Subordination について

伊藤　清

§0　序　Λを生成作用素とする半群〔4〕(pp. 251−277)を$\{T^t\}$とすれば、象徴的な意味で

$$T^t = e^{t\Lambda}$$

となる。さて、$\psi(\lambda)$ $(0 \leq \lambda < +\infty)$をもって

$$\psi(\lambda) = c\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda\tau})\, n(d\tau), \quad \int_0^\infty \frac{\tau}{1+\tau} n(d\tau) < +\infty, \quad c \geq 0,$$

なる形の函数とする。さて作用素$-\psi(-\Lambda)$を定義するのに、上の式でλのかわりに形式的に$(-\Lambda)$とおいて

$$-\psi(-\Lambda) = c\Lambda + \int_0^\infty (e^{\tau\Lambda} - I)\, n(d\tau)$$

即ち

$$-\psi(-\Lambda) = c\Lambda + \int_0^\infty (T^{\tau\Lambda} - I)\, n(d\tau)$$

とすればよいであろうと想像される。特に$\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$とおくと、

$$\lambda^\alpha = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda\tau}) \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

で

$$-(-\Lambda)^\alpha = \int_0^\infty (T^\tau - I) \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

となる。これは *Balakrishnan* の定義である（本報告中吉田教授の報告参照）。さて上の$-\psi(-\Lambda)$はある半群$\{T_\psi^t\}_{t\geq 0}$の生成作用素になっている。T_ψ^tを定めるには、

$$e^{-t\psi(\lambda)} = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} F_t(d\tau)$$

なる確率分布F_tが存在することに注意し、ここで上と同様にλのかわりに形式的に$(-\Lambda)$とおいて

$$e^{-t\psi(-\Lambda)} = \int_0^\infty e^{\tau\Lambda} F_t(d\tau)$$

即ち

$$T_\psi^t = \int_0^\infty T^\tau F_t(d\tau)$$

となる。$\{T^t\}$ から $\{T^t_\psi\}$ を定める操作を Bochner [5] (pp. 82 - 117) に従って，ψ による subordination という。特に $\psi(\lambda)=\lambda^\alpha$ のときに $F_t(\cdot)$ は α 位の安定分布であり、一般の $\psi(\lambda)$ に対して $F_t(\cdot)$ は [$0, \infty$] の中に support をもつ無限分解可能な確率分布である。又かかる $\psi(\lambda)$，$F_t(\cdot)$ は非減少な path をもつ一様加法過程 $\theta(t)$ ($\theta(0)\equiv 0$) に

$$e^{-t\psi(\lambda)}=E(e^{-\lambda\theta(t)})=\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}F_t(d\tau)$$

なる関係をもって対応するので、この点に考慮して subordination の確率論的意味を理解することができる。

本稿を草するに当って京大教養部池田助教授より多くの有益な助言を得た。ここに謝意を表する。

§1　非減少一様加法過程の族 Ⓗ

Ⓗ をもって非減少な path をもつ一様加法過程 $\theta(t)$, $0\leq t<\infty$ (但し $\theta(0)\equiv 0$) の全体とする，法則的に同等な過程は同一視することにする。加法過程に関する P. Lévy の標準形 [1] (pp. 158 - 224)，[2] (pp. 109 - 105] [3] (pp. 18 - 63) により，

$$(1)\qquad E(e^{-\lambda\theta(t)})=\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}F_t(d\tau)=e^{-t\psi(\lambda)},\quad F_t(d\tau)=P(\theta(t)\in d\tau),$$

ここに

$$(2)\qquad \psi(\lambda)=C\lambda+\int_0^\infty(1-e^{-\lambda\tau})\,n(d\tau),\quad \int_0^\infty\frac{\tau}{1+\tau}\,n(d\tau)<\infty,\quad C\geqq 0$$

(2) の形の $\psi(\lambda)$ の全体を Ψ であらわすと、(1) による対応 $\theta(t)\longrightarrow\psi(\lambda)$ により，Ⓗ と Ψ との間の一対一対応が得られる。

