

# 大学における数学基礎教育で 今何が起きているか

西森 敏之

## 1. はじめに

いま大学の教育はさまざまな問題を抱えています。ここでは、数学に関する初年次の段階、すなわち基礎教育の現状を取り上げます。

大学での初年次をどのように過ごすのかは、学生にとって以後の大学の4年間で有意義なものになるかどうかということに大きく関わってきます。多くの学生が家族から離れて一人暮らしを始め、自由で開放的な環境に置かれます。悪くすると、大学に入ったとたんに次に何を目標にしてよいか分からなくなったり、自己管理ができなくて不規則な生活に入ったりする者もでてきます。

授業の進め方も高校と大学ではがらっと変わります。大半の大学の教師は、手取り足取りしては教えず、自ら学ぶ者という風に学生を大人扱いします。このやり方は最近だんだんうまく行かなく成ってきているようです。「大学の先生より予備校の先生のほうが役にたつ公式を教えてくれる」という学生も出てきます。

ここまで、問題点を少しばかりみてきましたが、以下の本論での話の流れに触れておきます。現在の大学の基礎教育を見る前に、比較の意味で、120年くらい昔に日本に初めて大学ができたころの様子を見ます。その後で、本論のメインの部分として、日本数学会のあるワーキンググループに

よる学力低下に関する調査の結果を紹介します。さらに、大学に入る前の状況についてみるということで、日米の高校生の微積分学に関する学力比較調査を2000年にしましたので、その結果を簡単に紹介します。最後に、まとめをして終わります。

## 2. 札幌農学校と数学

明治9年(1876年)に、アメリカのマサチューセッツ農科大学の学長ウィリアム・S・クラークを教頭として、札幌農学校が開校しました。ちなみに東京大学は次の年に創立されました。一期生は東京英語学校(東京大学予備門の前身)から10名、東京開成学校(東京大学の前身)から1名、そして(明治5年に東京に設置された開拓使仮学校が明治8年に札幌に移り改称した)札幌学校からの13名、計24名が第1期生となりました。その後学力不足や進路変更での退学があり、1年の課程を無事終了したのは16名で、最終的に13名が演武場(現在の時計台)での卒業式で日本で最初の学士の学位を受けました。2期生には、5千円札の新渡戸稲造(入学時15才)や内村鑑三(入学時16才)・宮部金吾(植物学者, 入学時17才)・広井勇(橋梁学・港湾学, 入学時15才)らがいました。

札幌農学校は修業年限4年ですが、クラークが学長をしていたマサチューセッツ農科大学と双子の関係にあります。それで初期(8期生まで)には、カリキュラムのうちの大きな部分が教養教育(リベラル・アーツ)に当てられていました(表1)。

数学については、今風にいえば「代数学」6単位と「幾何学」6単位が教えられていました。クラークが連れてきた教師たちはマサチューセッツ農科大学で使われていたものと同じ英語の教科書を使っていたと考えられます。1888年度の農学校図書館の蔵書目録が残っていますが、同じ本が20冊

表 1. 札幌農学校（4年制）の授業科目のうち1, 2年生分

1年前期	代数学（6）、化学物理と無機化学（6）、 英語（6）、日本語（4） Military Drill（2）、Manual Labor（6）、計30時間
1年後期	幾何学（6）、有機化学と実用化学（8）、 農業（4）、英語（2）、弁論術（2）、幾何画法（3）、 Military Drill（2）、Manual Labor（6）、計33時間
2年前期	農業分析化学（8）、植物学（3）、農業（4）、 人体解剖学と生理学（3）、英語（2）、弁論術（2）、 Military Drill（2）、Manual Labor（6）、計30時間
2年後期	三角術と測量術（6）、定量分析化学（8）、 植物学（4）、農業（2）、翻訳（2）、図学（3）、 Military Drill（2）、Manual Labor（3）、計30時間

