円周からなる図形

日本数学会市民講演会
2006年3月25日

東京大学　坪井　俊

標題にある市民講演会を行いました。数学通信の記事として、講演会で資料として配ったものを少しだけ修正して掲載していただけることになりました。市民講演会に参加した気分で読んでいただければ幸いです。このときの講演のビデオは、数学会のウェブページ http://www.math.or.jp/videos/　からリンクされています。

この講演を始めるにあたって、初めてコンパスで円を描いたときのことを思い出していただきたい。昔懐かしい黒板のコンパスを持っていないのが残念である。

1. コンパスで円を描く

講演では、KSEG というソフトウエアでたくさんの円を書いてみた。KSEG についての情報は次のページにある。

http://geom.math.metro-u.ac.jp/wiki/index.php?KSEG

私が今回の講演をすることを知った東京大学の麻生和彦さんに勧められたもので、使ってみると少なくとも前半の目的にはぴったりだっということがわかった。

さて、円を書いたコンパスで円を分割すると円は６個に分かれる。このことから、

・グロタンディエク(1928－　)

は、円周率は３であると思ったとの逸話がある。

同じ大きさの円による平面のパッキングを作図することができるが、さらにその隙間に、円を埋め込むことも考えられる。このような隙間に円を埋め込む問題は、古くから考えられていた。何人かの名前を挙げよう。

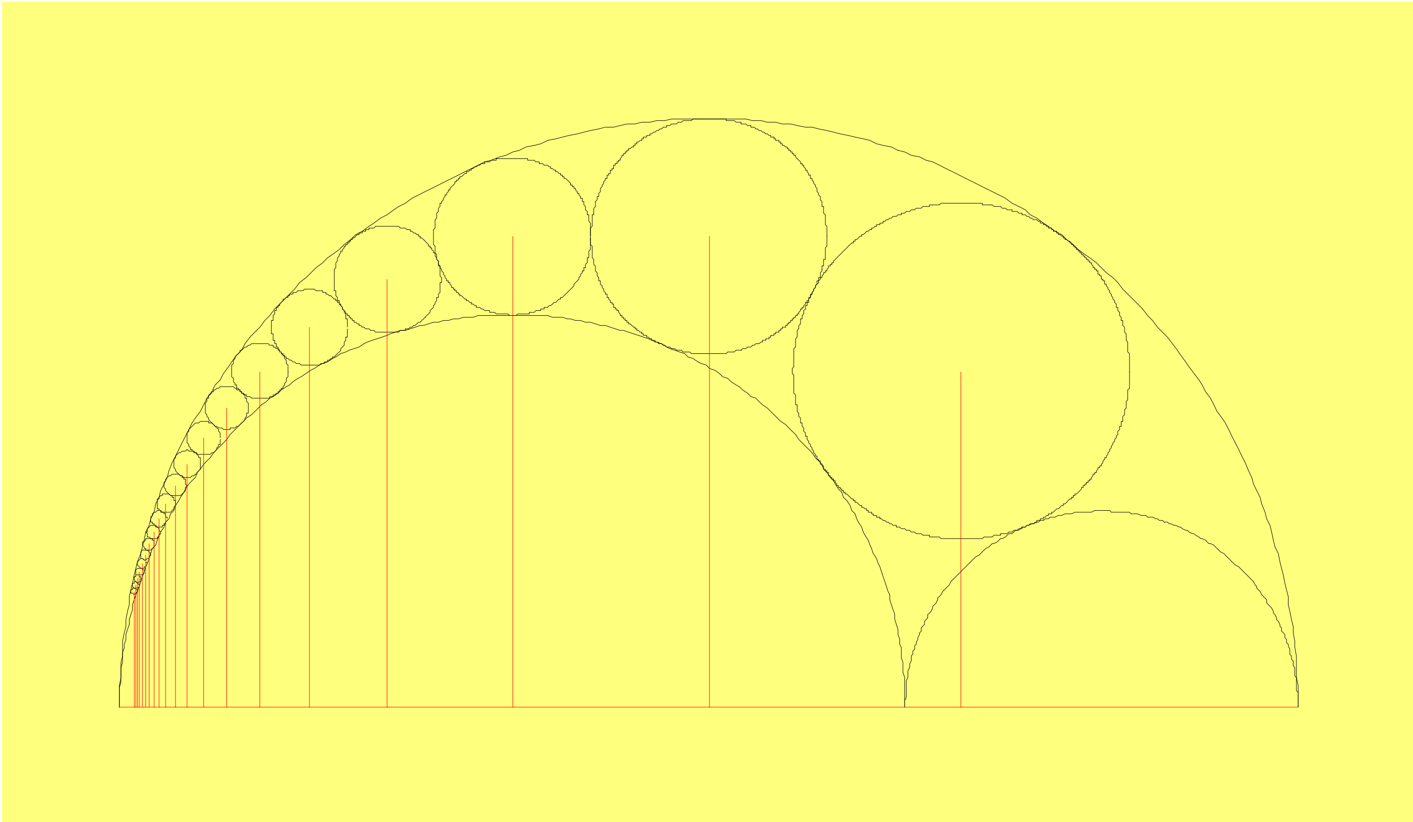
・アポロニウス(262BC－190BC)

