平成17年 日本数学会年会 市民講演会

素数の翼に乗って

本橋　洋一

日本大学理工学部

www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~ymoto/

平成17年3月26日 14:00~15:20
日本大学理工学部 駿河台 CST ホール

目　次

序

素数は永遠の財宝。幾千年にも渡り慈しまれてきました。今日も多くの数学者がより深く素数を観ようと日々努めております。私もそのようにして幸運にも40年余を倦む事無く過ごして参りました。以下に述べますのは、折々の歴史散策や旅にて心の隅に蓄積された印象記の一部であります。私の思いの幾ばくかを共有して頂けることとなれば幸いです。

数式皆無とお約束したため、素数に関する知見そのものをご覧に入れることはせず、専ら雰囲気をお伝えすることに始終いたします。もっとも、おしまいの方で禁をほんの少し破りますが。また、この講演での神話などについての私の考えは、何ら正統的ではない可能性があります。ここで述べる事はあくまでも、それら古典を時につれて読み進むうちに触発されて得た感想や類推であり、なんらかの専門的な主張をなすものでは毛頭有りません。数学研究の経験で得たものの見方、輝く特殊と永遠の普遍性を求める、にて自由に遊んでみました。

そのような文脈に沿って、意味をお採り下さい。但し、古代メソポタミアに多く言及しますのは、故あってのことであります。

ともあれ、上野谷中のとあるお寺にて拝見しましたが、「高いと思っても低いのが教養。低いと思って高いのが ....」とのこと。まさに心せねば。

1. 始めに

演題は、勿論彼の「うたの翼に乗って」から頂戴いたしました。古今集の序文に「力をも入れずして天地を動かし、 ... 」と在りますことは余りにも良く知られておりますが、うたの本質を言い抜いて真に感動を呼ぶ言葉です。天地の諸々の変転を引き起こす姿無くも漲る純粋な存在。その様々な発現を人は鋭敏に感じてうたを詠むのでありましょう。天地とうた、と云うこの世の二元性に紀貫之等編者は限りない思いを馳せたのではないでしょうか。実は、この「二元性」に類いする現象が素数研究の根源的な場面でも観察されます。それを垣間見る所までご同道頂ければ幸いです。素数は、後に述べます様に、人知の源にある堅き存在の一つであります。素数をとりまく諸々の秘密を明かそうと数学者は努めて来ました。勿論、寄与したものは素数に関する考察ばかりではありませんが、結果として編み出された精密科学としての数学は現代の快適な文明を支える柱の一つとなりました。しかし、数学者は素数や美しい特殊現象にて導かれるものの、己が文明の効率化に寄与するなぞとは思いもよらなかったのであります。いや、いまだにその意識は殆ど無いのであります。さながら歌人がうたを詠おうと努めるが如く、数学者はひたすらに妙なる定理を求めて漂うばかりです。定理はうたなり、と言えましょう。

一方、翼は人々の思索が何ものかを拠り所として歴史を重ねて来た事実を示唆します。これが、お話のもう一つの主題であります。学問の如何なる分野であれ、その成り立ちを無視するならば良き種を後の世に伝えかねます。温故知新は真理であります。ここで、うたと数学に再び共通点が見られます。共に、着想を為した人への真摯な敬いを無くしては、成立しえません。我らが聖典と言える万葉集は数学者にも切なる教えを与えている、と私は読みます。すなわち、夫々のうたの出所を明らかにすることに万葉の編者は努力を注いでいると思われるからです。謀反により死を賜った者の最期のうた、防人のだれかれのうたをも簡潔な手がかりを添えて今に伝えております。真に、古今集の「このうたの文字あるをや」の心です。西の世界でも、Verva volant. Scripta manent.　意訳するならば、「生き残るひとはいない。残るは文字のみ」でありましょうか。

話の筋が変わりますが、研究発表、講演あるいは講義は舞台芸術の一形式であります。つまり、再現芸術と捉えるべき、と私は考えます。研究者の大切な一面である再現能力につき皆様に気付いて頂きたい訳であります。演奏家が楽譜を読み自らの解釈にて作曲家の意味する所を再現しようとするのと同様に、数学者は論文を読み著者の思考を辿り発見の感動を分ち持とうとします。研究発表のときには、参考とした先人の道に敬意をこめ、なおかつ自らの発見の感動を再現し、聴衆に正しく伝え得る事を願う訳であります。通常の講義でもこれは大差ないことであります。その科目を曾て初めて学んだときの感動と共に、自らの研究の進展に沿って深まる科目への理解を背景として学生諸君に対面する訳であります。教授することにより

学びえることの尊さは測り知れません。音楽の素養が無くとも人は演奏の質についてかなりの判断を出来ると思われますが、夫々を学生諸君と講義に置き換えても同様でありましょう。聴衆は常に恐るべき目利きであります。

ところで、数式を用いないことは、正直に申しまして大変な制約であります。そのために、神話と数学との類比などを多少無理して持ち出すことになります。しかし、一方で、一般に数学の必須手段とされる数式・図形・論証を備えるだけでは実は数学研究を始めることは出来ません。何故か説明困難ですので、音楽は楽譜だけでは成立しないと云う恐らくより身近な事実になぞらえて頂きたいと思います。逆に申しますと、かなり思い切った説となりますが、論証への理解無しに数学研究をなすことは可能であろう、と思います。確かに、私の経験でも、論証のみを拠り所として発見を為した経験は皆無であります。また、論証を恐らく良く理解せずに始終した大天才数学者も存在します。道無き道を行く旅路の果て、視界は突如開けるのであります。論証は多く言い訳に過ぎない。

数学上の発見はいかに為されるかは大変興味ある話題ではありますが、幾ら議論しても無駄でありましょう。人は rational であるとは到底思えない、とだけ述べておきます。但し、数学者が何かを理解し始めた瞬間に「みえた！」と思うのは洋の東西を問わない、という事実には注目すべきでしょう。「観る observe」は学問の根幹であります。論証に至らずとも、誰それの observation として論文などに敬意を持って言及されることが多々あります。思うに、お釈迦様は「よく目覚めている方」でありました。故に論証はせずとも全てを観る事がお出来になったのです。

因みに、20 数年前にボンベイにある Tata 数学研究所にて後に触れます「篩理論」の研究をしていた際にうかがったお話をいたしましょう。観る、ということの超絶技巧とも言える挿話です：

