．簡単に言ってある形態変化の説明をすることはその原因を追求することであり，上に述べた組織のレベルで言えば一つ下のレベルで，そのレベルに内在するメカニズムをはっきりさせることである．このことに関して従来 2 つの立場があった．1 つは $\alpha$) 還元論的説明であり，それはあたえられた現象としての形態変化をそれ以上還元できない単位まで分析して説明しようとするものである．もう一つは $\beta$) 構造論的アプローチであって，それは‘記述’の任意性を少くすることによって‘記述’を改良し，経験的形態変化を公理論的に再構成する方法である．例えば形式言語学などがそうである．しかしこの 2 つは，いづれも欠点がある．第 3 の立場として $\gamma$) カタストロフ理論がある．この理論では条件つきクレオドについての商$(N)$の構造をあきらかにし，基質空間の連結領域が条件つきクレオドの台であることから，これを関数の位相型の自己同型の空間と同一視し，適当な仮定のもとに，安定な形態的アクシデントを分類することが可能となる．もちろんこれには重大な制限があるが，一つの別の方法である．

(山口昌哉記)

## Catastrophe Theory

(1973 年 4 月 20 日　於九州大学)

会場にあてられた理学部大会議室に立錐の余地がないほどつめかけた聴衆を見たためか，Thom 教授の講演はかなり一般的なものとなった．

カタストロフ理論の目的はあらゆる形態的問題を解くための一般的方法を与えることである．科学は特定の現象の研究である．現象とは見ることができる**あるもの**のことであり(第 1 近似)，与えられた領域(媒質)内に起る形状またはパターンの局所的事象である．この事象の起る場 (support) をその現象が定める形態の場という．形態の場としては時空間の開集合，とくに $B\times T$ ($B$ は位相空間，$T$ はある時間空間)の形のものが用いられることが多い．$B\times T$ の点 $a$ は $a$ のある近傍のすべての点と

同質のとき regular point といい，regular point でない点を catastrophic point とよぶ．regular point の全体は定義から開集合であり，その余集合 $K$ はカタストロフ集合とよばれる．

実験形態学では，宇宙全体を調べるわけにいかないから，宇宙の一部分を区切って‘箱’とよぶ．実験をはじめる際には初期条件を定めるための準備が必要である(実験に必要なだけの気体をつめるなど)．準備を記述するに十分な数の変数(酸素の量，水素の量，温度など)を座標と考え，準備の全体をユークリッド空間の部分集合とみる．このようにして2つの準備が遠いとか近いとかが意味をもつ．

カタストロフ集合 $K$(または対応する形態)は，それが準備 $\alpha$ から定まるものとして，任意の $\varepsilon$ に対し $\alpha$ に十分近い準備 $\alpha'$ が定めるカタストロフ集合 $K'$ が，ある $\varepsilon$ 位相写像 $F: B\times T\to B'\times T'$ による $K$ の像となるとき構造安定であるといわれる．ある人が実験をするとき，誰かが，他の場所で，他の時間に，同準備のもとに行う実験と全く同じ結果を得ると期待するのは当然である．そうでなければ，その実験の結果は科学的実験結果とはいえない．ただし実際には厳密に実験の条件を同じくするのは難かしいし，実験の途中で‘箱’外の作用の影響を受けることも当然考えられる．

そこで，形態にはそれが全く構造安定の場合と，有限個の構造安定なカタストロフの型があってその形態がそれらの有限個の型で被覆される場合(有限生成)と，残りの場合とが考えられる．有限生成の場合，基礎となる有限個のカタストロフの型は‘アルファベット’とよばれる．この他，形態学の叙述の重要な項目として，一定の基準のものを単位とみてさまざまな単位についてそれぞれ考察する階級水準 (hierarchical level) や，与えられた形態について初期条件をいろいろ変えて得られるカタストロフの型を集めたもの (corpus) を作っておく作業等がある．

