# Foundation of stochastic processes の解説

確率論，特に確率過程の基礎理論は伊藤先生がその生涯を通じてこだわり続けてこられたテーマであった．確率論に関する先生の最後の教科書というべき岩波講座基礎数学の 3 分冊[1] において，**標準確率空間**や**完全確率測度**[2]の概念が導入され，この制限を課することによって確率過程の基礎理論をより精密に一層深めようと努められたのである．しかしその出来ばえについては御不満であったことがその ‘あとがき’ で読み取れる．そこでより充実した内容で新しい書を出そうと試みられ，それが以下で解説する三つの文献として残されているが残念なことにどれも未完である．それらを文献 I, II, III とする．それらの内容の多くの部分は重なっているが，その配列や用語は若干異なる．ここでは一番内容の充実している I を中心にその内容を紹介したい．

**文献 I**

始めに手書きでそのタイトル

**Foundation of stochastic processes**,

吉田耕作先生への献辞

**Dedicated to Professor K.Yosida**

があり，さらにその Contents, Notations 等がある．これを見るとこの文献は 6 つの章から成っており，1 章と 2 章で確率論と確率過程の基礎理論，残りの 4 つの章で加法過程，マルコフ過程，確率微分方程式，定常過程が論ぜられる予定であった．この後の 4 章の各論の部分は残されていないが，幸いなことに最初の 2 章は完全なタイプ原稿が残されている．

第 1 章で導入される基本的な概念は位相空間レベルで**標準空間**[3](standard space)，ボレル空間[4]レベルで**標準ボレル空間**[5](standard Borel space)，そこでの部分集合レベルで**ボレル集合**や**解析集合** (analytic set)，確率空間レベルで**標準確率空間**[6](standard probability space) や**正則測度**[7](regular probability)，**完全測度**[8](perfect probability)，

等である．そしてこれら諸概念のもつ重要な性質や相互関係が**古典的解析集合論**[9)]の手法，特に**解析演算**[10)](analytic operation) を基本手段に用いて明快に論じられている．

第 2 章では，確率空間を第 1 章で導入された標準確率空間に制限して，まずその拡張定理を Kolmogorov 流に，また Bochner 流に与え，その準備のもとに確率過程の基礎理論が論じられている．確率過程の状態空間は一般の位相空間でよいが，簡単のため実数空間とし，したがって実確率過程を考え，時間区間を $\mathbb{T}$[11)]で表す．Kolmogorov 以来実確率過程 $\mathbb{X} = (X_t)$ は各 $t \in \mathbb{T}$ ごとに与えられた実確率変数 $X_t$ の族として与えられるが，その見本関数 $t \mapsto X_t$ を数学的に考察するためにはより精密化することが必要となる．そのため $t \in \mathbb{T}$ の実関数のクラスのなす関数空間 $\mathbb{F}$ を適当に設定して，確率過程を $\mathbb{F}$-値確率変数として定式化する．伊藤先生は前者の立場の確率過程を **stochastic process**，後者の立場の確率過程を **random function** と呼んでおられる[12)]．そして与えられた stochastic process を random function として与え直すのが確率過程に関する正則化 (regularization) ないし**変形** (modification,version) の理論でそれは Doob によって始められた．関数空間 $\mathbb{F}$ の典型的な例としては連続関数全体 $\mathbb{C}$，右連続かつ左極限をもつ関数全体 $\mathbb{D}$ があるが，もう一つの重要な例として $\mathbb{T}$ 上のルベーグ可測実関数の全体 $\mathbb{L}^0$ が考察されている．この場合の難点は，$\mathbb{L}^0$ の要素は正確にはほとんど全ての $t \in \mathbb{T}$ で一致する関数を同一視した同値類であり，$t \in \mathbb{T}$ を固定したときの $f \in \mathbb{L}^0$ の値 $f(t)$ が確定しないことである．そこで伊藤先生は同値類 $f \in \mathbb{L}^0$ のうちから具合いのよい $\mathbb{T}$ 上の実関数 $Rf$ を一つ定め，関数 $Rf$ によって同値類 $f$ を代表させる理論を展開された．代表元 $Rf$ は regularly measurable function，あるいは canonical measurable function と呼ばれ，その全体 $L^0$ によって $\mathbb{L}^0$ を置き換えることが出来る．$L^0$ はポーランド空間で，正確な意味で $\mathbb{C} \subset \mathbb{D} \subset L^0$ となり，各 $t \in \mathbb{T}$ に対し値写像 $e_t : f \in L^0 \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$ はボレル可測となる．このように工合いよく展開される canonical measurable random function の理論は伊藤先生の 1960 年代の重要な業績の一つである[13)]．