$\theta_1(\cdot)$, $\theta_2(\cdot)\in$ Ⓗ をとり、その結合 $\theta_2\cdot\theta_1$ を次の様に定義する。法則的に同等なものを適当にとって、$\theta_1(\cdot)$, $\theta_2(\cdot)$ が独立なるようにし，

$$\theta(t)\equiv\theta_2(\theta_1(t))$$

とおくと、$\theta(\cdot)\in$ Ⓗ となることが次の様に証明される。この θ を $\theta_2\cdot\theta_1$ と定める。この結合に関して Ⓗ は (代数的な) 半群になっている。

$\theta(\cdot)\in$ Ⓗ の証明：　θ_1, θ_2 の各々に対する確率法則を P_1, P_2 とすれば この両過程の同時分布は $P=P_1\times P_2$ である。P_1, P_2, P に対応する期待値を E_1, E_2, E とかく。$\theta(t)\equiv\theta_2(\theta_1(t))$ が Ⓗ に属することをいうには，

$$E\{\exp[-\alpha_1\theta(t_1)-\alpha_2(\theta(t_2)-\theta(t_1))\cdots\cdots\alpha_n(\theta(t_n)-\theta(t_{n-1}))]\}$$
$$=E\{e^{-\alpha_1\theta(t_1)}\}E\{e^{-\alpha_2\theta(t_2-t_1)}\}\cdots\cdots E\{e^{-\alpha_n\theta(t_n-t_{n-1})}\}\quad(0<t_1<t_2<\cdots<t_n)$$

を証明すればよい。一般の場合も同じことであるから，$n=2$ の場合を示す。

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\exp\left[-\alpha_1\theta(t_1)-\alpha_2(\theta(t_2)-\theta(t_1))\right]\right\}\\
&=E_1\left\{E_2\left\{\exp\left[-\alpha_1\theta_2(\theta_1(t_1))-\alpha_2(\theta_2(\theta_1(t_2))-\theta_2(\theta_1(t_1))\right]\right\}\right\}\\
&=E_1\left\{E_2(e^{-\alpha_1\theta_2(\theta_1(t_1))})\,E_2(e^{-\alpha_2(\theta_1(t_2)-\theta_1(t_1))})\right\}\\
&=E_1\left\{e^{-\theta_1(t_1)\psi_2(\alpha_1)}e^{-(\theta_1(t_2)-\theta_1(t_1))\psi_2(\alpha_2)}\right\}\\
&=E_1\left\{e^{-\theta_1(t_1)\psi_2(\alpha_1)}\right\}E_1\left\{e^{-(\theta_1(t_2)-\theta_1(t_1))\psi_2(\alpha_2)}\right\}\\
&=E_1\left\{e^{-\theta_1(t_1)\psi_2(\alpha_1)}\right\}E_1\left\{e^{-\theta_1(t_2-t_1)\psi_2(\alpha_2)}\right\}\\
&=E_1\left\{E_2(e^{-\alpha_1\theta_2(\theta_1(t_1))})\right\}E_1\left\{E_2(e^{-\alpha_2\theta_2(\theta_1(t_2-t_1))})\right\}\\
&=E(e^{-\alpha_1\theta(t_1)})\,E(e^{-\alpha_2\theta(t_2-t_1)})
\end{aligned}
$$

次に θ_1, θ_2に対する $\psi(\lambda)$ をそれぞれ $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$ として、$\theta=\theta_2\cdot\theta_1$ に対する $\psi(\lambda)$ を求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
e^{-t\psi(\lambda)}&=E(e^{-\lambda\theta(t)})=E_1\left\{E_2\left\{e^{-\lambda\theta_2(\theta_1(t))}\right\}\right\}\\
&=E_1\left\{e^{-\theta_1(t)\psi_2(\lambda)}\right\}=e^{-t\psi_1(\psi_2(\lambda))}
\end{aligned}
$$