ロシアが月探査ロケットを打ち上げ、地上からは見えない月の裏側の写真を史上初めて撮る、と云う話題が世界中を駆け巡っていた時の事です。カルカッタの高名な行者が、求めに応じて瞑想に入り月面の裏側を描き、それを数学者を含む信頼すべき人々の許にて金庫に保管しました。実際に写真がもたらされ、件の絵と較べますと、驚いたことにほぼ一致したそうであります。そして、勿論、いかにして月の裏側をみたのかが問われました。行者曰く、「簡単なことである。自らの精神的存在を拡大して行けば、月を自らの内部に取り込み、我は月面を自在に観ることが出来る。貴殿等には信じ難いことであろう。しかし、例えば数学者は数学的事実を観ることが出来るであろう。それは、その数学者が存在を拡げその事実を自らの内部に取り込めたからである。私は、数学者のように特殊な方向にのみ存在を拡張するのではなく、あらゆる方向に自らを拡大出来るのである。その違いだけだ。」

2. 自然数

この世には「自然な物」と「作られたもの」とが在る、と言われますが、整数、なかんずく自然数 $1, 2, 3, \ldots$ はその名の通りに根源的な存在に感じられます。では、何処にあるのか。固体のような存在とともに遍く宇宙に漂うかのようにも思えないか。この問いを問う度に「鉢多良の月影」と云うお話を私は思い浮かべます。誠の心が全ての人に宿ることは、水を張り胸に抱

く鉢に等しく月影が宿るが如し。つまり、自然数あるいはより広く「数」は全ての人の心に等しく欠ける事無く宿っているのです。先ほどの行者の言う「自ら」とは、心の中の極く一部ではないでしょうか。

余談ですが、私は「複素函数論」と云う講義を長年受け持っておりまして、毎年その初回の講義では必ず「数の存在と全体像」について話すことにしております。数は何処に在るか、と学生諸君に問いかけて始めます。勿論、「心の中に」との応答を期待してのことです。以前は戸惑う様子でしたが、近年は先輩のご指導があるようで、待ってましたとばかりの反応があります。因みに、函数は関数と同じです。更に余談ですが、鉢多良 = patra は「はち」の語源とのこと。このような日常の言葉がヒマラヤの向こうからやって来たとは。

これから神話の世界に属することに言い及びますが、それが「原初」の学問の形ではなかろうかと思うからであります。人の世ばかりか恒星や星座の世界すらも不変では無い事に古代の人々は気付いておりました。書き下された歴史 5000 年を遥かに超える約 26000 年を周期とする歳差運動の発見は、久遠の昔に為されたとの説もあります。そのような実世界の変転を超えて、何か永遠不滅の真理を伝え抜こうとの意思がいずれの神話にもあります。この意味では数学も全く同じであります。従って当然ながら、数学的思考の原型が神話の構成にも認められます。

典型例として古代 Sumer 神話における「人の定義」があります。それは人間が何故必要か、というお話にうかがわれます。神様は畑を耕し作物を作る事が出来ない。しかし、お食事をなさらねばならない。そこで神様は自らの血と粘土から人をお創りになり、農業を教え作物を納めさせた、とのこと。引き換えに神様は人を守らねばならない訳です。存在の見えない神様を示唆するに、存在が見える農民の役割を用いる、という論法と私は思います。同様のお話が或る古代民族の「母の定義」にも見えます。子供達は全て神様のものである。従って子供達を守ることは神様の大切な役目である。しかし、神様はあれこれ雑用が多くて、常に子供達の側にいて上げることは出来ない。そこで神様は母という役割をお創りになった、と云うのです。何故神様はお食事をなさるのか、何故子供達は神様のものなのか、なぞとは問わない。農民と母親の偉大さを思わせ、それを包む調和の世界を暗示する。古代の人々の深い知恵に感動いたします。

現代の数学にても、何かの数学的存在を証明するに当たって間接的に議論を進めることが多々あります。つまり、知られている事実から発して「そうならねばならない」と結論しますが、具体的にその新事実を構成することが困難な場合があるのです。それでも数学者は一応の満足を表明します。具体的構成に挑むことは多く次の世代の責務となります。整数に関する様々な結果にても具体性を欠くがために専門家を日々悩ませているものが沢山あります。後にそのような典型例のお話をいたします。先の神話で大切なことは、その選択の理由を何も言わずに、農民と母親の役割が採り上げられていることであります。これは神話に込められた重要な着想です。数学でも、どの事実から演繹を始めるかは正に着想あるいは観察であります。何故その糸口に気がついたかは無明の中であります。成る程、論文では証明が展開されています。しかし、前にも申しましたが、それは一種の言い訳でもあります。

ある大数学者はいみじくも言い抜いております。「自然数は神様がお作りたもうたもの。

他は全て人の為せる物。」　私も真に同感であります。皆様はいかがでしょうか。応用問題として、数学者を定義してご覧になれますでしょう。そうです、数学者の役目は、人々全てに等しく配された「数の世界」の不思議を見守り、後の世に正しく言い伝えて行く事であります。とりわけ、誰がその観察を為したかを一切の偽り無く清らかに。思うに、江戸中期の和算家が発見の感動を「算額」として神社に奉納したことは、我らの祖先の為せることとして誇るべき事跡でありましょう。神に捧げるに偽わりがあろう筈が在りません。氏神様達は驚き微笑んだことでしょうが。

整数についての研究分野を「数論」と云います。数論にて新事実を発見するのはまことに困難であります。これは、仏像や聖母子像を描く困難に類似するのではないかと、時に思います。共に、描き尽くされたものを描くことに挑戦することであり、尋常な研鑽では歯が立ちません。たとえ何らかの発見が為されても、殆どが価値を失う。いや、これは浅薄なものの見方かも知れません。忘れ去られていた論文が突如新しい光を浴びて躍り出て来ることもあるのですから。私も、自身の 35 年も前の小論文でそのような経験を最近いたしました。新たな知見は何であれ後に来る人々の為に共有出来るようにしておくべきかも知れません。