（注）実際にはこの通りに行われたわけではなく、年によっても変わったようです。

くらいあるのが教科書だとねらいをつけて、北大図書館が所蔵している「農学校文庫」に現存している類書から内容が推定できます。

「代数学」の内容は、現在の高校生が習うような文字式の加減乗除、1次方程式、巾・巾根の計算、2次方程式、順列・組み合わせ、数列・級数、対数、方程式論などです。内容の一例を表2に示します。「幾何学」は教科書らしきもの（H. N. Robinson “Analytical Geometry”）では、円、楕円、放物線、双曲線を座標平面上で方程式を使って調べることや、空間における直線平面の方程式が扱われています。

当時の駒場農学校（東大農学部の前身）などでは外国人教師の授業には

表2. H. Robinson “University Algebra” の330ページの部分訳

---

練習問題

1. 級数  $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$  の逆をもとめよ。

答:  $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - \dots$

2. 級数  $y = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \dots$  の逆をもとめよ。

答:  $x = y - 3y^2 + 13y^3 - 67y^4 + 381y^5 - \dots$

3. 級数  $x = y - y^2/2 + y^3/3 - y^4/4 + y^5/5 + \dots$  の逆をもとめよ。

答:  $y = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

.....(省略).....

**384.** 級数の逆を求める主要な目的のひとつは、級数の和が知られているときに、未知数の近似値を得ることである。実際には、

1.  $1/4 = 2x - 4x^2/3 + 6x^3/5 - 8x^4/7 + \dots$  のとき、 $x$  の近似値を求めよう。まず

$$s = 2x - \frac{4x^2}{3} + \frac{6x^3}{5} - \frac{8x^4}{7} + \dots$$

とおいて、 $x$  と  $s$  を変数と見なそう。この級数の逆を公式で求めると

$$x = \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} + \frac{13s^3}{360} + \frac{5s^4}{1512} + \dots$$

となる。そこで、この式に  $s = 1/4$  を代入すると、結果は .....

---

通訳がついていたようですが、札幌農学校ではほとんどの授業は外国人教師により英語のみで行われました。学生の苦勞は並大抵のものではなかったようです。

話を一足飛びに現在にもってくると、今の大学1年生の数学としては、一般的には、「微分積分学」と「線形代数学」という2つの科目が中心に据えられています。これらの科目は理系の学生には必須の内容を含んでいます。微分積分学については、札幌農学校はもともとは農学の単科大学であったのが、1887年に農学科と工学科になって、そのとき工学科の学生に対して2年後期に微分、3年前期に積分の科目が始められました。線形代数については不明ですが、札幌農学校の1887年のカリキュラムにはありませんでした。（以上では、「北大100年史」(1982)、「農学校物語」(札幌市教育委員会編、1992年)を参照しました。)

### 3. 学生の学力低下に関する調査

1999年に岡部・戸瀬・西村編「分数ができない大学生」(東洋経済新報社)という本が出版されてから、学力低下の問題が大学の外でもようやく話題にのぼるようになりました。現在では続編として「小数ができない大学生」、「算数ができない大学生」の2冊が出版されています。

それより先の1994年に、日本数学会では、学生の学力低下によって大学で数学を教えることが困難になってきているという事態を受けて、名古屋大学の浪川幸彦らによって、「大学における数学基礎教育のためのワーキング・グループ(数学基礎教育WG)」を設立しました。1年間の準備的研究ののち、科学研究費による総合的研究を、1995年からの2年間と1997年からの3年間の2回行いました。前の研究ではおもに数学基礎教育の現状の調査を行い、後の調査では対策を考えました。ちなみに上の本の編者の3

名もそれから筆者もこのワーキンググループのメンバーでした。

1995年11月に各大学で数学教育を担当しているグループと数学基礎教育WGの連絡網を作るときに、浪川が簡単なアンケート調査を行い、筆者が回答を集計しました。アンケートの質問は次の4つでした。

質問1) 大学生の学力は低下していると思いますか？

質問2) 低下していると答えた方に：それに気付かれたのはいつごろですか？ 19〇〇年頃から？

質問3) 特にどんな知識・能力が低下しているとお感じですか？ なるべく具体的に、例なども含めてご回答下さい。

質問4) その低下の原因は何にあるとお考えですか？

回答は最終的には日本全国の大学の数学基礎教育を担当している102のグループから得られました。結果について簡単に紹介します。

### 3.1 質問1) への回答

質問1)「大学生の学力は低下していると思いますか？」の回答は次の通りです。

- ・低下している ..... 79
- ・変わらない ..... 10
- ・向上している ..... 0
- ・分からない ..... 8
- ・無回答 ..... 3
- ・その他 ..... 2