故に

$$\psi(\lambda)=\psi_1(\psi_2(\lambda))$$

となる。従って Ψ も函数の結合という演算に関して（代数的な）半群になっている。この際単位元は $\psi_e(\lambda)\equiv\lambda$ である。これは $\theta_e(t)\equiv t$ なる Ⓗ の中の *process* に対応する。半群 Ψ は半群 Ⓗ と逆同型である。

§2 一般の *subordination*

$\{T^t,\ 0\leq t<\infty\}$ を吉田-*Hille* の意味の半群とする。即ち T^t はある *Banach* 空間Eから Eの中への有界線型作用素で、次の三条件を満すものとする：

(S.1) $\|T^t\|\leq 1$

(S.2) $T^{t+s}=T^tT^s$, $T^0=I$（恒等作用素）

(S.3) $\lim\limits_{t\downarrow 0}T^t=I$ （$\lim$ は強収束をあらわす）

任意の $\theta\in$ Ⓗ に対し、$\{T^t\}$ の θ による *subordination* を次のように定義する。

定理 2.1. $f\in E$ に対し

$$T_\theta^tf=E\left\{T^{\theta(t)}f\right\}=\int_\Omega T^{\theta(t,\omega)}f\cdot P(d\omega)=\int_0^\infty T^\tau f\,F_t(d\tau)$$

（積分は *Bochner* 積分の意味にとる）

とおけば、$\{T_\theta^t\ \ 0\leq t<\infty\}$ は吉田-*Hille* の意味の半群となる。

定義 この半群を $\{T^t\}$ の θ による *subordination* という。又 θ に対応する $\psi\in\Psi$ を用いて、$\{T_\theta^t\}$ を $\{T_\psi^t\}$ ともかき、ψ による *subordination* とい

う。

定理の証明

$$\| T_\theta^t f \| \leq \int_\Omega \| T^{\theta(t,\omega)} f \| P(d\omega) \leq \| f \|$$

$$T_\theta^{t+s} f = E\{ T^{\theta(t+s)} f \} = E\{ T^{\theta(s)} T^{\theta(t+s)-\theta(s)} f \}$$

$\theta(S)$ の分布は F_s, $\theta(t+S)-\theta(S)$ の分布は F_t で、この二つの確率変数は独立である。故に

$$T_\theta^{t+s} f = \int_0^\infty \int_0^\infty T^\sigma T^\tau f \, F_s(d\tau) F_t(d\sigma) = \int_0^\infty T^\tau \left[\int_0^\infty T^\sigma f \, F_s(d\sigma) \right] F_t(d\tau)$$

$$= \int_0^\infty T^\tau (T_\theta^s f) F(d\tau) = T_\theta^t (T_\theta^s f)$$

即ち $\quad T_\theta^{t+s} = T_\theta^t T_\theta^s$

又

$$\| T_\theta^t f - f \| \leq \int_\Omega \| T^{\theta(t,\omega)} f - f \| P(d\omega) \longrightarrow \qquad (t \downarrow 0)$$

次に *subordination* の結合を考えてみよう。

定理 2.2 $\{T^t\}$ の θ_1 による *subordination* の更に θ_2 による *subordination* は $\{T^t\}$ の $\theta \equiv \theta_1 \cdot \theta_2$ による *subordination* である。従って $\{T^t\}$ の ψ_1 による *subordination* の更に ψ_2 による *subordination* は $\{T^t\}$ の $\psi(\lambda) \equiv \psi_2(\psi_1(\lambda))$ による *subordination* である。即ち *subordination* が結合に関して Ⓗ と同型の半群をつくる。

証明、法則的に同等なものを適当にとって（*Doob* の *terminology* [6] によれば適当な *version* をとって）, 独立な二つの ω_1, ω_2 をとって、

$$\theta(t, \omega) = \theta_1(\theta_2(t, \omega_2), \omega_1) \qquad (\text{但し} \quad \omega = (\omega_1, \omega_2))$$