道草を一つ。数論上の事実は物理学上の発見と類似し、従って、数論は数学の中の物理学である、としばしば比喩的に言われます。私は、しかし、何となく賛同しかねます。数論に現れる大切な数は立派な雰囲気を漂わせるものであるが、物理学に現れるものはそれほどに思えないからであります。しかし、これは上に縷々述べた事共と矛盾するかも知れません。昭和天皇のお言葉の一つに、「この世に雑草と云う名の草は無い」とあります。同様に、この世に意味の無い数は無い、と言えましょう。それにしても不思議なのは、全ての人の心にあるに違いない数論的事実の立証に、努力を必要とすることです。時にはなんと数百年の努力が。故小平邦彦先生から訊かれました。「何故、先人の論述を理解するのに努力がいるのか」と。つまり、物理学で発見された現象のように、全てではないにしても、「見て直ぐ分かる」と何故数学では出来ないのか。あのとき私は絶句いたしました。今ならば、心は宇宙よりも深いからでは無いでしょうか、などと臆面も無く応えるかも知れません。この「深さ」の片鱗をいずれお話いたします。兎も角、数学と物理学とは異なる、と私は思います。

なお、数論が明確な数学分野として成立したのは、三世紀中葉に Alexandria で活躍した数学者 Diophantus の著書「Arithmetica」による、とされています。現代の数論の教科書でも決して初等的とはされない事実が数多く示されているとのことです。

3. 素数

さて、やや遠回りとなりましたが、いよいよ素数についてお話いたしましょう。素数とは $2, 3, 5$ のように「自分自身と 1 以外では割り切れない自然数」である、と定義されていることはご存知と思います。1 は素数としませんが、その理由は後ほど明らかにします。素数の認識は、久遠の昔に「割れる割り切れない」の苛立ちを何故か人が感じ始めたときに遡る、と言えます。現在でも、大きな自然数を与えられて、積に分解せよ、と言われましても先ずお手上げです。加減算、掛算は易しいのに割り算は何故か難しい。その根本の理由として、「割れるはずのない」素数の存在があります。摂理ゆえ、ある自然数がたまたま素数であったならば、いく

ら努力しても詮無いことです。しかも、与えられた大きな自然数が素数かどうかを判定することは容易な事ではありません。「素数判定」については、極く最近に至って画期的な進展がインドの三人の研究者によってもたらされましたが、依然として難儀です。先ほど触れました私の小論文は、驚いた事に、この進展と多少関係しておりました。一言ご注意。例えて言うならば、素数判定は掘り出した石がルビーかどうか判定することにあたり、ここを掘ればルビーが出ます、と云うのとは大いに異なります。これからのお話は主に後者の文脈に沿います。それは素数判定よりも遥かに困難です。

自然数を積に分解することを或る程度系統的に調べたのは、記録に在る限りでは古代 Sumer 文明におけるものが最初と目されます。つい二ヶ月程前に Istanbul 考古学博物館を訪ねましたが、その際に粘土板に書かれた「乗積表」あるいは「因数表」を拝見しました。4000 年以上前のものとのことでした。Istanbul ばかりでなく、大英博物館等の主な博物館に同様な粘土板文書が所蔵されています。何故このような文書があるかと云いますと、「書記 scribe」は、彼らの必須数学能力としての割り算の実行に際して、因数に関する知識を必要としたことがあります。実際にどのような場面で必要としたかをここでは示せませんが、何れにしてもこの知識を持つ事は多いに奨励されていたことは確かです。私の関心は、勿論、「因数への分解」が明確に古代 Sumer に存在したと云う事実そのものにあります。

その奨励の証拠は、後の Akkad 時代の学校つまり書記養成所のカリキュラムや試験問題にはっきりと残されております。書記資格試験で数学と外国語が課されましたが、これなどは現代の公務員試験と同様であります。外国語とは、古典語としての Sumer 語でありました。ともあれ、数学が絶対的基礎科目であることは 4000 年を遥かに超える昔に既に定まっておりました。それにしましても、この世で一番美しいのは、教えられなくとも見よう見まねで懸命に学ぼうとする幼児の姿ですね。背中を丸めて。Sumer や Akkad の昔でもその通りであったのでしょう。子供達が文字を練習した丸い粘土板が発掘されています。家に持って帰ると叱られそうな失敗はお寺の井戸に棄ててさっぱりしたのも今と殆ど同じです。小さな指の跡が認められるものもあるのでは。三者面談の記録や、勉強嫌いな不良息子に悩む裕福な家庭の話まで揃っている程ですから。

閑話休題。素数に戻りますが、彼の「因数表」は現代から見ますと当然ながら完全なものではありません。実は、$2, 3, 5$ での割り算の可能性が専ら扱われているのです。これは、「60 進法」にて律せられていた当時の社会が背景にあります。いや、もしかしたら、$2, 3, 5$ のみで何とかしようとした為に 60 進法になってしまったのかも知れません。良く知られていますように、60 進法計時は爾来連綿と変わること無く、現代社会をも律している訳ですから、素数 $2, 3, 5$ を基本に採用したのは真に叡智といえましょう。

では、これら三素数以外の素数の認識はされていたのでしょうか。次の素数は 7 ですが、どうやら古代の人々はこの素数に特別の魅惑を感じていたようです。60 進法を念頭に置いた因数表では最初に苛立ちを感じさせる数であるからでしょうか。様々な和、洋の字引を調べてみますと、七を冠する言葉は極めて多い。卑近なところでは、「七不思議」、「七つの丘」、「お七や」、「春の七草」、「北斗七星」、「七色」、などがありますが、仏教には「七つの蓮弁」がありギリシャ神話には「昴」(Pleiades) となった七人の娘の物語などがあります。しかし、古さ

壮大さから言って極め付きは Gilgamesh 神話にある Ziusudra (或は、Utanapishtim) の語る「大洪水」物語です。「七日の嵐」に続く「七日の漂流」。さらに、物語を聞いた後に永遠の命を求めた Gilgamesh に課された「七日の試練」。本当に、これは一体どう云うことでしょうか。次の素数 $11, 13, 17, 19, 23$ などについては余り華やかなお話はありません。ただし、密教の「七夜待」は不思議です。素数 $7, 17, 23$ を結んでいます。