結果を分析する前に言葉の意味を確認しておく必要があります。「学力低下」の「学力」とは何かということが質問には明確に述べられていませんが、回答をすべてみた感じでいうと、回答者たちは「大学初年次の数学の授業を理解することができるかどうか」をもとに判断しているように窺えます。質問1)の結果からは、向上しているという答えが皆無であることから、残念なことでありますが、大学生の学力低下は実際に起こっていると結論せざるを得ません。

### 3.2 質問2) への回答

質問2)「低下していると答えた方に：それに気付かれたのはいつごろですか？ 19〇〇年頃から？」の回答の詳細は省略しますが、2つのことが類推できます。ひとつは「1985年から1990年頃にかけて急激な学力の低下があった」ということです。これは、東京大学の工学部への進学振り分け学生の学力調査という別の切り口からの調査の結果(図1)とも一致して

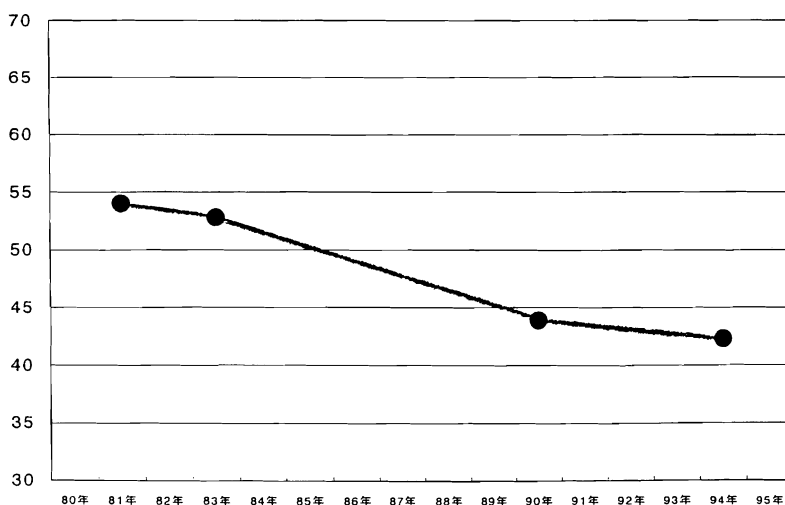


図1. 東大工学部の調査（数学教育WGの科研費報告書（1997）参照）

います。もう一つは「共通1次テストが始まってから連続的にゆるやかな低下が続いている」ということです。

浪川の見方では、「急激な低下」は1980年頃に実施された小学校・中学校・高等学校の指導要領の改訂が主な原因であり、「ゆるやかな低下」はセンター試験に代表されるマークシート方式の試験が主な原因であるということです。また、別の研究者の意見では「ゆるやかな低下」については共通1次試験から科目選択性へ変わったセンター試験への変更も大きいという意見もあります。これは高校生が以前より少ない科目しか勉強しなくなって思考力が十分育たなくなったという意見です。

### 3.3 質問3) への回答

質問3)「特にどんな知識・能力が低下しているとお感じですか? なるべく具体的に、例なども含めてご回答下さい。」は自由記述式の回答をもとめました。内容に従って分類すると次のように成ります(複数回答)。

(1) ベーシックな能力(回答数31):多くの回答が数学の能力もそうですが、それ以前にすべての学問の基礎として必要な能力が低下していることを指摘しています。例えば、読解力、表現力などの日本語の能力、想像力、直感力。幾何的能力、思考力、問題解決力、応力などです。

(2) 数学的な考え方(回答数58):これは数学を理解するために最も重要なことですが、すべての項目の中でもっとも多くの回答がありました。様々な言葉が使われていますが、「抽象的な概念が理解できない、または拒絶反応をおこす」、「抽象的思考力、論理的思考力が低下し、証明・論証が苦手である」などにまとめられます。