・アポロニウスの円（２点からの距離の比が一定の点の軌跡）が良く知られている。

・３つの円に接する円を描く問題を考えている。

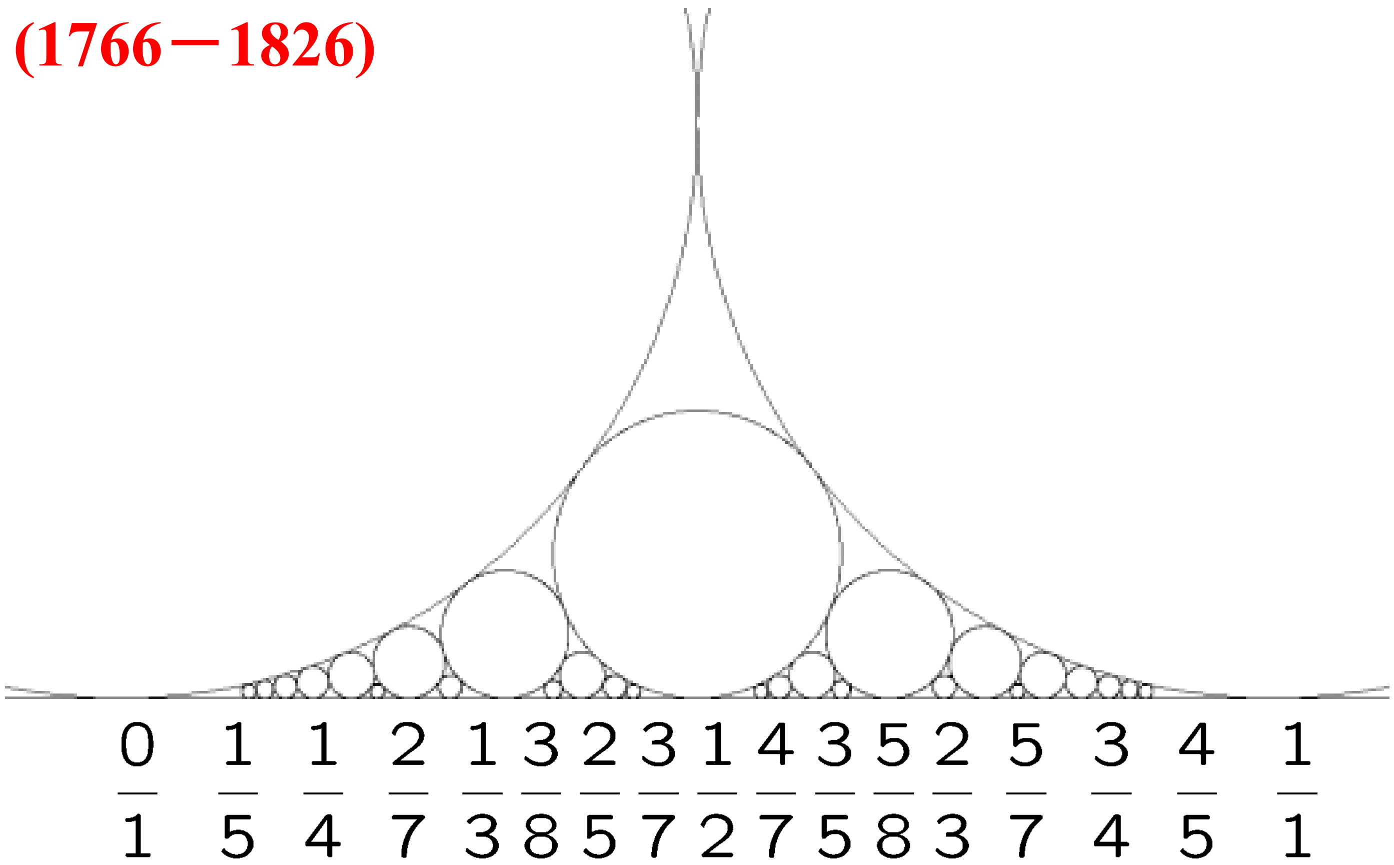
（・講演では触れないが円錐曲線論が有名である）。

・パップス (290AD－350AD)



縦線は、半径の２倍、４倍、６倍、８倍、　. . .　となる。

・ファレィ (1766－1826)



$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1$, $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ のとき、

$(\frac{m_1}{n_1}, \frac{1}{2{n_1}^2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2{n_1}^2}$ の円と、

$(\frac{m_2}{n_2}, \frac{1}{2{n_2}^2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2{n_2}^2}$ の円は接する。

・デカルト(1596－1650)

デカルトの４円定理　　２つずつ接する４つの円の半径について、

$$\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2$$

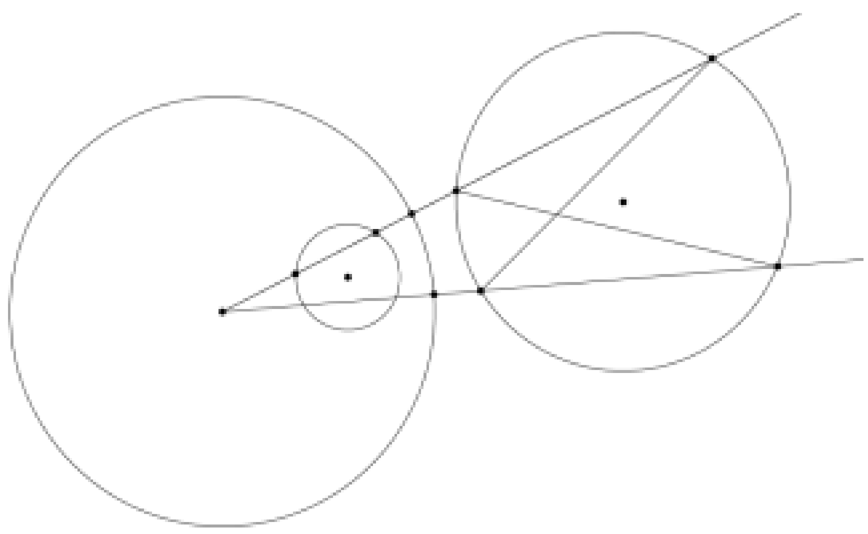
（ただし、３つの円を含む円の半径は負とする）。

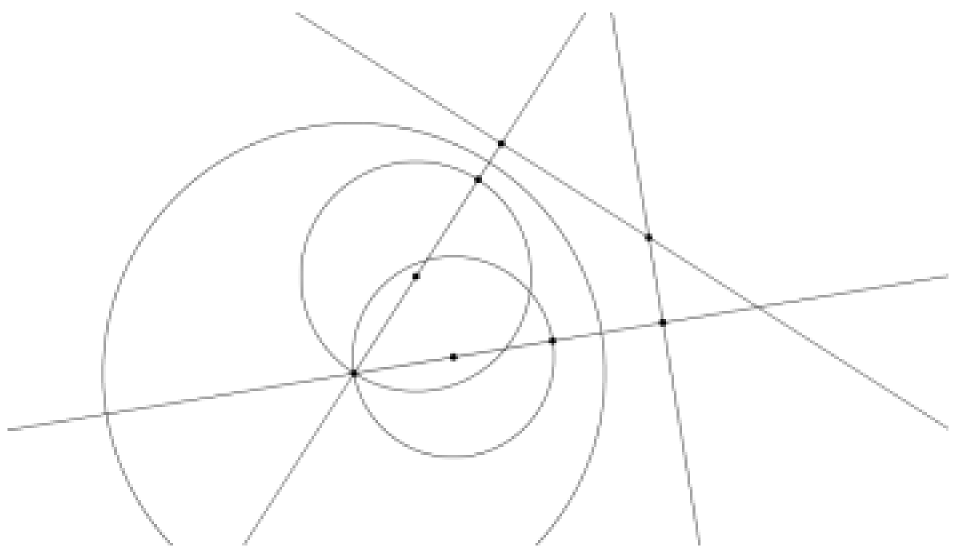
さて、３つの接する円を描くには、３角形の頂点を中心として、内接円、傍接円の接点を通る円を描けばよい。KSEG を用いて、これを描いてみると感じがつかめる。

これらの３つの円に接する４つめの円を描くのが、上に述べたアポロニウスの問題であった。これを行うのに、「魔法の反転」を使うと良い。

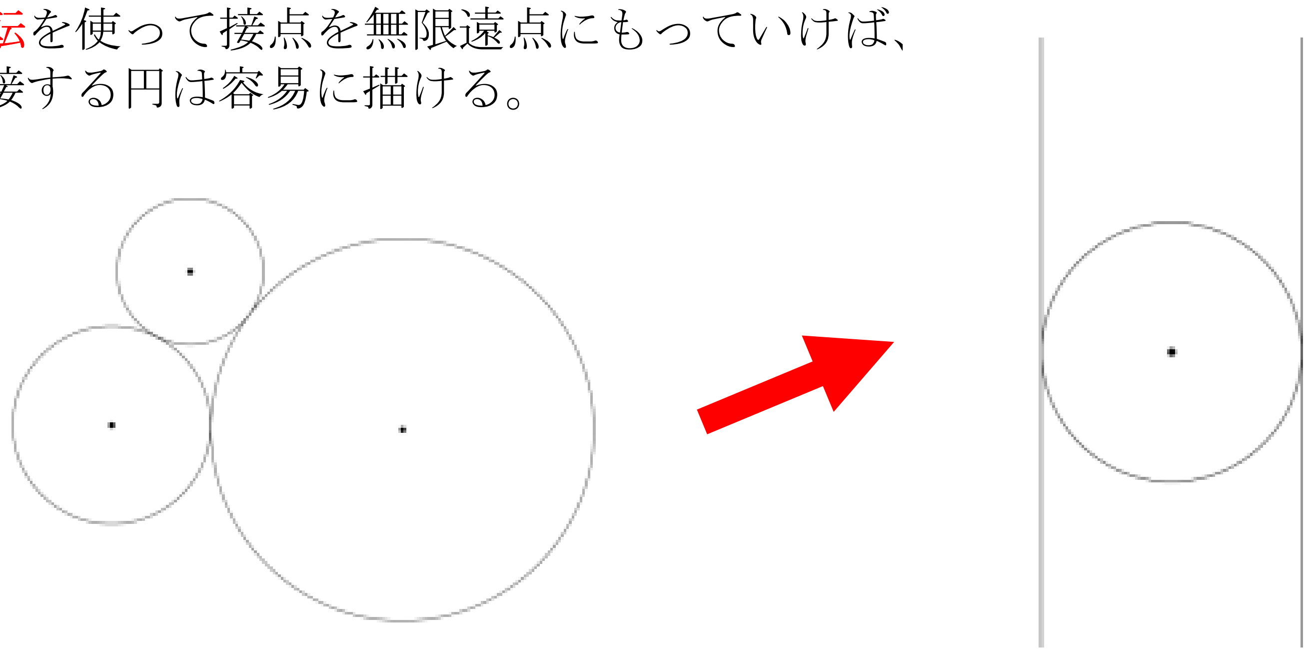
半径が r の円についての反転とは、
円の中心からの半直線上の点を、
同じ半直線上の距離の積が r^2 と
なる点に写すものである。