それは兎も角としまして、素数の濫觴と言える事実は何処にあるのか。勿論、素数という言葉が使われたか否かは、ここでは二義的なことであります。様々な素数を手に取り慈しんだ最初の文明は何処にあったのか、と問いましょう。私がこの問いに執着しますのは、そこにこそ「学問」あるいは「最高の贅沢」の始まりをも見るからです。突き詰めて言えば、現代科学文明の源がそこにある。素数と云う言葉は確かに古代ギリシャに見られますが、それがのみが絶対的に重要であるとは私には思えません。概念を掴むことは大切に違いありませんが、それは輝く特殊から生まれる、と実践的に確信するからであります。誰が素数と初めて遊んだのか。つまり学問をしたのか。特殊でありながら永遠不滅の存在に気付いたのは誰か。この魅惑的な疑問は少年の頃から私の心にずっと座して来ました。勿論、凡そ全ての数学者が問うところでもありましょう。

余談ですが、大洪水物語を Ashurbanipal 王の Nineveh 宮廷図書館に属した粘土板文書の中に発見したのは、大英博物館員 George Smith でした。いわゆる「Gilgamesh 叙事詩」第 11 板解読です (1872)。彼は興奮の余り服を脱ぎ捨てて走り回った、とのこと。紙幣原盤彫刻の見習工が楔形文字の秘密にのめり込み、熱心さの故に館員に採用され、驚くべき発見を成したのでした。彼は 14 才の時に独習にて楔形文字解読をはじめております。学問の在り方について、尊い典型です。もう一つ余談。「濫觴」は、揚子江も盃一杯の水に始まる、の意。胸に沁みます。

さて、昨年の 10 月末のことでした。丸の内の新しい丸善のお店を訪ね、数学の書棚に向かった時に、室井和男著 「バビロニアの数学」(東京大学出版会 2000)、と云う書物が目に入りました。手に取り索引を見ますと、素数の項目がありました。勿論、素数の概念を古代ギリシャ人は先行古代メソポタミア文明から得ているに違いない、と私は確信していましたから、その項目があることに特段の興味を感じませんでした。そのため、そのまま本を書棚に戻し、帰宅しました。ここで、余分なことを申し上げることになるやも知れませんが、素数分布の研究者からみまして、国内外で出版された関係の教養書は大概は感心致しかねます。そのような背景がありまして、室井氏の著作が教養書では無い事を承知ではありましたが、内容を見ずに戻したのでした。しかし、家に戻ってから何か気になって仕方ない。そこで、翌日再び丸善に赴き、該当する記述を一瞥してみました。血中アドレナリン量が急激に高まる。直ちに書物を購入し、徹夜で堪能させて頂きました。

室井氏は、4000 年の時の砂の中から不滅の財宝を発掘したのです。古代オリエントの数学者達は連立方程式や二次方程式を自在に扱い、その係数に様々な素数を散りばめていた！
ある平方根の計算には、素数 1481 までもが認められるではないか。皆さんはこれが素数と直ぐに分かりますか？　数式に埋め込まれた燦然たる宝石の数々。Ur や Nimrud あるいは古代エジプトの財宝もそれはそれは見事。古代の人々の技術の圧倒的な高み。それらを発掘した

人々は驚倒したことでありましょう。勝るとも劣らない発見を室井氏は成したと確信いたします。大きな素数を、それとは分からぬように因数として忍ばせ、問題を面白くするなどとは実に心憎い。遥か古の数学者の思いは私の心も射抜きました。素数と遊ぶ心は余りにも見て取れます。そう、学問がそこにあるのです。しかも、時を経て一切色褪せることなく。確かに、私の少年の時からの疑問は氷解いたしました。感謝いたします。数論はその歴史も実に絢爛豪華。

感動することに、室井氏は Sumer 語、Akkad 語を学ぶことから始め、楔形文字文書から直接に解読をなさっています。英文などでの解読文書から講究するのでは心許ないからとのこと。再度、これぞ学問。更に、より大切なことですが、彼は、戦乱に明け暮れた古代メソポタミアの人々が数学に永遠を見出した、という事実に思いを馳せております。これは、近代や現代でも言えることであります。例えば、私の恩師 故 P. Turán 先生や友人 A. Ivić 君も運命を弄ばされ絶望の淵にあって、かろうじて数論研究から生きる力を得ています。苦難の時を振り返り、共に「研究を持続し未来に何かを遺そうと努めることだけが生きる糧であった」と述懐しております。Ivić 君は空爆に怯えつつ、途絶えがちな email にて、俄には信じ難い程の素晴らしい研究成果を送付して来ました。食料も水も何も乏しく、老いた父母と二人の娘を抱え、「正気を保つが為」の乾坤一擲。我が著書が友の命を支えたとは。

それにしましても、忘れてならないのは、図書館の恩です。古の宮廷書庫や現代の図書館の何れかを問わず、文字にて書かれたものを保存するという崇高な使命を担っております。粘土板、羊皮紙、パピルス、...、紙、そして電子媒体。今あるものに敬意を込め、後の世に欠ける事無く伝えることに我々は真摯でなければなりません。

ここで古代メソポタミアを離れますが、私が彼の文明に惹かれますのは、雑踏する都市の片隅で静かな時を得ようとした人々が目に見えるからです。実に切なく懐かしく感じます。

4. 篩法

さて、古代ギリシャに進みましょう。現代の数論の教科書の始めには、基本の基本として、「素因数分解の一意性」と云う定理が必ず置かれています。この一意性とは、如何なる自然数も必ず素数の積に分解され、しかもそのような分解を一つ見つけさえすれば、他に分解を見つけようとする必要は無い、と云う主張です。古代ギリシャ数学の華「Euclid 原論」には一意性の根拠となる定理が立派に証明され、また、「素数は無限にある」という事実も論証されているとのことであります。ただし、数学史家の斉藤憲氏からご教示頂きましたが、原論には一意性定理そのものは述べられていないようです。それはともかく、原論にて素数全体が視野に入り、素数なる概念が確立したことは特筆に値します。今から 2300 年程前のことでした。

この講演の目的は、数学の歴史を解説することではありませんので、素数に関して古代メソポタミアと古代ギリシャの何れがどうか、と云う事は埒外であります。ただ、古代ギリシャ数学が忽然と出現したかの記述があちこちに見られることには異議を唱えておきます。それは直感的にありえない。とは言え、確かに古代ギリシャ数学の論理は美しく立派であります。さながらギリシャ彫刻や建築を思わせます。Istanbul 考古学博物館所蔵の「Alexander 大王の石棺」(実は Sidon の王のもの)には驚嘆いたしました。様々な石彫を拝観しましたが、あれ