(3) 計算力がない(回答数20):「まえから数学的な考え方はできていなかったが最近では計算力も落ちている」など。

(4) 知識が身に付いていない(回答数17):「知識がばらばらで断片的で



ある」、「高校で習ったことや大学で学んだことについて基礎知識が身に付いていない」など。

(5) 自分で考えない (回答数13): 「自分で積極的に考えない」、「自分で考える能力がない」、もっとひどい場合には「自分で考えることを拒絶する」など。

(6) パターンの (回答数16): これは(5)と関連する。「型にはまった問題はできるが、それからはずれると急にできなくなる」、「解法のパターンを欲しがる」など。

(7) 無気力 (回答数27): 「元気がない」、「意欲がない」、「問題を最後まで考える根気・忍耐力がない」など。

(8) 数学・学問に興味を持たない (回答数18): これも(7)に近い。「好奇心がない」、「数学の面白さが分からない」、「数学を必要とは考えていない」、「学問に対する積極性がない」など、数学あるいは学問に対するモチベーションの不足の問題です。

学生の能力が低下しているという以上のような回答の他に、少数ではあるが、「学力が昔に比べて落ちているかどうかについては必ずしもそうは思わないが、確実に質的には異なってきたと思う」、「好奇心の低下を感じます。ですから、能力は低下していないのかもしれませんが」というような回答や、「女の子が理・数に進出。女の子の方が元気がいいし、熱心でよく勉強する」などの回答もありました。

無理を承知でひとことでまとめると、大学での数学の授業を理解するのに必要な基礎的な力が低下していると結論されます。

### 3.4 質問4) への回答

質問4) 「その低下の原因は何にあるとお考えですか？」も自由記述式の回答を求めました。内容に従って分類すると次のように成ります(複数回

答)。

(1) 高校までの教育に原因がある(回答数45):「教科書に問題がある」,「数学の授業時間が減少した」,「学習指導要領に問題がある」,などの制度的問題や,「考える数学を教えない」,「計算のみを評価する」,「数学のマニュアル化」などの教え方の問題,さらに「塾,家庭教師におぜんだてをしてもらって勉強する」などの個人の学習方法の問題がありました。

(2) 大学入試のあり方に問題がある(回答数33):「センター試験が考え方を一つの枠にはめていて良くない」,「センター試験による輪切り現象」,「偏差値教育など受験のための教育」,「暗記型の勉強になった」など入試体制とそれに対応するための受験勉強の弊害が指摘されています。

(3) 大学の大量化(回答数10):「18才人口に占める大学進学者の割合が増加した」,「その状況に大学が対応できていない」などであるが,この項目は回答があまり多くはありません。

(4) 学生のメンタリティに問題がある(回答数30):これは学生についての指摘ですが,「意欲がない」,「考える力がない」,「勉強不足」,「数学は必要ないと考えている」,「学問に興味を持たない」,「本を読まない」などの回答がありました。

(5) 社会的風潮に問題がある(回答数18):「実学思考が強調され,哲学的思考を避けようとする社会的風潮」,「カリキュラムの(1991年からの)大綱化による一般教育軽視の風潮」,「知的なものを軽視する社会的風潮」,「コンピュータの普及によりただ計算できればよいと原理的なものを軽視する傾向」などがあります。そのほかに「数学だけをやっても就職口がない」という学生の切実な認識もあります。

(6) 原因は特定しがたい(回答数6):「学生の狭義の学力低下の範疇にとどまらぬこの国の知的崩壊が何に由来するのかは約言しがたい」など。

学力低下はさまざまな原因が複合的に作用して起きていると考えられま

すが、ここには、実に多くの論点が指摘されています。さまざまな学生がいて、学力低下の様相も多様であるので、回答者の観察した学生ごとにニュアンスの異なっている原因が挙げられているのだと解釈できます。

#### 4. 高校生の日米学力比較テスト

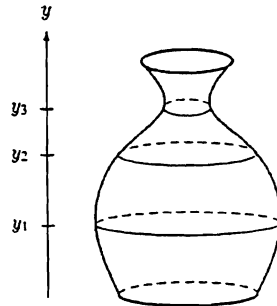
大学入学前の学生の学力はどのようなものでしょうか。学力の在り方に興味があります。