と仮定してよい。

ω_1, ω_2 の分布を P_1, P_2 とすれば、ω の分布 P は $P_1 \times P_2$ であるから、

$$(T_{\theta_1})_{\theta_2}^t f = \int T_{\theta_1}^{\theta_2(t,\omega_2)} f \, P_2(d\omega_2) = \int\int T^{\theta_1(\theta_2(t,\omega_2),\omega_1)} f \, P_1(d\omega_1) P_2(d\omega_2)$$

$$= \int T^{\theta(t,\omega)} f \, P(d\omega) = T_\theta^t f \qquad \theta.E.D$$

次に $\{T_\theta^t\}$ の生成作用素を求めて見よう。θ に対応する ψ を

$$\psi(\lambda) = c\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u}) n(du)$$

とする。

定理 2.3. E が可分とすると、f が $\{T^t\}$ の生成作用素 A の定義域に入っ

ているならば、f は $\{T_\theta^t\}$ の生成作用素 Λ_θ の定義域にも入っていて、

$$\Lambda_\theta f = \int_0^\infty (T^\tau f - f)\, n(d\tau)$$

証明　$F_t(d\tau) = P(\theta(t) \in d\tau)$ とおくと

$$e^{-t\psi(\lambda)} = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} F_t(d\tau)$$

$$T_\theta^t f = \int_0^\infty T^\tau f\, F_t(d\tau)$$

さて、$t \downarrow 0$ のとき

(1)　$$\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda\tau}) \frac{F_t(d\tau)}{t} = \frac{1 - e^{-t\psi(\lambda)}}{t} \longrightarrow \psi(\lambda) = c\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda\tau})\, n(d\tau)$$

特に $\lambda = 1$ とおいて

(2)　$$\int_0^\infty (1 - e^{-\tau}) \frac{F_t(d\tau)}{t} \longrightarrow c + \int_0^\infty (1 - e^{-\tau})\, n(d\tau)$$

さて

$$G_t(d\tau) = (1 - e^{-\tau}) \frac{F_t(d\tau)}{t}, \quad G(d\tau) = (1 - e^{-\tau})\, n(d\tau) + c \cdot \delta_0(d\tau)$$

のとき、$[0, \infty]$ で定義せられた任意の有界連続函数 $h(\tau)$ に対し、

(3)　$$\int_0^\infty h(\tau)\, G_t(d\tau) \longrightarrow \int_0^\infty h(\tau)\, G(d\tau)$$

となることを証明しよう。G を閉区間 $[0, \infty]$ の上の測度と考えると、$G(\infty) = 0$ であるから、G_t, G を閉区間 $[0, \infty]$ の上の測度と考えて、

$$G_t \longrightarrow G \quad (\text{汎弱収束})$$

を証明してもよい。それには任意の数列 $t_n (\downarrow 0)$ に対し、その部分列 s_n があって

(3)'　$$G_{s_n} \longrightarrow G \quad (\text{汎弱収束})$$

をいってもよい。G_{t_n} は閉区間 $[0, \infty]$ の上の測度で、かつ (2) により一様有界であるから、$G_{s_n} \longrightarrow G^*$ なる部分列 s_n と極限分布 G^* が存在する。点 ∞ に対する G^* 測度は正かも知れない（$G^*(\infty) = 0$ となることもすぐ次に証明するが）。さて、

$$h_\lambda(\tau) = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{1 - e^{-\tau}} \quad (\tau \neq 0,\ \tau \neq \infty), \quad h_\lambda(0) = \lambda,\ h_\lambda(\infty) = 1$$

とおけば、$h_\lambda \in C[0, \infty]$ であるから、

$$\int_0^\infty h_\lambda(\tau)\,G_{s_n}(d\tau) \longrightarrow \int_{[0,\infty]} h_\lambda(\tau)\,G^*(d\tau)$$