**文献 II**

Chapter1 と Chapter2 の原稿のみが残されている．文献 I のような解析演算を用いた詳しい解析はないので多くの内容が結果の紹介のみで終っているように見うけられる．文献 I にない内容としては，条件つき確率に関わる諸理論がある．

**文献 III**

大体文献 I と II に含まれる内容であるが位相空間ベクトルに関してより詳しい解説がある．

渡辺 信三[*1]

1) 岩波講座基礎数学 確率論 I(1976), II(1977), III(1978), 岩波書店
2) 完全 (perfect) 確率測度の概念は Kolmogorov によって導入された．B. V. Gnedenko-A. N. Kolmogorov: Limit Distributions for sums of independent random variables の英訳版 (英訳 K. L. Chung) に J. L. Doob の解説がある．完全でない測度の例は文献 I の 67 ページから 68 ページにかけて与えてある．
3) この文献 I では標準空間はポーランド空間 (可分完備な距離付け可能な位相空間) の全単射連続像として与えられる位相空間として定義される．距離空間ではブルバキの意味のルジン空間 (espace lusinien) の概念と一致する．
4) この文献では集合とその上の $\sigma$-集合体の組をボレル空間という．可測空間と呼ばれることも多い．
5) 標準空間 (注 3 参照) とその位相的 $\sigma$-集合体 (i.e. 開集合全体を含む最小の $\sigma$-集合体) の組として与えられるボレル空間とボレル同型なボレル空間．ボレル同型とは，1 対 1 両ボレル可測な写像が存在することをいう．
   標準ボレル空間は $[0,1], \mathbb{N}(:=$ 自然数全体$)$, 有限集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ のどれかとボレル同型になるという重要な事実が第 1 章 6 節に証明されている．これは多くの教科書では証明なしの引用のみですまされている．
6) 標準ボレル空間上にその上の確率測度を与えて完備拡大した確率空間である．確率測度は (同型を用いて標準空間で実現すれば) 必然的に $K$-正則 (注 7 参照) かつ完全 (注 8 参照) となる．
7) ここでの正則とは $K$-正則のことで，任意のボレル集合の確率がそれに含まれるコンパクト集合の確率でいくらでも下から近似できることをいう．
8) $\Omega$ 上の測度 $\mu$ が完全であるとは，$\mu$-可測写像 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ に対し，その像測度 $\mu\circ f^{-1}$ がその $\mathcal{B}(\mathbb{R})(=\mathbb{R}$ 上のボレル集合全体$)$ 上の制限の完備拡大になっていることである．この概念は Kolmogorov が導入した (注 2 参照)．L. Schwartz は 1960 年代に非局所コンパクト空間上のラドン測度の概念を導入したが，それはもちろん完全な測度であり，Schwartz はこの性質を測度が ‘image measure catastrophe’ を惹きおこさないという云い方で述べている．(Schwartz の講演記録:溝畑-渡辺 (1966) 数学 参照)

[*1] 京都大学名誉教授

9) 古典解析集合論は Souslin, Lusin, Sierpinski 等，所謂ポーランド学派によって 1910 年代に発展させられた位相空間論や実関数論に関わる理論でそれは特にルベーグ積分論を深化発展させた．伊藤先生はこの未完の文献において古典解析集合論の手法，特に解析演算を基本手段として用いることにより確率論の基礎理論を一層充実深化させた．未完の文献ではあるがこの部分の明快な解説が残されたことは大変喜ばしい．

10) 通常の測度論では高々可算無限個の集合に関する演算が基本的に用いられるが，解析演算は非可算集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$($\mathbb{N}$ は自然数全体) で添字付けられた集合族に関する演算で，解析集合論における基本手段の一つである．この演算が本質的に用いられる確率論の文献はそう多くなく，伊藤先生のこの文献以外では K. R. Parthasasathy: Measures on metric spaces, Academic Press(1967) がある程度だが，しかしそれに代わるものとして例えば P. A. Meyer: Probability and Potentials, Blaisdell Pub. Co(1966) では compact paving の概念，C. Dellacherie: Capacités et Processus stochastiques, Springer,(1970) では rabotage の概念が用いられている．

伊藤先生のこの文献では Parthasarathy の本に比べて，より詳しい理論とその応用が明快に論じられており，これを今回公開する意義は大きいと思われる．

11) 文献 I では $\mathbb{T} = [0, 1]$ としている．

12) 前者を弱義の確率過程，後者を強義の確率過程と呼ぶことも多い．

13) この先生のお仕事は，1969 年日本で行われた関数解析学の国際学会で発表された．K. Itô: Canonical measurable random functions, Proc. Int. Conf. Funct. Anal. Rel. Topics, 369-377 (1969)