2000年の5月から7月にかけて、アメリカの数学者 T. ジャドソンの発案で日米の高校生の数学に関する学力調査を筆者と2人で行いました。同じ問題による比較調査はこれまでにはあまり無いようです。

テストの課題としては、日米で同じような内容が教えられているということで、微積分を選びました。実際には、概念的な理解力を調べる「概念問題」(Part I) と、日本でいえば「大学入試問題」、アメリカでいえば「AP Calculus」のような「総合問題」(Part II) の2種類の筆記テスト(図2, 図3)を用意して、55分ずつ10分の休憩をはさんで行いました。

対象となる高校生としては、アメリカはポートランドの大学進学に関してトップレベルのある高校(ポートランド高校と仮称)の3年生を選びました。学生数は全部で18名です。アメリカではそもそも微積分は優秀な大学進学希望者にしか教えられていませんので、これだけしかいないわけです。日本側は札幌のトップレベルの高校(札幌高校と仮称)の3年生を選びました。理系3クラス73名です。この高校ではテストの時点で数学IIIの教科書は終えています。テストの時期は、アメリカの高校生は高校の卒業試験終了直後で、日本の高校生は3年の夏休み直前というタイミングです。この2つの高校は、どちらもトップレベルの大学への進学者を輩出している高校であり、比較の対象として釣り合いがとれていると考えてよい

[ I - 1 ] 下図のような花瓶を考えよう。花瓶に一定のわりあい（単位時間当たり一定の体積）で水を満たしていくことにする。



(a) 時刻  $t$  での水の深さ  $y = f(t)$  のグラフの概形を描け。さらに、そのグラフ上で凹凸が変わる点を指摘せよ。

(b) どの深さで  $y = f(t)$  の増える速さが最大になるか？ また、どの深さで最小になるか？ さらに、これら2つの深さでの  $f(t)$  の増える速さの比を見積もってみよ。

図2. Part I の概念問題の例

[ II - 1 ] 関数  $f$  を

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & (x \leq 1 \text{ のとき}) \\ x^2 + kx + p & (x > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。

(a) 関数  $f$  が  $x = 1$  で連続かつ微分可能になるように、定数  $k$  と  $p$  の値を定めよ。

(b) (a) のように定数  $k$  と  $p$  を定めるとき、 $f$  が増大する区間を（もしあれば）列挙せよ。

(c) (a) のように定数  $k$  と  $p$  を定めるとき、 $f$  のグラフの変曲点を求めよ。

図3. Part II の総合問題の例

でしょう。

実は、筆記試験のほかに、ポートランド高校は全員18名、札幌高校は能力別トップのA組26名に、それぞれ30分程度の面接をしました。内容はすべてテープおこしが完了しましたが、分析が終わっていません。