方冪の定理から、反転は「円または直線」を「円または直線」に写す。また、角度を保つ。この様子も、KSEGで確かめられる。

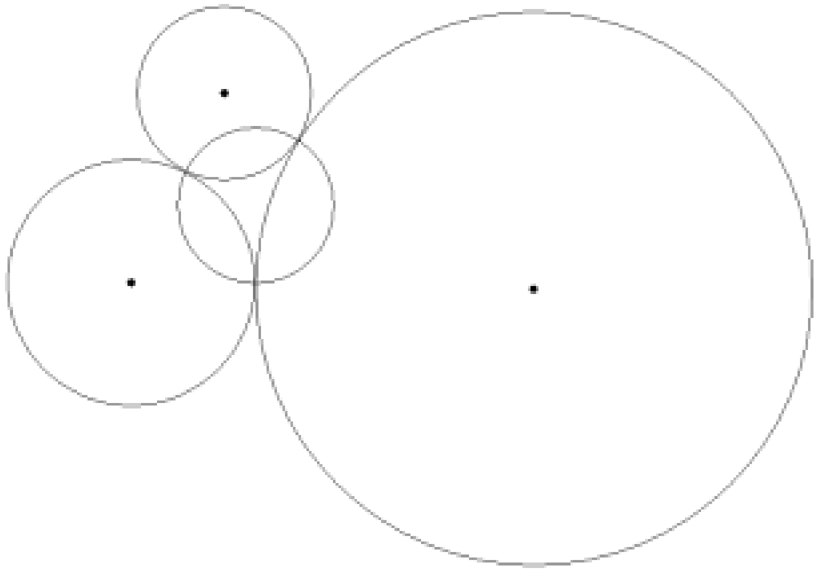


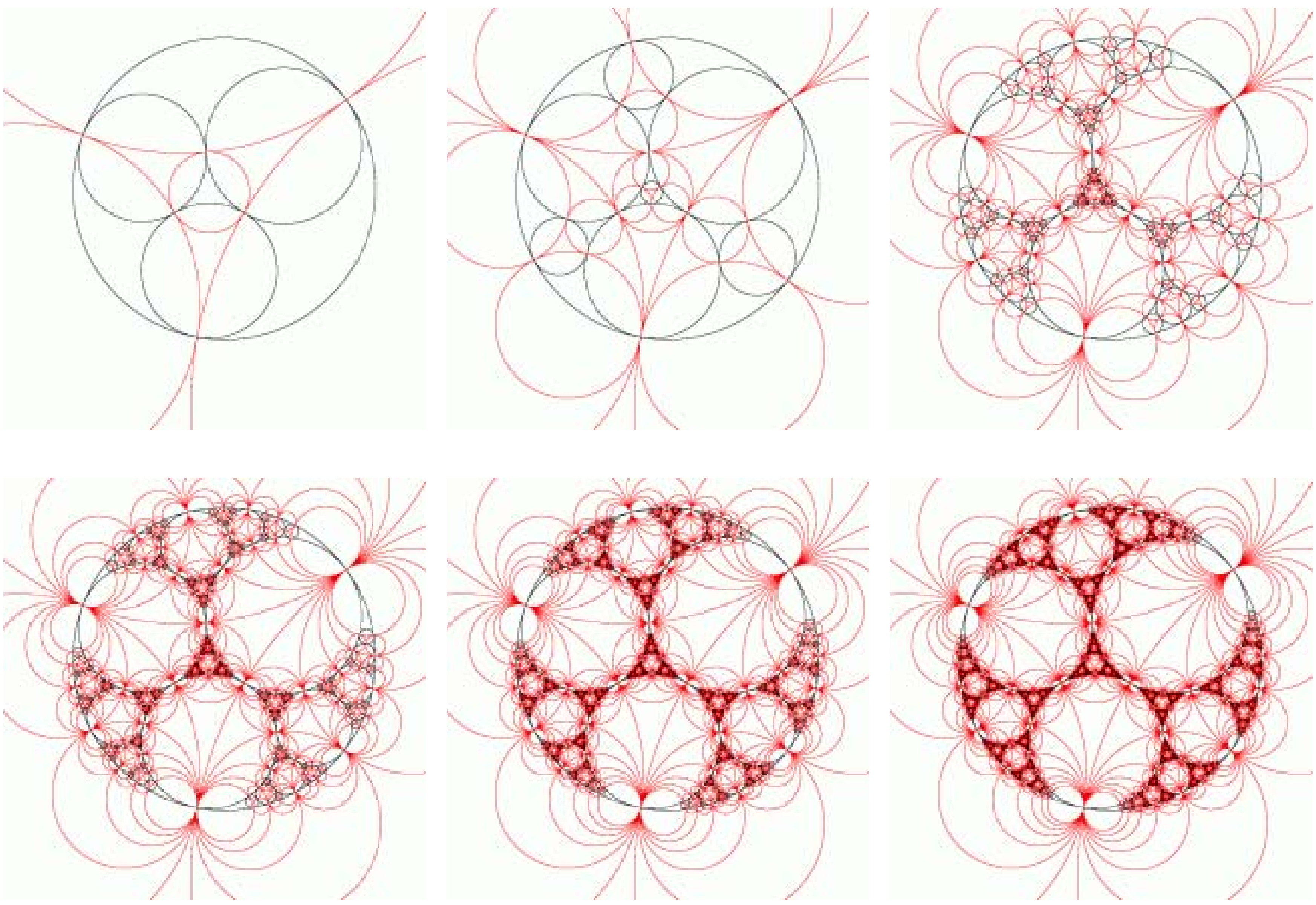


魔法の反転を使って接点を無限遠点にもっていけば、
４つ目の接する円は容易に描ける。



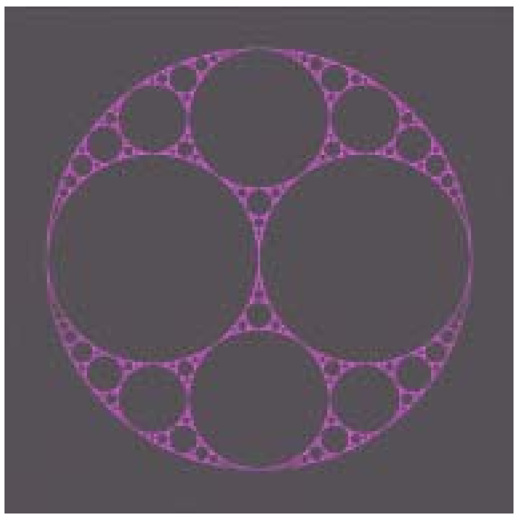
４つ目の接する円の増殖させることもできる。つまり、右の図のような３つの円の３つの接点を通る円についての反転で、３つの円に接する２つの円同士は写り合う。これを使って、増殖させる。下の図を参照されたい。