又 (1) により

$$\int_0^\infty h_\lambda(\tau)G_{s_n}(d\tau)=\int_0^\infty (1-e^{-\lambda\tau})\frac{F_t(d\tau)}{t} \longrightarrow c\lambda+\int_0^\infty (1-e^{-\lambda\tau})n(d\tau)=\int_0^\infty h_\lambda(\tau)G(d\tau)$$

故に

$$(4)\qquad \int_{[0,\infty]} h_\lambda(\tau)G^*(d\tau)=\int_0^\infty h_\lambda(\tau)\,G(d\tau)$$

$\lambda\to 0$ とおくと，$h_\lambda(\tau)\to 0\ (\tau \neq \infty)$，$h_\lambda(\infty)\to 1$ であるから

$$G^*(\infty)=G(\infty)=0$$

故に (4) から

$$(5)\qquad \lambda G^*(0)+\int_{0+}^\infty (1-e^{-\lambda\tau})\frac{G^*(d\tau)}{1-e^{-\tau}}=c\lambda+\int_{0+}^\infty (1-e^{-\lambda\tau})\frac{G(d\tau)}{1-e^{-\tau}}$$

これから $G^*=G$ が得られる。実際，

$$H^*(\sigma)=\int_\sigma^\infty \frac{G^*(d\tau)}{1-e^{-\tau}}\ ,\quad H(\sigma)=\int_0^\infty \frac{G(d\tau)}{1-e^{-\tau}}$$

とおくと，(5) を λ で割って

$$G^*(0)+\int_0^\infty H^*(\tau)e^{-\lambda\sigma}d\sigma=c+\int_0^\infty H(\sigma)e^{-\lambda\sigma}d\sigma$$

$\lambda\to\infty$ として，$G^*(0)=c=G(0)$．故に

$$\int_0^\infty H^*(\sigma)e^{-\lambda\sigma}d\sigma=\int_0^\infty H(\sigma)e^{-\lambda\sigma}d\sigma$$

従って $H^*=H$　故に $G^*=G$ となり，(3$'$) が証明された。

さて，$f\in\mathfrak{D}(A)$ ならば，$g^*\in E^*$ に対し，

$$(g^*,\,T^\tau f-f)/(1-e^{-\tau})=\left(g^*,\,\frac{T^\tau f-f}{\tau}\right)\cdot\frac{\tau}{1-e^{-\tau}}$$

は，$0\leq\tau<\infty$ で有界かつ連続である（$\tau=0$ では (g^*,Af) の意味にとる）
故に，

$$\left(g^*,\,\frac{T_\theta^t f-f}{t}\right)=\int_0^\infty (g^*,\,T^\tau f-f)\frac{F_t(d\tau)}{t}$$

$$=\int_0^\infty \frac{(g^*,\,T^\tau f-f)}{1-e^{-\tau}}\,G_t(d\tau)$$

$$\longrightarrow \int_0^\infty \frac{(g^*,\,T^\tau f-f)}{1-e^{-\tau}}\,G(d\tau)$$

$$= c(g^*, \Lambda f) + \int_0^\infty (g^*, T^\tau f - f)\, n(d\tau)$$

故に $T_\theta^\tau f$ は $t=0$ で weak derivative が存在する。仮定により E が可分であるから、strong derivative も存在し、

$$\Lambda_\theta f = \lim \frac{T_\theta^t f - f}{t} = c\Lambda f + \int_0^\infty (T^\tau f - f)\, n(d\tau)$$

§3 α位の subordination

$$\psi_\alpha(\lambda) \equiv \lambda^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u}) \frac{du}{u^{\alpha+1}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

$$\psi_1(\lambda) \equiv \lambda \ (\equiv \psi_e(\lambda))$$

とおくと、$\psi_\alpha(\lambda) \in \Psi$ である。

定義　$\psi_\alpha(\lambda)$ による subordination を α位の subordination という。

さて、$0<\alpha<1$ のときには $\psi_\alpha(\lambda)$に対応する $\theta_\alpha \in (H)$ は非減少な path をもち、jump のみで増加する α位の安定過程である。ψ_1に対する θ_1は $\theta_1(t) \equiv t$ なる process であるから、1位の subordination は恒等変換である。

$$(\lambda^\alpha)^\beta = \lambda^{\alpha\cdot\beta} \qquad \text{i.e.}\ \psi_\beta(\psi_\alpha(\lambda)) = \psi_{\alpha\beta}(\lambda)$$