ほどの美は初めて目にいたしました。しかも、2300 年以上昔に作成とは。ここで、一言。例えば原論に沿って古代ギリシャ数学を議論することと、古代 Sumer 楔形文書解読による当時の数学を論ずることとは、全く異なると認識せねばなりません。つまり、数学的内容を比較するに当たり、前者は本来の原典では最早存在せず、一方、後者はまぎれも無く原典そのものであることを念頭に置くべきでしょう。

よくよく考えますと、古代ギリシャ数学乃至はその直接の帰結がもたらした素数に関する先の二つの結果は、立派どころか実は不安感を与えるものであります。無限にある、と言うならばどれ程沢山あるのか。つまり「素数の個数」を数え上げて行くことが出来るのか否か。一方、分解が一通りしかないそうであるが、では一体どのようにして分解を「実際に」得るのか。論証の道筋が、これら二つの疑問について具体的な手段を与えていないのです。多く論証は後での言い訳である、と先ほど言い放ちましたが、それと言いますのも、論証のずっと後になって、「あのとき実は良く分かってはいなかったのだ」と明らかになることが多いのです。私も自身の論文で展開した論証について同様な経験が幾つもあります。そう云う訳で、原論の著者も同様だな、と私には映ります。いや実は、この批判は酷すぎます。この段の二つの疑問はいまだに数学者を苦しめているのですから。むしろ、Euclid は健闘してるな、とすべきでしょう。後に来る者は謙虚であるべし。

以下、講演の目的は、主に「素数の個数」についての苦闘の触りをお話することです。しかし、2200 年程の歴史ある主題ですから、無理を重ねまして極々一部をなんとかお伝えするに過ぎないこととなります。実際は最近 150 年程の出来事が主でありますが。

先ず、皆様は中学校の数学か何処かで「Eratosthenes の篩」と云うお話を聞いてはいないでしょうか。私は、姉が中学に入った時に彼女の教科書に「ふるい」と云う数学らしからぬ言葉を見つけてそれを知りました。半世紀以上前のことです。今日では、教えてはいけない項目かも知れません。2 は残して、2 で割り切れる自然数を消して行き、消し残された最初の 3 をそのままにして今度は 3 で割り切れるものを消して行く。その残りの最初は 5 で、それを残して.... と同様に続けます。この作業は何となく篩掛けに似ていますので、このような名前がついているわけです。さて、篩掛けを終わったときに残っている自然数は全て素数で、しかも取りこぼしは無い、つまり、「素数表」を作成出来る、と云うのが Eratosthenes の篩です。これは 2200 年程昔の議論で、証明は難しくありません。実は、どうやら彼自身は因数表を完全にすること、あるいは、素因数分解表作成を目的としていて、素数表作成は 1500 年程後の解釈のようですが、実質は勿論同じことです。消す操作を、印を適宜付けることに置き換えれば良い訳ですから。蛇足ですが、Eratosthenes の名前が付いていますが、おそらく古代メソポタミアに発する考えでしょう。数学者の旅が粘土板文書にも記録されてる程ですから。なお、Eratosthenes は Alexandria 図書館長、詩人、天文学者でした。書物を楽しめぬ身となり、断食にて命を絶ったと伝えられています。

ここで、先にお約束しました「1 は素数ではない」と云うことの理由を示しておきましょう。余談になります。随分と以前ですが、飛行機に搭乗し自分の席に行きましたら、びしょびしょで困惑。スチュワーデスさんに申し出ましたら、暫くしまして、こちらにどうぞ、とのこと。なんと、一等席。落ち着かない気持ちで研究発表の下調べをしていましたら、隣の紳士

が独逸訛の英語で「自分は物理学者であるが、貴殿は数学者か」「イエス」「何を専攻するのであるか」「素数分布である」「素数について未だ知られぬことなどがあるのか」「極めて多量に」「うむ、我に少年の頃より疑問あり」「何か」「 1 は何故素数でないのか」「貴殿は篩法をご存知か」「イエス、ギムナジウムで聞いた」「では、彼の割り算を 1 から始めたら如何なることとなるか」。やや間があり、「おお、Danke!」

正しくは、素因数分解の一意性を「成立させるため」と云う理由があるのですが、詳しいことは止めておきましょう。それよりも、素数表の作成が出来るのに、なぜ素数分布の研究がいまだに続けられているのか、皆様は疑問に感じませんか。表があるなら終わりではないか、と普通は思います。しかし、実際はそうではないのです。この素数表作成法は「実用的ではない」のです。つまり、この方法では「何処に素数が現れるか」を先見的には言えないのです。でも、これも変ですね。表が在るのにそんなことを言えないはずが無い、と思われるでしょう。しかし、ここに数学の本当の主題がのしかかって来るのです。すなわち、数学者は「無限にある」自然数を相手にしているのです。篩掛けはあらかじめ決められた範囲内ならば相当に有効ですが、「限界無し」で自然数を相手にすると殆ど無用となることが知られているのです。「同様に続け ... 篩掛けが終わったときに」としましたが、そこに一種の誤摩化しがあります。無限回の割り算を無限に重ねて続けることが求められています。実際の計算で出来ると思われますか。そうです、篩掛けを完了して、「完全な」素数表あるいは素因数分解表に達することが出来るのは心の中だけなのです。心は無窮。先ほど、自然数についてのお話のなか程で「数学的事実の具体的構成」が往々にして困難である、と注意しましたが、素数表作成はその典型です。いまだ神話と思うべきでしょう。せめて、掘削地点の範囲を狭めて、素数を掘り当てられぬか。

こうして、篩法研究は放置されておりました。V. Brun が 1915~20 年に革命を起すまで、何と 2100 年余りに渡り。素数の個数についてはそれより少し前に大進展がありましたが、そのお話は後回しに致しましょう。Brun は先ず、Eratosthenes の篩は「完全過ぎる」が故に動きが付かない、と断じました。そして、あの割り算の繰り返しについて、語弊が在りますが、「手抜き」を導入しました。それにより素数判定については不完全になるものの、可成りな程度の実用性を保ちつつ、「自然数は無限にある」と云う絶壁にハーケンを打ち込み始めたのでした。これを「Brun の篩」と云います。何についてであれ、新思想の理解は手間取ります。Brun の場合も当時は奇想天外であり、広く受け入れられるまでに時間がかかりました。ともあれ、成された突破は「篩理論」に 60 年間以上の疾風怒濤の時代をもたらしました。私も、30 代後半までその波濤に乗りまして随分と楽しみました。