さて形態学の考え方としては，還元主義(reductionist approach)および構造主義(structurist approach)とがある．前者は与えられた形態学を研究するのに，‘何が’また‘どのように’演出しているかをつきとめ，つぎに演出者を支配する法則を追求する．例えば還元主義的言語学では，言語は人(心理学，社会学)によって，口を通し声帯からの音声(生理学，解剖学)で語られるという理由で，(　)内に書かれた学問に話を転化する．また還元主義的生物学では，生物の研究を細胞の研究に，細胞の研究を分子の研究に帰着させようと発想する．しかし，ある形態の演出者が原子であることがつきとめられたとしても，多原子間の相互作用の究明は至難であるし，たとえその究明に成功したとしても，それを叙述するためには無限に近い変数の関係式を必要とし，その取り扱いは困難をきわめる．

これに比べれば後者はそれほど欲ばらない．構造主義者はデーターの曖昧さの消去(注：各階級水準における公理化をも含むものと思われる)により，叙述の簡明化を志す．これは実験的形態学の正道であり，Weil が‘還元主義は宇宙を徹底的に究明しようとする人類の夢であるがホープレスである’と言っている限りにおいて，私は構造主義者としての道を歩もうと思う．構造主義的言語学は有限個の公理に基き‘文法的に正しい表現’を生成し，形式言語学の基礎づけに成功した(ただし，不幸にも多次元形態学には同じ手法は通用しない)．

(注：講演は形態の‘叙述’と‘説明’に関する以上の項目のおのおのについて，生物学，生理学，力学，光学，量子力学，一般相対性理論などから複数の例を引用した親切極まるものであった．そのためここで時間切れとなったが，時間の延長を申し出され，つぎのことが追加された．)

カタストロフ理論の数学的モデルは，多様体 $W^k$ を底にもち多様体 $M^n$ をファイバーにもつようなファイバーバンドルと各ファイバー上の力学系とによって与えられる．とくに $W^k=R^4$(時空間)で力学系がポテンシャル関数の勾配として得られるような場合には $R^4$ 上の7つの初等カタストロフで全部が説明できる．生物学などに，このモデルで説明できない重要な例(非勾配系)が存在するが，それは余次元のもっと高い特異性か，ファイバー力学系の回帰の導入によって解決できるように思われる．これはなかなか難かしい問題であるが，いずれにしてもカタストロフ理論が今まで inexact science とよばれていたさまざまな科学の分野に考え方の指針と説明法を与えるものであることは否めない．

(工藤達二，石川暢洋記)

## Catastrophy Theory

(1973年4月27日　於北海道大学)

Catastrophy 理論は，あらゆる種類の自然過程の中によこたわる機構を理解するための方法で，これによってより正確な定量的記述を可能にするための用語を見出すことが期待される．この理論は，形態学的科学で，現象学を扱う．時空領域を考え，その中の一点のまわりの十分近い点 $x'$ が，すべて同一の定性的状態をもつとき，$x$ を regular point とよぶ．Regular points 全体は開集合をなす．その補集合 $K$ を catastrophy points の集合とよぶ．Catastrophy の理論は，ある意味では，不連続の理論ともいえよう．劇的な‘catastrophe’は，より数学的な‘不連続性’におきかえられるのであるが，不連続性は，必ずしも形態学的記述をいみしないから，全く同一のものとは言えない．

自然科学の一つの実験に対して，ほとんど同一の手続きにしたがってその実験を再構成するとき，ほとんど同一の形態学を得る．すなわち，初めの実験体系に対する領域を $B\times T$，catastrophy の集合を $K$，後の実験に対応するものを $B'\times T'$，$K'$ とするとき，$K$ から $K'$ へ，

ユークリッド空間の平行移動 $D: B\times T\to B'\times T'$ と，$\varepsilon$-位相同形 $h_\varepsilon$ によって移る．式で表わせば，$K'=h_\varepsilon D(K)$，$\|h_\varepsilon(y)-y\|<\varepsilon\ (y\in B'\times T')$．これが構造安定性の定義である．今世紀始め，生物学，発生学者によって形態発生の場の概念が導入された．実験的過程の任意の実現が，ある4次元の普遍な空間 $W$ と普遍な catastrophy の集合 $\tilde{K}$ によって記述されると言うことで，一般に(微分)位相同形 $\Phi: B\times T\to W$ があって，$K=\Phi^{-1}(\tilde{K})$となることである．ただ，生物学者らは，この概念をひどく漠然とした形で用いていたため，あまり受け入れられなかった．しかしながら，形態発生の場を，その安定性によって定義するとき，この概念は明確なものとなる．