であるから、$\theta_\alpha(t)$, $\theta_\beta(t)$ が独立であれば

$$\theta_{\alpha\beta}(t) = \theta_\alpha(\theta_\beta(t))$$

$\psi_\alpha(\lambda)$, $0<\alpha\leq 1$, は Ψ の部分半群であって、これは $0<\alpha\leq 1$ の乗法のよる半群と同型である。従って α位の subordination の全体は $0<\alpha\leq 1$ に乗法による半群と同型の半群を構成する。

§4 Markov過程の subordination

Markov 過程は、ここで与える定義よりも、もっと一般の意味にも解せられるが、ここでは極めて単純で半群と対応するものに制限する。この制限をしても、普通に考えられている Markov 過程は殆んど含まれる。

S を第二可算性をもつコンパクトな Hausdorff 空間とし、$\mathcal{B}_S$ をそのボレル集合全体とする。$t \in [0, \infty]$ と $a \in S$ とに依存する S の上に測度 $p(t,a,E)$, $E \in \mathcal{B}_S$, があって、次の条件を満すとき 遷移確率系という。

(p.1)　$p(t,a,S) = 1$,

(p.2)　$p(t,a,E)$ は t, E を固定したとき、a に関して $\mathcal{B}_S$－可測

(p.3)　$p(t+s,a,E) = \int_S p(t,a,db)\, p(s,b,E)$

($p.4$) f が S の上の連続函数ならば、$\int_S p(t,a,db)f(b)$ が、a に関して連続。

($p.5$) a の任意の近傍 U に対し、$p(t,a,U) \longrightarrow 1 \quad (t \downarrow 0)$

遷移確率系に対しては、path が高々才一種の不連続点しかもたないようなMarkov過程が存在して、a から出発する path が次の法則に従うようにできる〔3〕(pp. 95−143)． $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し

$$Pa(x(t_1) \in E_1, x(t_2) \in E_2, \cdots, x(t_n) \in E_n)$$

$$= \int_{E_1} \cdots \int_{E_n} p(t_1, a, da_1)\, p(t_2 - t_1, a_1, da_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, a_{n-1}\, da_n)$$

又遷移確率系に対しては、次のように吉田−Hille の意味の半群が定義される。Banach空間 E としては S の上の連続函数族 $C(S)$ をとり、ノルムは

$$\|f\| = \max_{a \in S} |f(a)|$$

で定義する。次に

$$T^t f(a) = \int_S p(t, a, db) f(b)$$

とすれば、$\{T^t, t \geq 0\}$ は吉田−Hille の意味の半群となる。そうして

$$\text{Markov 過程 } x(t) \longleftrightarrow \text{遷移確率系} \{p(t, a, E)\} \longleftrightarrow \text{半群} \{T^t\}$$

なる対応関係は一対一である〔3〕，

さて、$x(t)$ を与えられたMarkov過程とし、$\theta(t) = \theta(t, \omega)$ を前述の Ⓗ の元とする。適当な version をとって ω は $x(\cdot)$ と独立であるとしておく。さて

$$y(t) = x(\theta(t))$$

とおけば、$y(t)$ の path は高々才一種不連続点しかもたない。更に $y(t)$ は Markov過程で、その遷移確率は

$$q(t, a, E) = \int_\Omega p(\theta(t,\omega), a, E)\, P(d\omega)$$

である。実際

$$P_a(y(t_1) \in E_1, y(t_2) \in E_2, \cdots, y(t_n) \in E_n)$$

$$= \int_\Omega p(d\omega) \int_{E_1} \cdots \int_{E_n} p(\theta(t_1,\omega), a, da_1)\, p(\theta(t_2,\omega) - \theta(t_1,\omega), a_1, da_2) \cdots p(\theta(t_n,\omega) - \theta(t_{n-1},\omega), a_{n-1}$$