多くの画期的な着想の典型として、Brun のそれは極めて単純です。単純こそ力。Eratosthenes が気付いても良かった程の単純さです。Alexander 大王が「Gordius の結び目」を剣でばっさりと切ってアジアへの道を得た故事を思い浮かべます。Brun はなにしろ 2100 年の結び目を切断したのですから、もっと偉大。誤解を恐れずに申しますが、実は、多少不正確なままにして融通を優先して議論する、という思考法は 20 世紀初頭に興った数学や物理学の大変革にも見られます。古典的ぎちぎちでは何故いけないのでしょうか、興味深いことです。「完全無比な等式には雑音も多量に含まれている」と敬愛する友人 M. Jutila 君が言っており

ます。つまり、もしかすると「不等式」こそがより濃縮された真実を含むのかも知れません。実際、現代の微積分法の根底には不等式による論法があり、「大学の数学」での最初の洗礼として学生諸君に施されます。不等式を正しく自在に扱う力を持つ事は、大人の数学への道なのです。

Brun 革命に続く数論物語は真に魅惑的でありますが、詳しくは、日本数学会邦文誌「数学」に来月に出ます私の論説記事「篩法・概観」に譲る他ありません。波瀾の歴史経過の要点を正確に記述している文献は余り他には見当たらないでしょう。ここでは、J.-r. Chen と「双子素数予想」「Goldbach 予想」についてだけ触れておきます。これまた運命に弄ばされた数学者の姿です。その前に、双子素数とは 41 と 43 のように差が 2 となる素数の双子です。このような双子が無限にあるだろう、というのが双子素数予想です。また、Goldbach 予想とは、$100 = 41 + 59$ のように、4 以上のどのような偶数も必ず二つの素数の和で書けるであろう、と云うものです。禁を破って、数式を使いました。この二つは、数学に於ける最も困難な未解決問題の範疇に入ります。現在のところこれらを攻略するには篩論法を何らかの形で用いる他無いであろう、と考えられております。蛇足ですが、素数に関するこのような難問は非常に沢山あります。似た類いの問題を何か作って専門家を苦しめることは極めて容易であります。「素数全体」は人の心の奥底に横たわる terra incognita か、或は never-never land か。

あれは、1966 年の初冬だったと思います。私は、大学を出て東京に移り、日本大学理工学部に奉職したばかりでした。中国の或る学術速報誌に Chen が驚くべきことを発表しました。正確な内容については私の論説などを見て頂かねばなりませんが、これら二大予想について「解決寸前」とも映る結果が掲げられておりました。2 ページの速報ですから、証明の鍵は述べられているものの、当時の専門家にも検証しようがありませんでした。勿論、詳細な証明をじきに発表すると速報には約束してありました。しかし、実に不運なことに、おぞましい文化大革命が既に燃え広がっており、程無く Chen は海外との連絡を絶たれたばかりか、詳報発表の手段を奪われてしまったのでした。そして、そのまま 7 年が過ぎ、1973 年になり漸くに彼の完全証明が発表され、「Chen の定理」が確認されたのでした。この間の彼の苦衷の心情を慮る度に真に切なくなります。現在の観点で見れば、Chen の着想は自然なものであり、1965 年当時の素数分布論、篩理論の到達点の直ぐ側にあったことが分かります。しかし、正に言うは安し。足下すら見えないのが人の常。ただし、「解決寸前」につきましては、誤解無きように明確に否定しておきます。残る最後の一歩こそが最大の難関に違いありません。

世界中が学生動乱の時代でした。特に 1968 年は全く研究出来きず。神田三崎町、神保町、駿河台、本郷は毎日のように争乱状態。それもあり、一年余り後、私は泰斗 Turán 先生の許に走りました。思えば、日本大学はよくぞあの時代に快く出してくれたものである。船室に響く流氷の衝撃、極寒の夜にうら若い女線路工夫達、零下 36 度の Moskva、凍てついた車窓とサモワール、ウクライナの大平原に沈む夕日、燈火乏しい Budapest 東駅。しかし、翌朝目にした壮麗な王宮の丘、悠然たるドナウ。そして心温かき人々。忘れ難い。

Chen と私はその後出会うことになります。但し、数学上であります。私は 1972 年の初秋に、彼は恐らく 1975 年初頭に、夫々全く異なった方角から出発して、篩理論の根底に関わる発見をしました。30 年以上前のことですが、あの戦慄は忘れられません。自分の得た結果

を信じられなかったのです。Chen も同じであったに違いない、と思います。しかし、二人とも自らの発見が篩理論大変革の導火線になろうとは思いもよらなかったのです。それは 1977 年秋に H. Iwaniec によって成され、現今の数論の最も鋭敏な手段の一つが出現しました。篩法 2200 年の絶頂であります。足下はよく見えないものだ、との教訓を再び思い浮かべる次第です。

数年して、私は「ゼータ函数論」なるものにに針路を取ることになりますが、その前に、Bombay にある Tata 数学研究所で近代的篩理論の講義録をまとめました。つまりは、お別れの記でありました。世界中でいまだに読まれているようです。執筆は実に楽しかった。研究所の庭の向こうはアラビア海の浜。熱帯の濃艶な花々に交じり、Princess Michiko と云う清楚な薔薇が在りました。夕刻、ゲストハウスに戻ると鸚鵡達がソファーに鎮座し、翌朝は色様々な小鳥が窓に群れて目覚めるのでした。毎朝のように玄関の拭き掃除に来てくれた幼女のことも忘れられません。小旅行で訪ねた Ajanta 石窟寺院群も記憶に鮮やかです。岩壁に穿たれたセミナリア、石のベッドの心地よさ、地平線までも充満し人を包むかの星の数多。悠久のインド、この上なき学問の場。