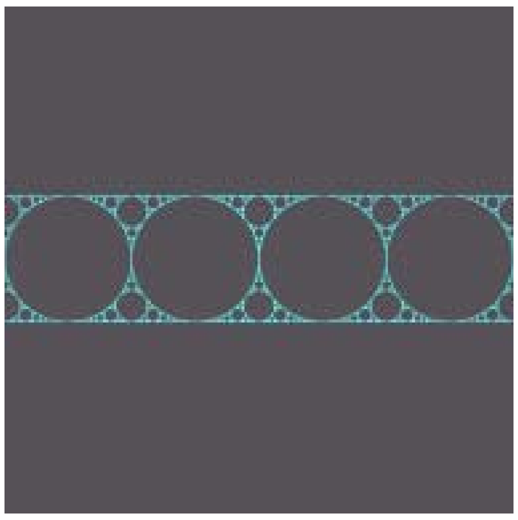


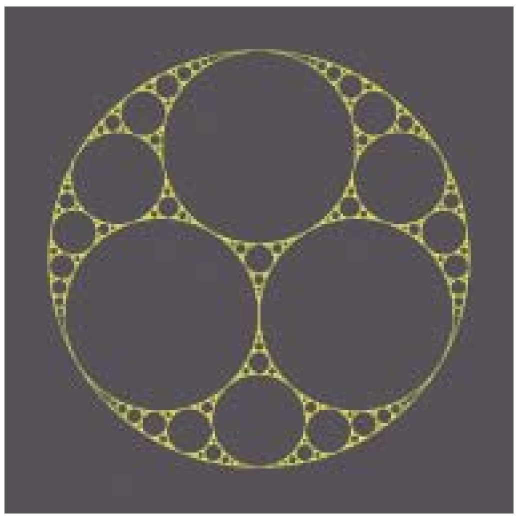


2. アポロニアン・ガスケット

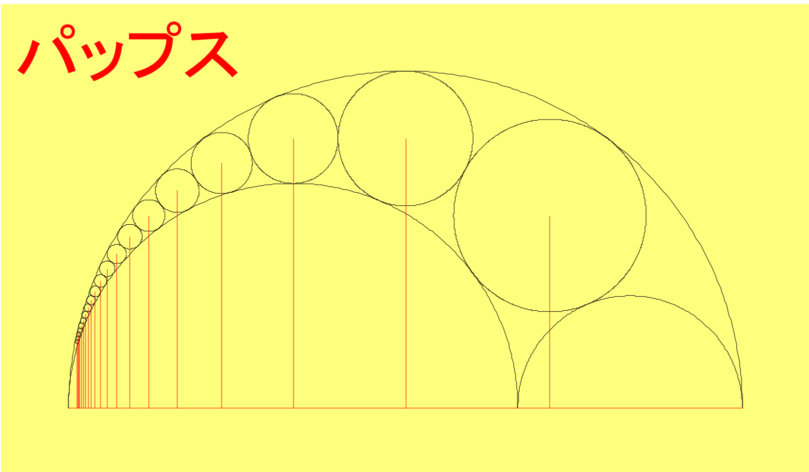
こうして得られる図形をアポロニアン・ガスケットと呼ぶことにする。



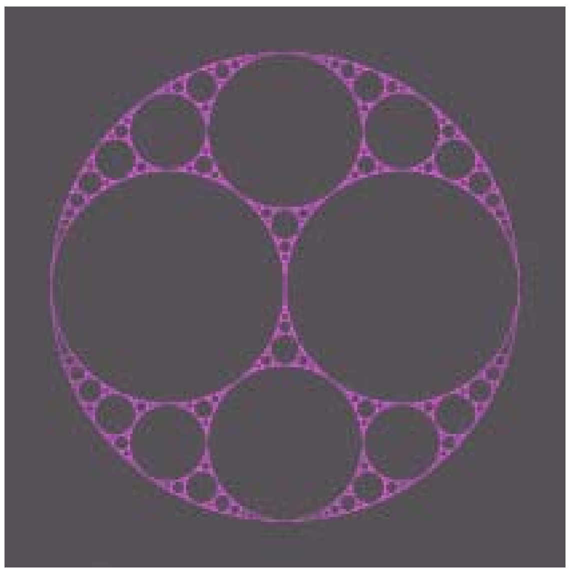


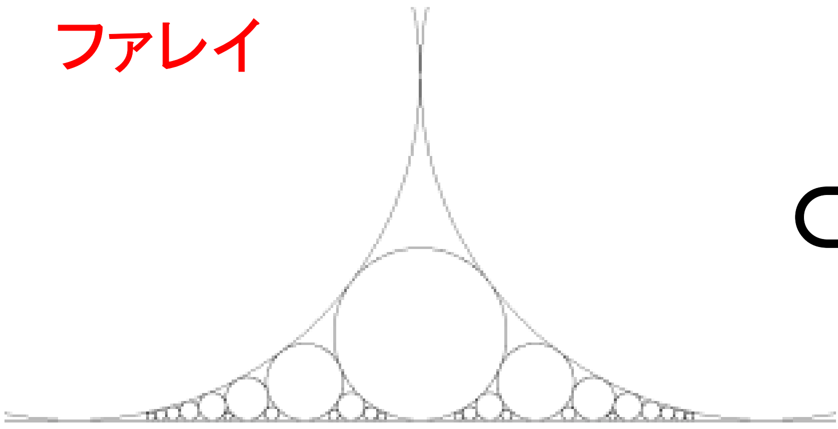


注意。パップス、ファレイの図形は、アポロニアン・ガスケットの部分である。

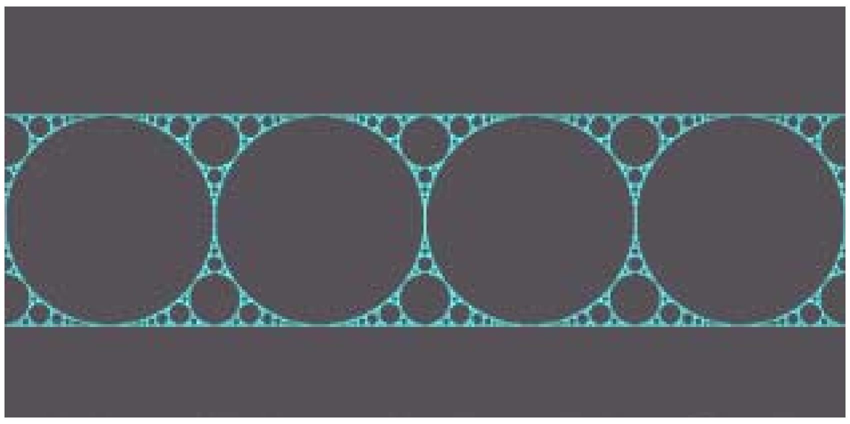


⊂





⊂



・アポロニアン・ガスケットの描き方　　２つずつ接する３つの円に対し、３つの円に接する円を次々に描き加えていく。

・注意　　最初の３つの円を定めると後の描き方は一意的に定まっている。

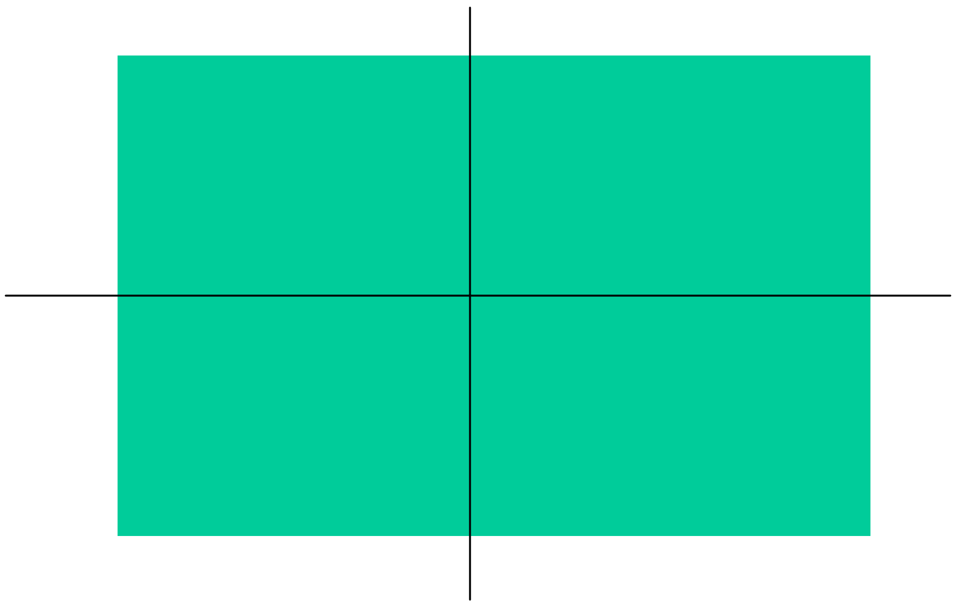
さらに、最初の３つの円を取り替えても似たような図形となる。その理由は、「最初の３つの円」同士は、「反転と相似変換」で写すと重なり合うからである。