さて、$\theta(t_1,\omega), \theta(t_2,\omega) - \theta(t_1,\omega), \cdots, \theta(t_n,\omega) - \theta(t_{n-1},\omega)$ は独立であるから、

$$= \int_{E_1} \cdots \int_{E_n} \int_{\Omega} p(d\omega)\, p(\theta(t,\omega), a, da) \int_{\Omega} p(d\omega)\, p(\theta(t_2,\omega)-\theta(t_1,\omega), a_1, da_2)$$

$$\cdots\cdots \int_{\Omega} p(d\omega)\, p(\theta(t_n,\omega)-\theta(t_{n-1},\omega), a_{n-1}, da_n)$$

$$= \int_{E_1} \cdots \int_{E_n} q(t_1, a, da)\, q(t_2-t_1, a_1, da_2) \cdots q(t_n-t_{n-1}, a_{n-1}, da_n)$$

定義　上の Markov 過程 $y(t)$ を $x(t)$ の $\theta(t)$ による subordination という。$\theta(t)$ に対応する $\psi(\lambda)$ を用いて，$x(t)$ の $\psi(\lambda)$ による subordination といってもよい。

定理　$x(t)$ の $\theta(t)$ による subordination に対応する半群は $x(t)$ の半群の $\theta(t)$ による subordination に等しい。

特に $\theta(t)$ としく§3の $\theta_\alpha(t)$ をとって，Markov 過程の α 位の subordination も定義される。

§5　加法過程の subordination

時間的に一様な加法過程（以後簡単に加法過程という）は Markov 過程と見なすことができる。ここで状態空間 S は R' となり，compact でないが，R' に無限遠点 p_∞ を加え，p_∞ から出る path は常にそこにあるということにすれば　$S = R' \vee p_\infty$ となり，上述の Markov 過程となり，その遷移確率系が前述の条件を満していることは容易に検証される。更に加法性から，

$$p(t, a, E) = p(t, a+b, E+b), \quad E+b = \{\xi + b : \xi \in E\}$$

がなりたつ；逆にこれがなりたつような Markov 過程は加法過程である。

さて　Markov 過程に subordination が定義できることは前にのべたが，この subordination は加法過程を加法過程に移す。即ち加減過程の subordination は又加法過程である。

Brown 運動（= Wiener 過程）は加法過程の特殊のものであるから，その subordination は加法過程となる。特にその α 位の subordination は，2α 位の対称安定過程となる。特に $\alpha = \frac{1}{2}$ とすれば，Cauchy 過程が得られる。

§6　Riemann 空間の上の Brown 運動の subordination

S を closed orientable Riemannian space とし　Δ をその上の Laplace - Beltrami operator とする。Δ は $E = C(S)$ の中で定義された線型作用素であって，しかも $\mathcal{D}(\Delta) \equiv C^2(S)$ は $C(S)$ の中で稠密である，Δ

の閉拡大をΛとかくと、Λは連続な path をもつ Markov 過程の生成作用素となっていることが知られていて、この Markov 過程は Riemann 面の上の Brown 運動という。

$\Delta u=-\lambda u$ の固有値，固有函数をλ_i, φ_i とすれば、

$$0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\cdots\longrightarrow\infty$$

であって、

(1) $\qquad u=\sum a_i\varphi_i$

に対して

(2) $\qquad \Lambda u=-\sum_i\lambda_i a_i\varphi_i$

(3) $\qquad T^t u=\sum_i e^{-t\lambda_i}a_i\varphi_i$

となる。

さて、この Brown 運動に $\psi(\lambda)\in\Psi$ による subordination を施してみよう。$\psi(\lambda)\leftrightarrow\theta(t)\in$ Ⓗ とすれば、(1)の u に対し、