5. リーマン予想

数学に戻りまして、素数の個数について少しお話いたしましょう。ここからは、申し訳ありませんが、多少の記号と数式を使わざるを得ません。複素数なる用語も用います。高校で習いますが、不案内の場合には、常用数、あるいは実数、の上により広い数の世界が広がっている、とぼんやりと思って下されば十分です。複素数と書きますが、素数とは直接の関係はありません。紛らわしい名前で残念です。英語では complex と prime (numbers)　ですから明確です。ちなみに、実数は real です。

実数は大小がはっきりしていますから、直線の上に縛り付けられた感じがするでしょう。これと異なり、複素数の世界は平面と同じで、向きにかまわず彷徨出来るという大きな自由があります。この自由を欧州の数学者一般が手に入れたのは 19 世紀初めのことです。それこそが、近代数学の始まりでした。大学での数学の基礎的な目標の一つは、この自由をたっぷりと味わうことであります。複素数を用いた様々な解析手段によって数論の問題を議論するのが、私の専攻しております解析的整数論です。諸外国では伝統的な基盤研究分野の一つです。

では先ず、与えられた数 x より小さい素数の個数を $\pi(x)$ と書きます。念のため、この π は単なる記号で、円周率とは全く関係がありません。例えば、$\pi(1\text{億}) = 5761455$ です。これは、実際に 1 億までの素数を全て定めて得られた値です。しかし、それでは面倒ですから、手軽に $\pi(x)$ を計算することが出来ないだろうか、と云う素朴な疑問が「素数分布論」の基本問題です。完全な素数表は私達の心の中に在るのは確かですが、それと $\pi(x)$ とを結ぶ訳には行きそうもありませんね。こう云う場合、数学者は何とか「近似値」でも出せないか、と模索します。つまり、百歩譲って、$\pi(x)$ の値を或る程度の誤差を容認して計算する手段はないか、と云う訳です。真に驚いた事に、それが在るのです。「対数積分」と云うもので、記号 $\mathrm{li}(x)$ で示されます。ここでは、正確な定義を知る必要はありませんが、やはり、与えておきましょう。

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

大切なのは、$\mathrm{li}(x)$ の値を計算するには素数を知る必要は全く無く、しかも容易、と云う事実です。例えば、$\mathrm{li}(1\,億) \fallingdotseq 5762209.375$ は簡単に求まります。この値と $\pi(1\,億)$ は近いですね。誤差率 $|\pi(1\,億) - \mathrm{li}(1\,億)|/\pi(1\,億)$ は実に 0.0131% 以下です。

$\pi(x)$ と $\mathrm{li}(x)$ の値は近そうだ、と初めて「予想」したのは、大天才 F. Gauss が少年の時でした。もっとも、彼は 1 億よりずっと小さな範囲だけを検査しています。彼以前にも似た予想をした人がいましたが、この $\mathrm{li}(x)$ ほど良い近似ではありませんでした。では、Gauss 少年の予想は「本当に」正しいのか。つまり、誤差 $|\pi(x) - \mathrm{li}(x)|$ は素数の個数 $\pi(x)$ に較べて「無視出来る」程なのか。どの様な意味で無視するのかを明確にすべきですが、先ずは、先ほどの 0.0131% に相当するものが、x が大きくなると共にどうなるか、と問いましょう。10 億で 0.00334%、100 億で 0.0007% です。「ゼロ」に近づいて行くのではないか、と思えませんか。

Gauss の予想から一世紀以上経った 1896 年、「それは本当にゼロに近づく」、と J. Hadamard 及び Ch. de la Vallée-Poussin が独立に証明しました。19 世紀も押し詰まった時に、素数の個数について初めて明確な結果が打ち立てられた訳です。近代数学の金字塔です：

$$\text{素数定理}: \qquad \pi(x) \sim \mathrm{li}(x) \quad (x \to \infty)$$

しかし、その依って立つ処こそがより重要である、と皆様は既にお考えと思います。それは、1859 年に B. Riemann が著わした空前絶後の大論文 *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*（与えられた大きさ以下の素数の個数、つまり $\pi(x)$、について）に全てが用意されていました。大論文と言いましても、11 頁の比較的短いものです。Riemann は、A. Einstein の「相対性理論」をも用意した大数学者です。彼の素数研究への着想の核心は、ゼータ函数というものを導入したことでした。これは彼以前にも素数研究に用いられたことがありますが、Riemann が初の本質的貢献を成したために、現在では「Riemann ゼータ函数」と名付けられ、$\zeta(s)$ と云う記号で示されます。この s は複素数の世界を動く「変数」です。つまり、ある複素数 s を与えると一つの複素数の値 $\zeta(s)$ が定まります。その定義は、数学的には簡潔なもので、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re s > 1)$$

と書かれます。素因数分解の一意性により、

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

とも表現できます。ここに、p は全ての素数を渡って行きます。これより、ゼータ函数が素数全体と密接に関係していることは一目瞭然です。Euler 積と呼ばれます。

さて、Riemann の発見は、

(あ) $$\pi(x) \longleftrightarrow \{\zeta(s)\ \text{の複素零点}\}$$

という模式図で表せます。ここで、「$s = \rho$ が複素零点である」とは ρ が実数ではなくて、且つ $\zeta(\rho) = 0$ となることを云います。解析接続という手続きが必要ですが、正確に理解する必

要はありません。要は、素数全体とある特殊な数の集まりが極めて緊密に関係している、と心に描けばよろしい訳です。これが講演の始まりで触れました「素数の研究に現れる二元性」であります。$\zeta(\rho)=0$ は、変数 s が歩いて、うた ρ が詠まれた瞬間かも知れません。余り故事付けるのは良くありませんが。しっかりした解説は、和文では、私の著書「リーマンゼータ函数と保型波動」（共立出版、1999）にあります。

しかし、皆さんは恐らく「こんな言い換えをしてどうなるのだろうか」と疑問に思われることでしょう。確かに、（あ）は、素数のことを別の数の集まりの性質にすり替えただけに見えますからね。でも、思い出して頂きたいのは、先ほど注意しました複素数の世界にある自由さです。模式図（あ）の右辺は、その自由陣営に属すものですから、古めかしい左辺を頑固に直接扱うよりは応用出来る手段が豊かではないか、と思われませんか。その通りであることを先の二人は示して、素数定理を証明したのです。実は、彼らより半世紀後に A. Selberg と P. Erdős とは「素数定理の初等的証明」を成し遂げております。つまり、左辺に固執しての証明です。でも、私には、頑固一徹すぎるように映ります。