・オイラー(1707－1783)

・ガウス(1777－1855)

を持ち出すまでもないが、複素数　$z = x + y\sqrt{-1}$　で書くと

平面上の点は１つの複素数で表される座標を持つ。複素数平面上で、



相似変換は　$z \longmapsto az + b$

実軸についての鏡映は

$$z \longmapsto \bar{z} = x - y\sqrt{-1}$$

単位円についての

反転は

$$z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

これらを順に行って得られる

向きを保つ写像は１次分数変換

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

となるが、これは、

2×2 複素正則行列

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のなす群

$GL(2; \mathbf{C})$ による変換

である。

ここまでの議論をまとめると、２つのアポロニアン・ガスケットは１次分数変換で写りあう（等角同値、共形同値という)。その意味でアポロニアン・ガスケットは一意的な図形である。

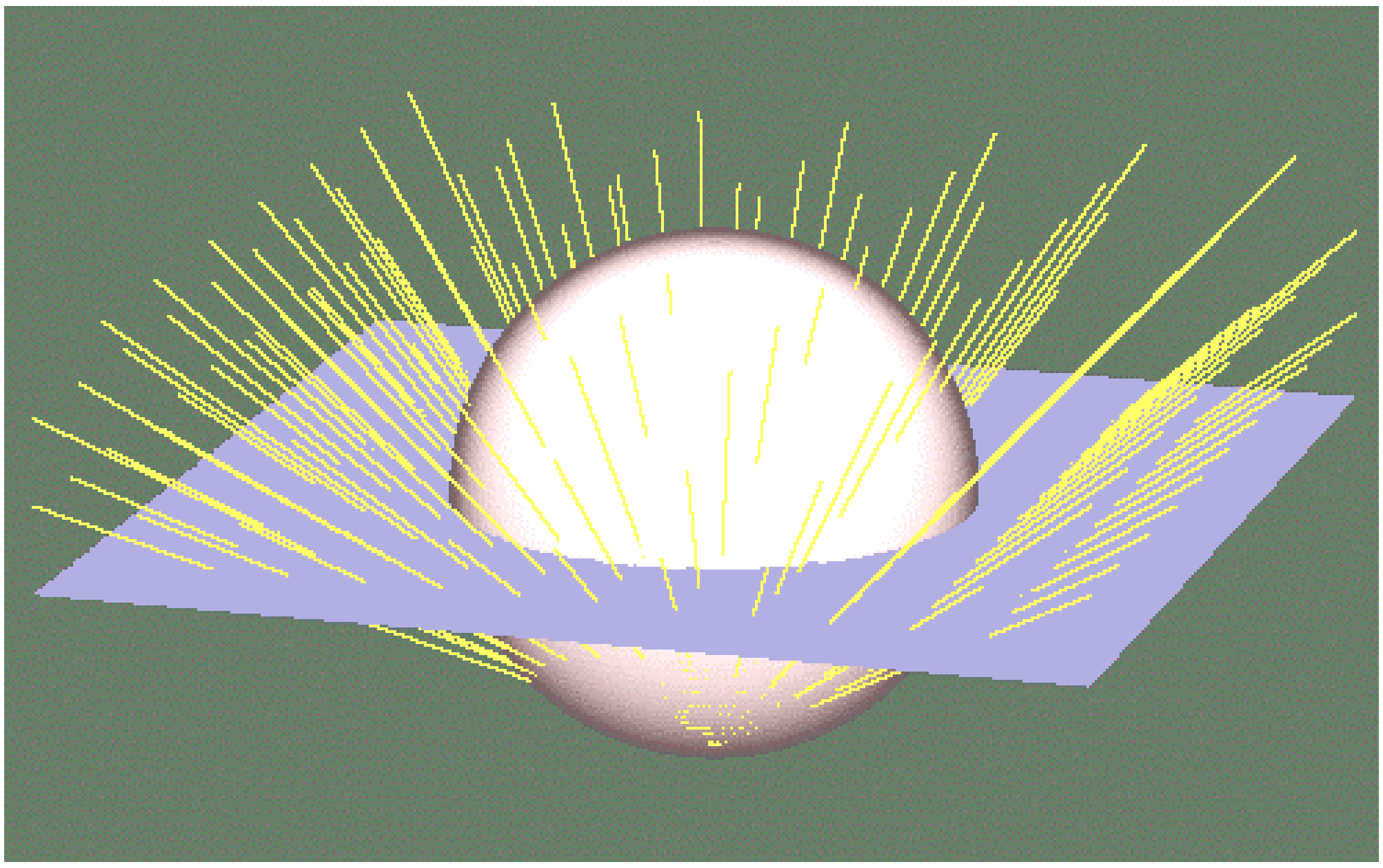
さらに、１つのアポロニアン･ガスケットＧからＧ自身への１次分数変換を考えると、これは「２つずつ接する３つの円（順序付き)」により一意的に定まる。「２つずつ接する３つの円（順序付き)」は、自然数と同じ個数しかないことがわかっているので、群Ｋは可算個の元からなる。

・クライン (1849－1925)