そこで，初期条件の変化，まわりの体系の阻害等から来るすべての可能な形態学を構成する問題が生じて来る．これは，在来の用語によれば，'corpus' といえよう．与えられた形態学の 'corpus' は，基本的には無限であるが，その形態発生の場の中から，より初等的なものを有限個とり出し得るようなことがしばしば生ずる．各形態発生の場は，普遍な空間と普遍な catastrophy set $K_i$ によって特性づけられる．このとき，この有限個の形態学的事象の辞書から出発して，すべての形態学を再構成することができる筈である．このような形態学を有限形と言う．平面上のなめらかな単純閉曲線の cut locus は三つの形態学的事象をもつ．語学形態学も，有限形形態学のよい例である．形態学の理論は，生物学において，非常に基本的なもう一つの問題を扱う．これは組織段階の問題であり，これもまた語学的なものである．単に初等的形態発生の場に限らず，ある場合，形態発生の場のある集合が，強い安定性をもって行動することがしばしば生ずる．そして統計学的見地から catastrophy 理論が起る．このような，いわば大域的な形態発生の場を条件付形態発生の場とよぶ．例えば，語学形態学において，二つのよく発展された理論がある．これは音声学と文章論である．しかし単語から音節(シラブル)への分解については，一般によく知られていない．同様に生物学の研究においても，幾つかの組織段階がある．すなわち，分子，超分子組織，有機物質，細胞，生物体組織，生物体，および社会である．この中最もよく知られているのは，おそらく生物体の体組織への分解で，これは古典解剖学の対象である．これにくらべ，体組織から細胞への分解は，そのより多くの任意性のゆえに，知られていることは，わずかである．とに角基本的事実は，記述される二つの段階に対して，一般に有限形の抽象形態学が定義され，合成物のすべての実験形態学は，この抽象形態学の上に写像されることである．そして，剰余形態学的過程が，剰余形態学としてかなり容易に定義できるであろう．すべての組織の概念は，本質的に一般には1次元，時には多次元の抽象形態学を発見することをとり扱う．基礎空間 $W, W'$ その catastrophy 集合を $K, K'$ とする．写像 $g: W\to W'$ があって，local charts $U_i\subset W$，$V_i\subset W'$ に対して，$g_i=g|U_i: U_i\to V_i$ とするとき，$K\cap U_i=g_i^{-1}(K'\cap V_i)$ となることによって，形態学的過程の catastrophes の準同形の概念が導入される．実験的形態学は，この準同形の演算によって，抽象形態学の上に写像される．この準同形には自明でないものがかなりあり得る．典形的な例は，文法学，または生物学における機能(grammatical or physiological function)である．Catastrophy 理論は，すべての科学的調和における組織段階を記述するのに，非常に役立つと思われる．なぜなら，今まで，一般にこのような段階に関しては，直観にたよって来ており，これを定める正確な判定法がなかったのであるが，抽象形態学に対する二つの近い段階の判定規準がそれにあたり，この抽象形態学は有限形で，catastrophy 理論の用語で記述される規則によって生成されるからである．つまり catastrophy 理論は基本的には，特殊な競争の問題に関するもので，互に近い二つまたはそれ以上の安定政体の競争は，それが何であれ幾何学的，代数学的性質をもつ体系によって支配されると言うことである．