Riemann の論文には謎掛けがいくつも仕組んでありました。理由は分からないのですが、相当な裏付けを彼は持っていたのに、論文には「... だろう」という調子の「予想」を並べました。その内の一つだけが、未だに謎として残っております。これが現今最大の未解決問題とされる

(い)　　　　Riemann 予想：複素零点は一直線に並んでいるであろう

であります。ここで、「一直線に並ぶ」と云いますのは、先ほど複素数の世界は平面と同じだ、としたことから来る表現です。正確には、「全ての複素零点の実数部分が $\frac{1}{2}$ に等しい」となります。この予想は未だ全くの闇の中にある、と言って過言ではありません。幾つかの $\zeta(s)$ の類似物が構成され、（い）に相当する現象が証明されておりますが、それらと（い）自体との関係も闇の中です。数学者は全く手も足も出せない状態です。詳しくは、例えば、私の論説「Riemann 予想」（「数学」第 54 巻 (2002), 99–105）をご覧下さい。一方、電子計算機に依って複素零点は非常に沢山求められており、その結果は「今のところ」（い）を支持しております。従って、Riemann 予想を確信する研究者が殆どです。それ故にか、私のところにもときたま「傑作証明」が送られて来て閉口いたします。

それはともかく、素数の方に話を移しますと、（い）は極めて良い誤差評価 $|\pi(x)-\mathrm{li}(x)| < C\sqrt{x}\log x$ を与えることが知られております。ここに C は或る常数です。つまり、先ほどの誤差率が急激にゼロになって行く訳です。逆に、この評価から、（い）が出て来ることも分かっております。ですから、（い）は素数分布論において重大であります。この事実は教養書でも喧伝されています。そこで、専門家といたしまして、実は Riemann 予想はそれほどでもないのではないか、と云う見方を紹介いたしましょう。これは、Gauss の予想の一つで、相隣り合う平方数の間には必ず素数がある、と主張するものです。つまり、$(n^2,(n+1)^2)$ と云う組み合わせで、n に $1,2,3,4,\ldots$ と入れて行くと、必ず間に入る素数があるのでは、と云う訳です。少し実験をしてみると分かりますが、殆ど当たり前の感じがします。ところが、こんな明白に思える事についてすら、Riemann 予想をもってしても数学者はお手上げ状態です。あき

れた未解決問題があるものです。それどころか、素数の分布には恐るべき予想が目白押しです。つまり、(い) はほんの氷山の一角。そして、(あ) はピントの甘い写真なのでしょう。

ここで、電子計算機の能力について一言。素数分布に関するもう一つの Gauss 予想として有名な主張ですが、「常に $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$ であろう」と云うものがありました。しかし、この予想は (あ) を用いて、J.E. Littlewood により完全に「否定」されております。でも、現在までのところ $\pi(x)$ が正確に求められた範囲では、予想は成立しています。それもそのはずで、逆向きの不等式 $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$ が成立する最初の x を発見するには、現状では、Skews number とよばれる巨大な限界内で調べねばならないのです。その大きさは、遠い遠い将来の電子計算機の能力を遥かに遥かに凌駕するものである、と言われております。宇宙の中心に巨大な岩があり、天女様が一年に一度だけその宙を舞い、羽衣の裾がそっと岩に触れ、岩は摩耗しいずれ消滅する。その年月の長さが「劫」とのこと。Skews number を電子計算機で検証するには、劫以上かかることでしょう。つまり、機械での計算の前に知恵を絞るべし。では、先の複素零点の計算結果は本当に Riemann 予想を信じるよすがとなり得るのでしょうか。あの大 Gauss ですら素数の神秘に幻惑されたのですから、どうでしょうか。

最後に、Riemann 予想は身近な分数の世界にも潜んでいることをお話いたしましょう。いつでしたか、大学生の数学能力衰退の証拠として、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$ なる傑作例が挙げられておりました。勿論、これは恐ろしく酷い。しかし、この計算作法を取り入れて分数の世界を見直してみましょう。先ず、$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ からこの作法で $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ を作ります。次に隣り合う分数同士をこの作法で計算し挿入しますと、$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$ となります。同様にして分数を作り、分母が 4 となるものを挿入し、$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$ 。次に分母が 5 となるものを挿入し、$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$ を得ます。ここに出て来る数列を「Farey 列」と云います。際限なく繰り返しますと、0 から 1 までが分数で埋め尽くされるように見えますね。J. Franel に依ると、この埋め尽くしがどれ位偏りなくされて行くかは、何と Riemann 予想と深く関連しています。

複素数の世界から見ますと、Farey 列の上方には、共に 19 世紀に発見された「非 Euclid 幾何学」そして以来今日も盛んに研究されている保型函数なるものの調和世界が広がっています。言い換えますと、実数の世界を彼岸とする大洋があり、そこでは保型波動という波が逆巻き、分数は全て無限に深い海淵となります。篩法を離れて後これまでの私の研究は、この大洋と Riemann ゼータ函数とが不可分であることを明らかにしております。

結語

うたや神話から出発して、素数を巡る談論風発をさせて頂きましたが、多少なりとも数学にご興味を抱いて頂けたでありましょうか。幸いにもそうでありましたならば、是非とも算数、数学の学校教科書をお読みになって下さい。そこには時を忘れさせる物語が充満しています。いかなる歴史教科書よりも明確に古代の人々の息吹きが再現されています。4000 年昔の子供

達と全く同じ問題を同じく背中を丸めて現代の子供達が懸命に解いているのです。しかも、全人類共通の叡智が語られています。あなたがそこで見る事共は地上の何処でも、未来の何時でも、一切の翻訳無しに通用するはずです。うたと同じく何処にでも苦もなく運べ、広く共に慈しむことが出来るのです。

御清聴ありがとうございました。

＊＊＊＊＊＊＊

以上は講演内容を詳細にしたものであります。実際の講演では、始めの二つの章は割愛されました。

この場をお借りしまして、市民講演会の準備に携われた同僚各位並びにご助力頂きました皆様に、深甚なる感謝を申し上げます。

平成 17 年 4 月 5 日