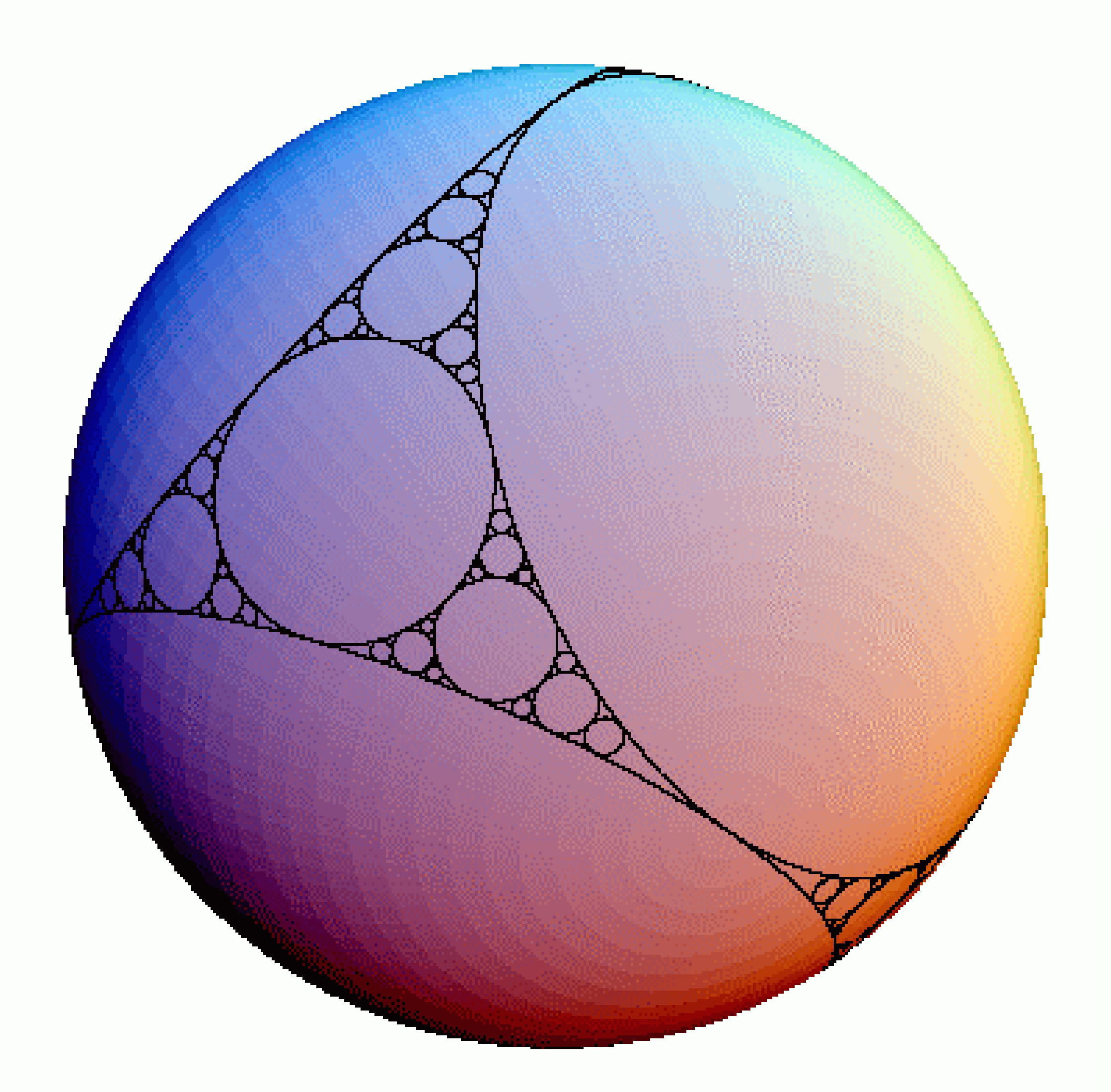
は、このような１次分数変換のなす群の研究を行った。

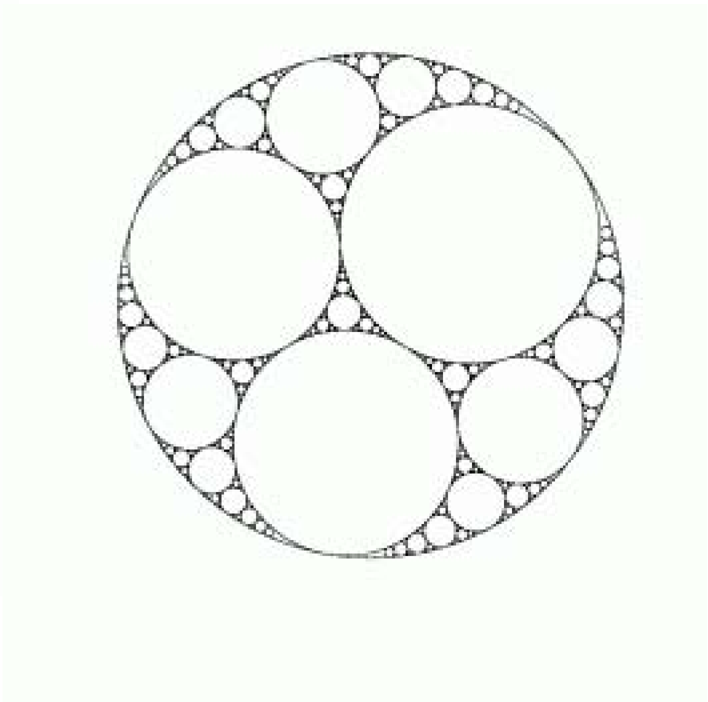
３．ステレオグラフィック射影と双曲幾何

　アポロニアン・ガスケットは球面上で考える方が良い。
平面と球面の間には、ステレオグラフィック射影がある。



　ステレオグラフィック射影は３次元空間の球面についての魔法の反転であり、平面上の「円または直線」を球面上の円に写す（等角図法)。ステレオグラフィック射影により、右下の平面上の図は左下の球面上の図のようになる。

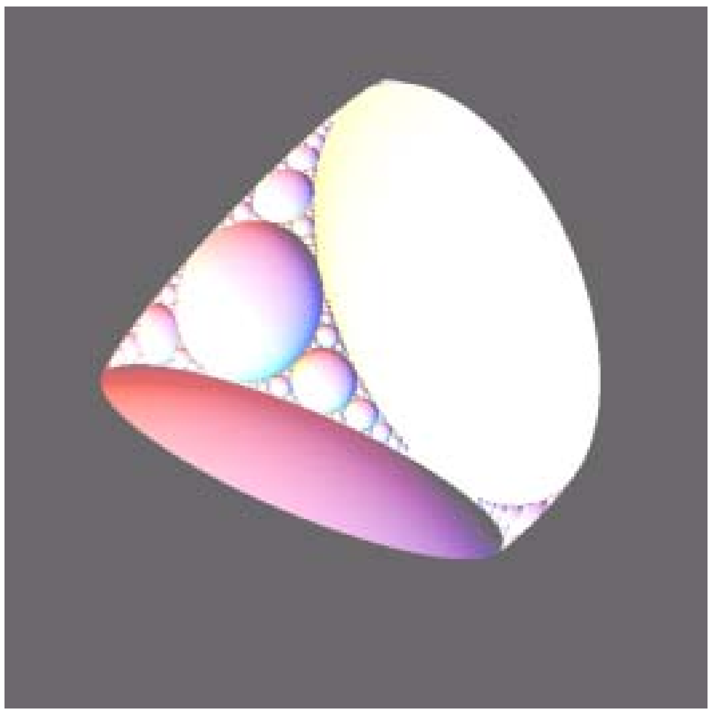




・セール (1926－) の理論により、

アポロニアン・ガスケットGをそれ自身に写す
１次分数変換の群Kの構造もわかり、
$A_4 \underset{\mathbf{Z}_3}{*} D_6$のように書かれる。$A_4$は４次の交代群、
$D_6 \cong \mathcal{S}_3$は位数６の２面体群、$\underset{\mathbf{Z}_3}{*}$は、
それぞれに含まれる３次の巡回群を同一視する
ことを示す融合積の記号である。

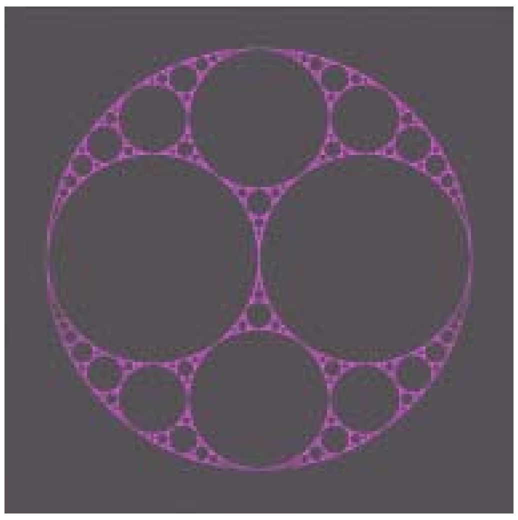
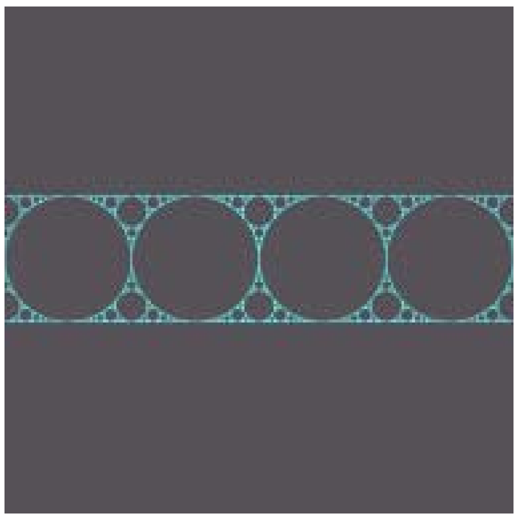
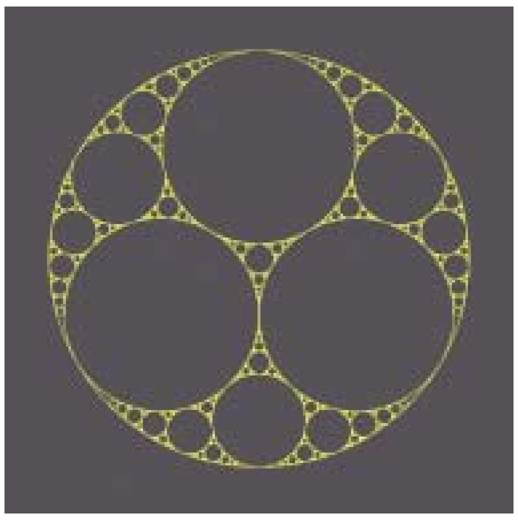
これを示すために、球面に囲まれる球体を考える。球体は、ポアンカレの計量を与えると双曲空間Ｈになる。１次分数変換は、Ｈに等長変換として作用すること、群Ｋによる球体の商空間の形がわかることからクライン群Ｋの構造がわかる。双曲空間の研究について次の名前を挙げておこう。