(4) $\qquad T_\psi^t u=\sum_i E(e^{-\theta(t)\lambda_i})a_i\varphi_i=\sum_i e^{-t\psi(\lambda_i)}a_i\varphi_i$

それ故に $\{T_\psi^t\}$の生成作用素 Λ_ψ は (1) の uに対し、

(5) $\qquad \Lambda_\psi u=-\sum_i\psi(\lambda_i)a_i\varphi_i$

これから

(6) $\qquad \Lambda_\psi=-\psi(-\Lambda)$

となる。特にα次の subordination に対しては、$\psi(\lambda)$ は $\psi_\alpha(\lambda)\equiv\lambda^\alpha$ であるから、

(7) $\qquad \Lambda_{\psi_\alpha}=-(-\Lambda)^\alpha$

となる。

§7 subordinationによる固有函数の不変性

$\{T^t\}$ を$\psi(\lambda)$で subordination したものを$\{T_\psi^t\}$とする。T^t, T_ψ^t の生成作用素をそれぞれΛ, Λ_ψ とおき、u をΛの固有値λに対する固有函数とする，すなわち

$$\Lambda u=\lambda u$$

これから

$$T^t u=e^{t\Lambda}u$$

となる。$\psi(\lambda)$に対する $\theta(t)\in$ Ⓗ をとると

$$T_\psi^t u=E(T^{\theta(t)}u)=E(e^{\theta(t)\Lambda}u)=E(e^{\theta(t)\lambda})u=e^{-t\psi(-\lambda)}u$$

$$\Lambda_\psi u = -\psi(-\lambda)u$$

定理 Λが固有値λをもち、uがこれに対する固有函数とすれば、uはΛ_ψの$-\psi(-\lambda)$に対する固有函数である。

§ 問 題

subordination に関して考えられる問題を若干あげておく。

1. §1に導入した函数ψは如何なる方法で特長づけられるか（Bochner [5] 参照）

2. $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$のとき、$\psi_3(\lambda) \equiv \psi_2(\psi_1(\lambda)) \in \Psi$（§1参照）を直接計算によって証明せよ。又

$$\psi_i(\lambda) = c_i\lambda + \int_0^\infty (1-e^{-\lambda\tau})\, n_i(d\tau), \quad i = 1, 2, 3$$

とおき、c_3, $n_3(\cdot)$を$c_1, n_1(\cdot)$, c_2, $n_2(\cdot)$ であらわせ。

3. ブラウン運動を$\psi(\lambda)$でsubordinationして得られる加法過程の各時点における分布のLévy分解はどうなるか。

4. 上の方法で得られる加法過程は対称であるが、任意の対称な加法過程はこの方法で得られるか。

5. Arcsine law がブラウン運動に対してなりたつこと、Cauchy過程がブラウン運動から$\frac{1}{2}$位のsubordinationで得られることを利用して、Cauchy過程に対してもarcsine law がなりたつこと（これはKacにより別の方法で直接証明されている）が証明できないか。

6 $\{T^t\}$のα位のsubordination の生成作用素をΛ_αとおいて

$$\Lambda_\alpha \Lambda_\beta = -\Lambda_{\alpha+\beta}$$

が証明できないか（$\Lambda_\alpha = -(-\Lambda)^\alpha$に形式的計算を適用すれば、このことが予想される）。

文 献

[1] P. Lévy : Théorie de l'addition des variables aléatoires, 1937, Paris （新版 ）。

[2] 伊藤 清：確率論、岩波現代数学叢書，1953。

[3] 伊藤 清：確率過程，岩波応用数学講座，1957。

[4] 吉田耕作：位相解析，岩波現代数学叢書 1951。

[5] S. Bochner : Harmonic analysis and theory of probability, Univ. Cal. Press, 1955。

[6] J. L. Doob : Stschastic processes Wiley, 1953。