ここでは、筆記試験の結果だけを紹介します。札幌高校とポートランド高校を比較するのに、2種類のテストの成績を平面にプロットしたものが図4です。

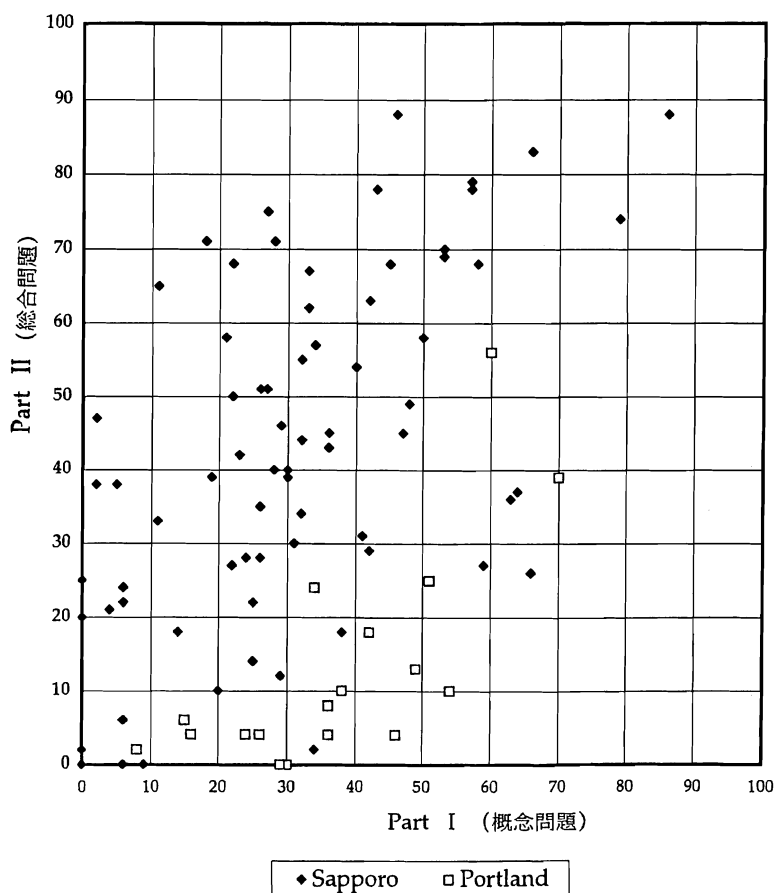


図4. 札幌高校 vs ポートランド高校

結果は一目瞭然ですが、2つのグループは平面上で対角線の上下にきれいに分かれています。総合問題は札幌高校の学生が良くできていますが、概念問題に関しては両者にあまり差は見られませんでした。この図は色々に解釈できます。「日本の高校生は良くできるようではあるが概念的理解はアメリカと対して変わらない」とか、「アメリカでは概念理解を重視する授業を行っているとかいう話を聞くが...」とかあり得るわけです。それでも、とにかく平面上の分布をみれば、日本とアメリカで学力のありようが全く異なるということは歴然としています。

アメリカの高校での数学教育は実際には日本よりはうまくいっていないようです。アメリカの大学で教えた経験を持つ或る知り合いの話では、アメリカの高校は日本の大学のように学生の意識が勉強以外のどこか違う所にあるということです。もっともテストの対象に選んだようなポートランドの進学高校には当てはまらないかもしれません。

高校卒業時では学力のありようがかなり異なるので、大学初年次の数学教育は日米でかなり違うことになります。日本では大学入学後に数学科以外の理系の学生はあまり数学を勉強したがない傾向がありますが、アメリカでは大学に入学後に理系の学生は本気になって数学の勉強を始める、あるいは始めさせられるようです。

## 5. まとめ

2001年9月29日に「北海道地区大学ガイダンスセミナー」という会があり、北海道内の高校と大学の先生たちが集まって意見交換を行いました。そのときに紹介された北海道工業大学の学生の追跡調査の結果では、さまざまな入試方法のうち専門高校(工業高校のこと)から推薦入試で入学した学生のグループが、学業成績、卒業率、留年率などで最も良いということ

とです。そして、最も悪いのはセンター入試の成績だけで合格してきた学生たちのグループであるということです。講演された先生の分析では、専門高校からの学生はすでに3年間工学の勉強をしてきて内容がわかっているさらに高度の工学を学びたいという明確な目標があることが、英語などの学力ではセンター入試からの学生よりも劣るというハンデを乗り越えさせているのではないかということです。それに比較して、センター入試の成績だけでのグループは、学びたいということだけでなく入れるという理由で入学してくる割合が多いと考えられ、専門の授業と学生のやりたいことの間 mismatches が起こり、意欲低下につながっているのではないかという見方です。

大学での数学基礎教育にとっては、数学そのものの学力不足も困ったことではありますが、(学力低下に関するアンケート調査の回答にもあるように) 学生の学ぶ意欲の問題もまた、上の例のように大きいのです。この問題についてはさまざまな考え方があり得るでしょうが、学生の意欲を引き出すことがもし可能であれば、有意義な授業となるのではないかと考えています。

学力低下と学ぶ意欲の問題は、大学での数学基礎教育担当者の悩みの種であるばかりでなく、極論すれば日本の将来にも関わる重要問題ともいえます。

(にしもりとしゆき・北海道大学高等教育機能開発総合センター)