・ロバチェフスキ (1792－1856)
・ポアンカレ (1854－1912)
・サーストン (1946－)

右の図はＫの作用の研究で表れる凸核と呼ばれるものである。

4. 自己相似性

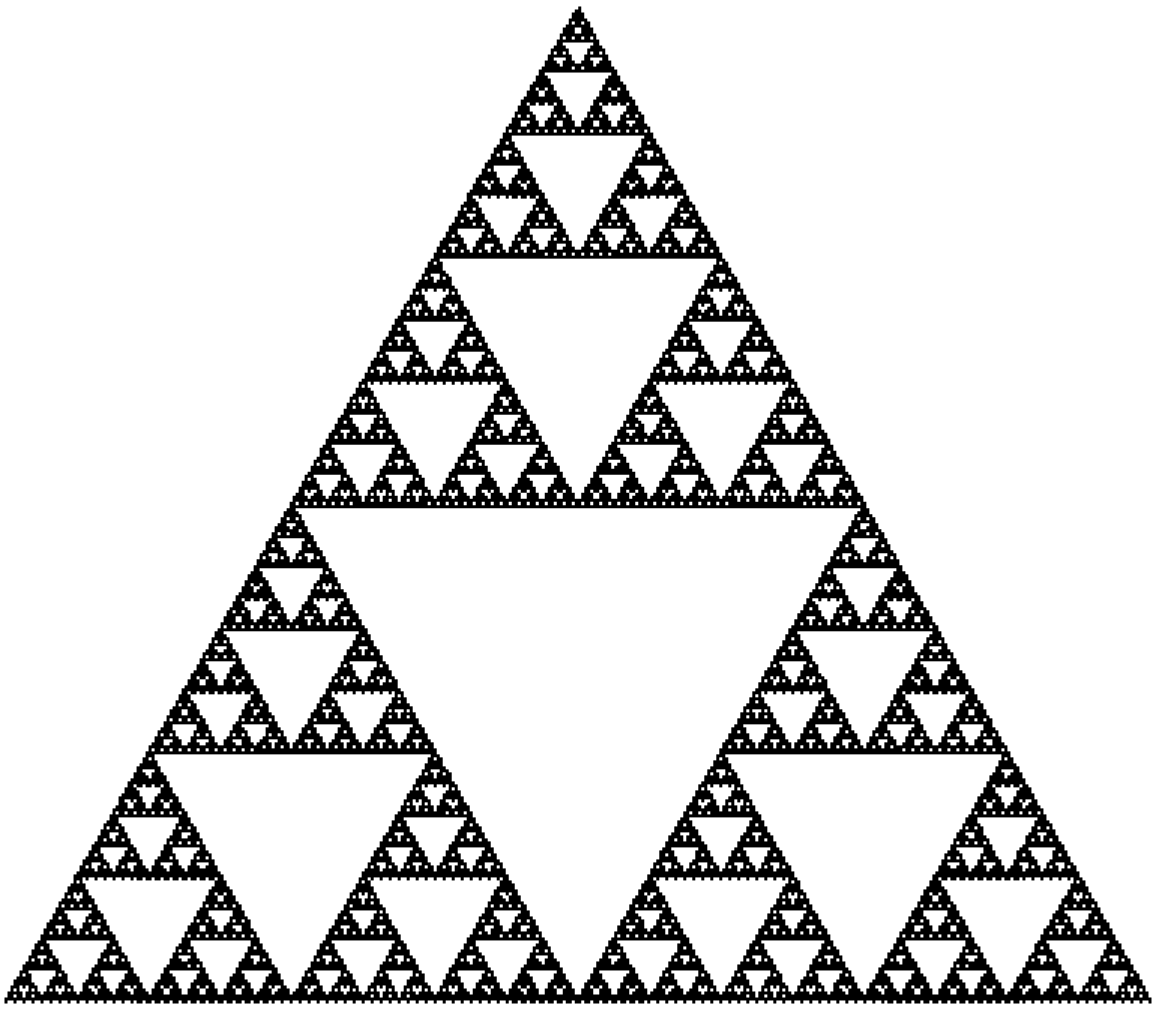




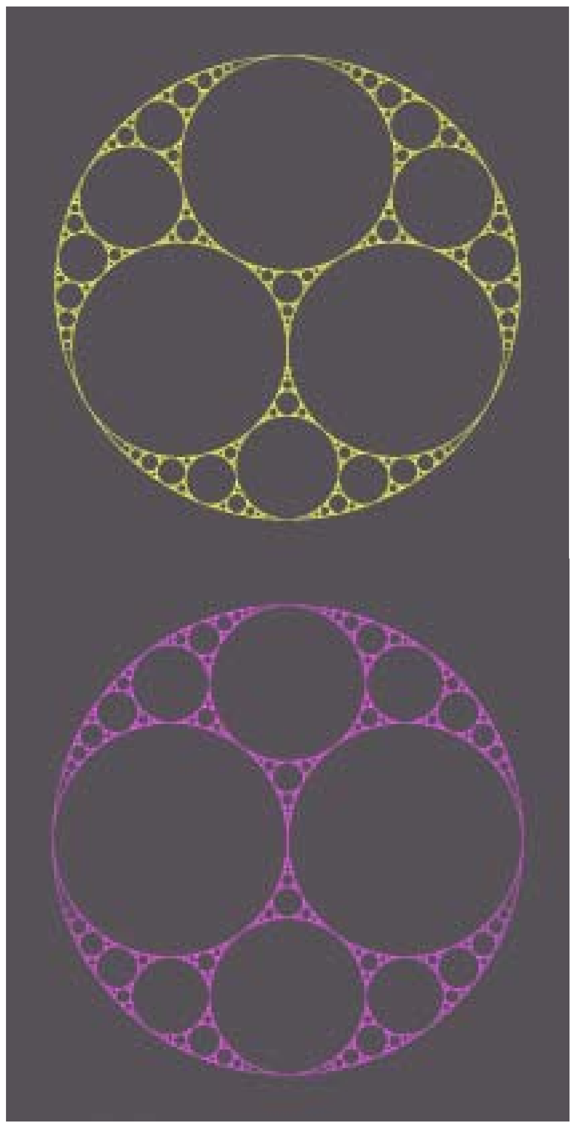
アポロニアン・ガスケットは、部分とその部分が、同じような形をしている。自己相似性を持つ図形である（群Ｋの作用による）。

自己相似性を持つ図形として

・シエルピンスキ (1882－1969)

のガスケットと呼ばれる図形がある。





シエルピンスキ・ガスケットからGの一部への同相写像がある。シエルピンスキ・ガスケットを２つ合わせて、アポロニアン・ガスケットが作られる。それでGをアポロニアン・ガスケットと呼んだ。

・アポロニアン・ガスケットの描き方を復習しておこう。

２つずつ接する３つの円に対し、３つの円に接する円を次々に描き加えていく。このとき、アポロニアン・ガスケットGには操作の極限として付け加わる点も含めることにする（閉集合)。