次に catastrophy 理論の基本機構を述べる．化学物質体系の作用の過程がこの理論の基本的起源になっており，これを引用することによって適切な説明が得られる．時空領域の点 $x$ のまわりで起る．あらゆる形態学的過程を記述する．局所作用が，常に局所的平衡の状態にあり，この状態が，作用の補助空間における力学系のある種の attractor で，しかもこの点のまわりで構造安定性を持つとき，$x$ を形態学的過程に対して regular point と言う．すべての regular point には，局所力学系の流れの attractor が対応する．一点 $y$ に関し，一方の側で局所力学系の合成 attractor が存在し，また他の側でも局所力学系の attractor が得られ，一方から他方へジャンプする時，$y$ を catastrophy point とよぶ．この考えを，最も自然な形態学的事象の記述に用いる．局所力学系にさらに特別な仮定をおくことによって，力学系の分岐理論になるのであるが，このままではまだ高度の困難さが伴うので，さらに別のよりよい制御がある場合を考える．それはエントロピーのような局所過程を仮定することによって得られる．各点のまわりで，この過程によって極大化される関数といういみでエントロピー関数を考えるのである．局所的平衡は，常に局所エントロピーを極大にすることによって与えられる．かくして elementary catastrophy の一般論に到達する．

この理論は，数学的に取り扱うことができ，このための非常によい代数幾何学的理論がある．Elementary catastrophy の最も簡単なものの一つとして，Riemann-Hogoniot catastrophy があげられる．現象の起る空間(external variables の空間)を時空，補助空間(internal variables，すなわち定常作用の空間)を1次元，その変数を $x$ として考える．Elementary catastrophy の理論においては，internal variables の空間の次元は，高々

2 であることが，計算によってみちびかれることに注意しておく．Riemann-Hogoniot catastrophy は，$V$ をポテンシャル関数として，$V=x^4/4$ における degenerate minimum に対応し，その普遍開折は，$V=(x^4/4)+u(x^2/2)+vx$ となる．$\partial V/\partial x=x^3+ux+v=0$ の判別式を 0 とおいた曲線 $4u^3+27v^2=0$ に関し，$u<0$ を固定し $v$ を動かすとき，カスプの内側で，$V$ の二系の極小値が得られ，一方から他方へ連続的に移ることはできない．カスプの内側の二つの極小系を分離する曲線，すなわち，shock wave に沿って，極小値はジャンプしなければならない．多くの場合これは二つの極小値が等しくなるときに起る．これがいわゆる Maxwell の規則と言うものである．このことは，二つの可能な局所的政体の間の争闘が，いかに必然的に形態学を作り出すかを説明する．二国間の境界，人体の皮膚の形態学も，政体の間の争闘によって生ずるものである．これらは，ある意味で，前述の組織段階，局所政体についての正式判定規準である．

Catastrophy 理論の結果について述べる．先ず数学において，この理論は，Tayler 展開式の非常に基本的な，多少とも位相幾何学的性質に関係する．関数の Tayler 展開が同一位相形および全関数をもつと言うことは，この理論を記述するための基本的結果である．特異点の理論は catastrophy 理論ではないが，後者は精密化されれば直ちに数学的となり，前者に応用される．また propagation phenomena は，Hamilton-Jacobi 原理で支配される限り，必然的に，elementary catastrophy の特異点をもたらす．例えば．wave front のすべての特異点は，Lagrangean manifold の，base space 上への射影の特異点で，基本的に catastrophy の特異点である．shock wave については，wave front より一層複雑で，phase，本質的には，pseudo groups of transformations，Lie groups の考えを必要とする．Catastrophy 理論は，さらに生物学，発生学，心理学において，非常に役立つものである．

（鈴木治夫記）

### Sur la typologie des langues naturelles

（1973 年 4 月 19 日　於日仏会館）

4 月 19 日に数学会と日仏協会との共催による，Thom 教授の講演が行われた．‘言語の Typologie’ という題目で，‘自然現象は力学系により説明できる’ という彼の思想に沿った内容である．以下その概容を述べる．詳しくは，中央公論社「自然」7 月号に講演全訳があるので，それを参照されたい．

世界各国の文章を検討して，Greenberg 教授は，主格名詞(以後 S と書く)，目的格名詞(O)，動詞(V)の三つの配置に関して，次の 4 つのタイプに分類されることを示した．

Ⅰ．V—S—O 型(アラブ語等)

Ⅱ．S—V—O 型(ヨーロッパ系)

Ⅲ．S—O—V 型(日本，トルコ，バスク等)

Ⅳ．V—O—S 型(アメリカ・インディアン)

また，品詞の名詞(N)，形容詞(A)，属格名詞(G)，動詞(O)の位置関係，前置詞(Pré)，後置詞(Post)の使い方に関しては次の 2 つのタイプに分れるという．

| (i)型 | (ii)型 |
|---|---|
| V—O | O—V |
| N—A | A—N |
| N—G | G—N |
| Pré が使われる | Post が使われる |

この並び方がなぜ起るのかを，数学的な立場から説明してみよう．品詞には重さがあり，重さの順に，N, A, V, … と並べられる．S, O, V についても，この順で重い．文章を作る分析作業のさいには，軽いものから順に出てくる．また，聞きとり，文章から概念を構成するさいには，逆に，重いものから順に出てくる．よって話す側の立場に立つ文章(放出型)ではⅣのタイプとなり，聞く側の立場の文章(受容型)ではⅢのタイプとなる．しかし，Ⅳのタイプは著しく少く，変形された，Ⅰ，Ⅱのタイプが多い．これは受容型が強いということを示している．

また O と V の関係から，(i)は放出型，(ii)は受容型であることがわかるであろうが，A と N，G と N が入れ替らなければ，重さの説明からは不都合である．これは繋合辞の消滅と，‘語間引力’ の形容詞に与える影響によるものである．これを ‘付加語類型逆転の原則’ と呼ぶ．

（岡部恒治記）

## V. S. Vladimirov 教授講演記録

### Linear passive systems with several variables

（1973 年 4 月 21 日　於京都大学）

$\boldsymbol{R}^n$ 上に次のような convolution equation を考える．

(1)　$Z*u=f$

ただし，$u$ と $f$ は $\boldsymbol{C}^N$-valued，$Z$ は $(N,N)$-matrix-valued，$Z$ の各成分 $Z_{jk}$ は $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ とする．今 $\Gamma$ を原点 0 を頂点とする closed，proper，convex な cone で，内部 $\mathring{\Gamma}$ が空でないようなものとする．

**定義**．条件

$$(2)\quad \mathrm{Re}\int_{-\Gamma}\langle Z*\varphi,\varphi\rangle dx\geqslant 0\quad \forall\varphi\in(\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n))^N$$

が満されるとき，方程式 (1)（または operator $Z*$）は $\Gamma$ に関して passive であるという．ここで $a,b\in\boldsymbol{C}^N$ に対して $\langle a,b\rangle=\sum_j a_j\bar{b}_j$ とする．

(2) からの帰結として次のようなものがある．1) Dissipativity:

$$\mathrm{Re}\int_{\boldsymbol{R}^n}\langle Z*\varphi,\varphi\rangle dx\geqslant 0\quad \forall\varphi\in(\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n))^N.$$

2) Causality : $\mathrm{supp}\,Z(x)\subset\Gamma$. 3) Positive-definiteness: すべての $a\in\boldsymbol{C}^n$ に対して, $\langle(Z(x)+{}^t\overline{Z(-x)})a,a\rangle$ は Bochner-Schwartz の意味で正定値. 4) Growth condition : $Z\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$. さて, $C$ を $\Gamma$ の dual cone $\Gamma^*=\{q;q(x)\geq 0\ \forall x\in\Gamma\}$ の内部とすると, $Z*$ passive with respect to $\Gamma$ ならば, 上に挙げたことから Laplace transform $\tilde{Z}(\zeta)$ が, tube domain $T^C=\boldsymbol{R}^n+iC$ 上の函数として定まり, (i) $\tilde{Z}(\zeta)$ : holomorphic in $T^C$, (ii) $\mathrm{Re}\,\tilde{Z}(\zeta)\geqslant 0$ for $\zeta\in T^C$, (iii) $\tilde{Z}(iq)$ : real for $q\in C$, が成り立つ. われわれは, 何かある $T^C$ 上の行列値函数 $\tilde{Z}(\zeta)$ がこれら三つの条件を満すとき, $\tilde{Z}(\zeta)$ は $T^C$ 上 positive real であると言うことにする.

**定理 1.** 上の記号の下で, $Z*$ が $\Gamma$ に関して passive ならば, Laplace 変換 $\tilde{Z}(\zeta)$ は $T^C$ 上 positive real であり, 逆に $\tilde{Z}(\zeta)$ が $T^C$ 上 positive real であるならば, それは, $Z*$ が $\Gamma$ に関して passive であるような $Z$ の Laplace 変換である.

以下では, この定理の証明について若干のべるとともに, passive operator の構造についても情報をもたらすような結果も与えよう. まず $n=N=1$, $C=(0,\infty)$ のとき $T^C$ 上の positive real な函数について, 積分表示 (Nevanlina)のあることを注意しておく.

$$f(\zeta)=\frac{1+\zeta^2}{\pi}\int_{\boldsymbol{R}}\frac{d\sigma(\xi)}{\zeta-\xi}-ia\zeta+b$$

ここで, $a\geq 0$, $b$ : real, $d\sigma$ : non-negative measure, $\int d\sigma\leqq\pi a$ とする. 一般に $C$ が $\boldsymbol{R}^n$ の第一象限, $N=1$ の場合も同様の積分表示が存在する. このときは事情が複雑になって $C$ の face の乗っている(同次元の)部分空間の上の measure($2^n$ 個)に対して, それらの Fourier 変換の間に $2^n-n-2$ 個の等式が満されねばならない.

**定理 2.** 次の二つの条件は同値である :

(1) $\tilde{Z}(\zeta)$ は $T^C$ 上 positive real である.

(2) $\tilde{Z}(\zeta)$ は次の条件を満す distribution $Z(x)$ の Laplace 変換である :

a) すべての $a\in\boldsymbol{C}^N$ に対して $\langle(Z(x)+{}^t\overline{Z(-x)})a,a\rangle$ は Bochner-Schwartz の意味で正定値.

b) $C$ に含まれる $C_1=\{q;(e_1,q)>0,\cdots,(e_n,q)>0\}$ なる形の任意の cone $C_1$ に対して, tempered, continuous な行列値函数 $Z_0(x)$ と $n$ 個の実対称行列 $Z_k$ があって, $\mathrm{supp}\,Z_0(x)\subset C_1^*$, $\sum_k q_kZ_k\geqslant 0$ for all $q\in C_1^*$, かつ

$$Z(x)=(e_1,D)^2\cdots(e_n,D)^2Z_0(x)+\sum_k Z_k\frac{\partial\delta(x)}{\partial x_k}$$

が成り立つ.

この定理の証明はまず, $N=1$ のとき, 積分表示を使って証明し, $N>1$ に一般化する. 定理 2 によって定理 1 は証明される.

最後に定理 1 の応用を一つ述べる. $Z*$ が non-degenerate であるとは, $\det\tilde{Z}(\zeta)\neq 0$ for $\zeta\in T^C$ なるとき言う. そうすると次の定理が得られる.

**定理 3.** もし $Z*$ が cone $\Gamma$ に関して passive で non-degenerate であるとすると, 方程式(1)の基本解でやはり $\Gamma$ に関して passive なものが存在する.

ここで $A$ が(1)の基本解であるとは,

$$Z*A=I\delta(x)\quad (I\text{ は単位行列})$$

なるとき言う.

(成木勇夫記)

## C. T. C. Wall 教授講演記録

### Manifolds, chain groups and quadratic forms

(1973年4月7日　於東京大学)

多様体論国際会議の直前に, イギリス, Liverpool 大学の C. T. C. Wall 教授の講演が行われた. 内容は, 主に, Kervaire invariant と surgery obstruction に関するものであった. Wall 教授は, 微分位相幾何学における多様体の surgery 理論を, ほぼ完全な形に定式化した人である. その理論において重要な役割を果す surgery obstruction group は, Wall group と呼ばれ, 多くの人により研究されている. 講演は, まず, $4k+2$ 次元の単連結多様体の surgery obstruction として登場した Kervaire invariant の説明から始まった.

$M^{4k+2}$ を境界のある $4k+2$ 次元コンパクト多様体, $D^{4k+2}$ を $4k+2$ 次元球体, $\varphi: M^{4k+2}\to D^{4k+2}$ を, $\varphi/\partial M$: $\partial M\to\partial D$ がホモトピー同値な, normal map とする. このとき, $M$ を surgery して, contractible にするための obstruction として, Kervaire invariant $c(\varphi)\in\boldsymbol{Z}/2$ は定義される. Wall 教授は, この Kervaire invariant が, Sullivan, Brumfiel, Browder, Brown 等により, いかに一般化され, 重要な役割を果してきたかを, 歴史的に順序よく説明していった. その中で, 現在最も一般的と思われる, Browder-Brown による Kervaire invariant の定義は次のようなものである.

$M^{2k}$ を偶数次元多様体とする. まず, $M$ 上の $v_{k+1}$-structure なるものを以下のように定義する. 下の図式を考えよう.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r] \arrow[d] & PK \arrow[d] \\ M \arrow[ur, dotted, "\tau'"] \arrow[r, "\tau"'] & BO_{2k} \arrow[r, "v_{k+1}"] & K(\boldsymbol{Z}/2,k+1) \end{tikzcd}$$

ここに, $\tau$ は $M$ の接ベクトルバンドルの分類写像, $v_{k+1}$ は, その $k+1$ 次元 Wu class を対応させる写像, $PK$ は $K(\boldsymbol{Z}/2,k+1)$ の path space, $E$ はその $v_{k+1}$ による引き戻しとする.

このとき, もし $v_{k+1}$ が, 自明な写像とホモトープならば, $\tau$ の lifting $\tau'$ が存在するが, この lifting を, $M$ の $v_{k+1}$-structure という. $M$ の $v_{k+1}$-structure は, 二次形式 $q:H^k(M:\boldsymbol{Z}/2)\to\boldsymbol{Z}/4$ で, $q(x+y)=q(x)+q(y)$

$+2xy[M]$, $q(x) \bmod 2=x^2[M]$ を満すものと1対1に対応することが証明されている．そこで，$c(q)\in \boldsymbol{Z}/8$ を

$$e^{\frac{i\pi}{4}c(q)} = \arg\left(\sum_{x\in H^k(M:\boldsymbol{Z}/2)} e^{\frac{i\pi}{2}q(x)}\right)$$

により定め，$c(q)$ を $v_{k+1}$-structure をもつ $M$ の Kervaire invariant と定義する．$c(q)=c(M)$ とかくが，$c(M)$ は，$M$ に一つの $v_{k+1}$-structure を定めたとき，はじめてきまる量である．以上が，Browder-Brown によるものであるが，その他 Sullivan は，Kervaire invariant を bordism group $\Omega_{2*}(G/\mathrm{Top})$からの写像，$c:\Omega_{2*}(G/\mathrm{Top})\to \boldsymbol{Z}/2$ として定義している．$\Omega_{2*}(G/\mathrm{Top})$ の元 $[M,f]$ と多様体 $L$に対して，$c(L\times(M,f))=c(L)\cdot c(M,f)$ なる積公式が成立するが，Wall 教授は，$\pi_1=\boldsymbol{Z}$ の unoriented case における Wall group $L_k(\boldsymbol{Z},-)$ についても，同様の積公式が成り立つことを示した．Kervaire invariant がもつ，ホモトピー不変，あるいは bordism 不変であるというよい性質が，一般の Wall group に，どの程度成立するかは興味ある問題であり，Novikov, Mishenko 等により研究されているが，まだ十分な結果は得られていないそうである．最後に，Wall 教授は，適当な条件を満す——たとえば finitely represented な——group $\pi$ に関して Wall group $L_*(\pi)$ が，ある周期性をもつコホモロジー理論 $L_*$ により $L_*(\pi)=L_*(K(\pi,1))$ と表せるのではないのという予想をのべて終った．

(福原真二記)