５. アポロニアン・ガスケットの同相群

私がアポロニアン・ガスケットGに興味を持った理由を説明しよう。GからGへの１対１連続写像の全体は群をなす。これを同相群 Homeo（G）と呼ぶ。

・衝撃の事実　　Homeo+(G)＝K　これが、前出の可算群Kとなる。

ここで、＋は向きを保つという意味で、指数２の部分群が定まる。何故これが衝撃的かというと、円周をはじめとする１次元以上の多様体、カントール集合、メンガー曲線などの位相的に等質な空間の同相群は非可算個（連続濃度）の元を持つ。同相群は、いろいろな良い性質を持つ群である。Gは等質ではないが、同相群がクライン群になる自然な例があることが面白いのである。（シエルピンスキ・ガスケットの同相群は、３次の対称群 S_3 であることは良く知られていた。）

・カントール(1845－1908)　・メンガー(1902－1985)

上の事実を示すためには､アポロニアン･ガスケットの位相を調べる必要がある。

アポロニアン・ガスケットの位相的性質

・２つの点は曲線で結ぶことができる（弧状連結という）。

・Ｇの上の収束点列はＧの点に収束する（閉集合であるという）。　（そうなるように定義した。）

・２つの円は交わらないか高々１点で接する。

アポロニアン・ガスケットの性質「接点」

・２つの円の接点になる点の個数は、有理数の個数に無限遠点の１個を加えたもので、自然数の個数と同じである。そうでない点の個数は実数の個数と同じである。

・どの点に対してもその点に収束する接点の列がある。（接点の全体は稠密であるという。）

・２つの接点は有限個の円を通る曲線で結ぶことが出来る。

アポロニアン・ガスケットの性質「円」

・２つずつ接する３つの円がある。さらにそのような３つの円に対して、その３つに接する円が丁度２つある。２つの円（の接点）は、２つずつ接する３つの円の接点について、反対側にある。

・Ｇの各点に対し、その点を通るG上の単純閉曲線がある（単純閉曲線とは、円周の１対１連続写像による像のことである）。

・Ｇの単純閉曲線でＧを分割しないものは、円である。

ここで、我々にとって重要な結果は次のものである。

・ジョルダン(1838－1922)

・ジョルダンの閉曲線定理

球面上の単純閉曲線は、球面を２つの円板に分割する。

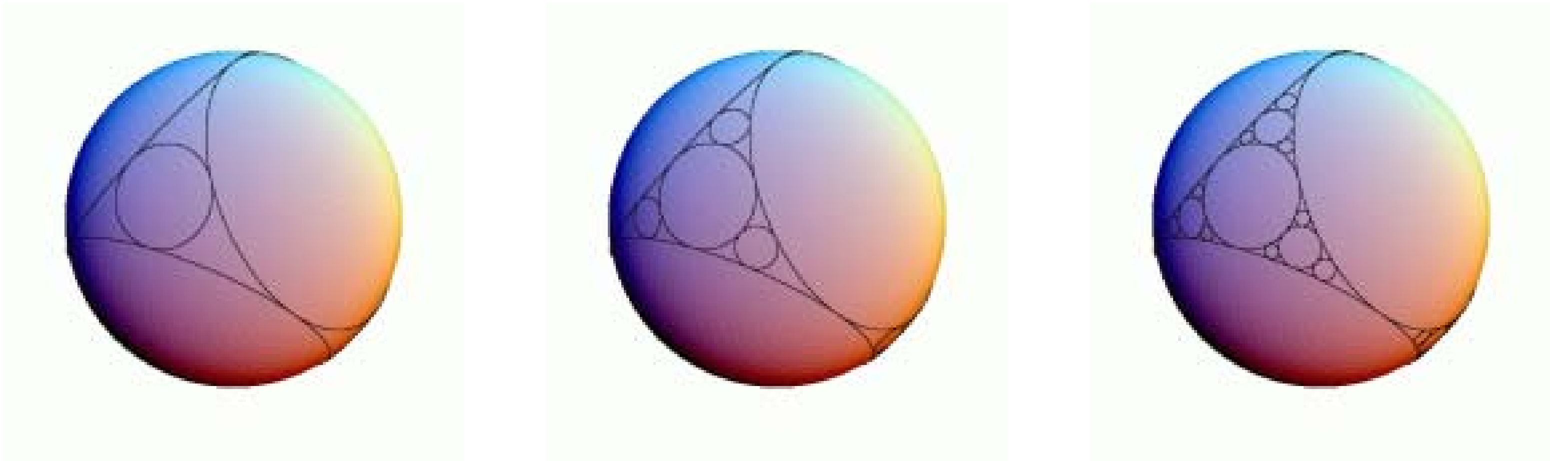
証明は、例えば、クラトフスキの教科書の１０章を参照。河田敬義著「位相数学」共立出版、クゼ・コスニオフスキ著　加藤十吉訳「トポロジー入門」東京大学出版会にもある。

我々にとって何故重要かというと、図形Ｇの中で「円」を「Ｇ上の単純閉曲線の中でＧを分割しないもの」として再定義することが出来るからである。

アポロニアン・ガスケットＧは球面上の図形であるから、その上の単純閉曲線は、球面を２つの部分に分割するが、そのとき同時にＧが分割されるかどうかを考える。そうすると、Ｇの構成に用いられた円周だけがＧを分割しないことがわかる。

アポロニアン・ガスケットGからGへの同相写像

- Ｇを固定して考える。ＧからＧへの同相写像ｈをとる。
- Ｇの中に「２つずつ接する３つの円」Ａをとる。ｈ（Ａ）も「２つずつ接する３つの円」で、その３つの接点の間の対応が定まる。
- Ａ，　ｈ（Ａ）のそれぞれに対して、３つの円に接する２つの円が定まるが、このとき新たに得られる６個の接点についての対応も定まる。
- さらに、この５個の円に対して、３つの円に接する円が新たに６個あるが、そのとき新たに得られる１８個の接点についての対応が定まる。
- このようにして次々に接点の対応を定めることが出来る。



- このようにして得られる接点の全体は、現れた円の上で稠密である。
- さらに「２つの接点は有限個の円を通る曲線で結ぶことが出来る」ことから、このようにしてすべての接点が得られることが導かれる。
- これらの接点の上の収束点列の収束先の全体（接点の集合の集積点全体）の集合はＧであり、これでｈが定まっている。
- 向きを保つ場合は、３つの円を３つの円に写す１次分数変換ｇと比較するとｈ＝ｇ　であることがわかる。

６．アポロニアン・ガスケットの変形

GL(2;C)は連結だから、アポロニアン・ガスケットは変形でうつりあう。次のものが興味深い。

面対称のアポロニアン・ガスケットが、球面上で正４面体と同じ対称性を持つアポロニアン・ガスケットに変形し、再び面対称のアポロニアン・ガスケットに変形していく様子を描いたもの

正三角錐の対称性をもつアポロニアン・ガスケットから、正４面体の対称性、正３角柱の対称性を持つアポロニアン・ガスケットへの変形の様子

７．アポロニアン・ガスケットについての文献等

この２００６年３月２５日の日本数学会市民講演会の講演は、２００４年５月１０日、１７日に東京大学教養学部でおこなった数理・情報一般「数学の現在・過去・未来」の講義ノートをもとにしています。

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/surijoho/surijoho_old.html

２００４年の講義の準備には、大阪大学の大鹿健一さん、東京工業大学の小島定吉さんにお世話になりました。小島定吉研究室は

http://www.is.titech.ac.jp/~sadayosi/lab/index-j.html

２００４年の講義を再現した記事を、日本評論社「数学の楽しみ」２００５年夏号９９ページ－１１７ページに載せました。球面の円円対応が向きを保てば１次分数変換になることなども書いています。また、アポロニアン・ガスケットの変形のアニメーションの画像のコピーが掲載されています。

今回の講演準備のために歴史的なことを幾つか調べました。特に、筑波大学教育学系の礒田正美研究室のウェブページの記事を参考にしました。

http://130.158.186.230/forAll/project/history/index.html

また、この数学通信の記事では、ところどころに名前だけ入っていますが、講演中にはそれらの数学者の肖像をお見せしました。その多くはUniversity of St. Andrews, The MacTutor History of Mathematics archive

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

にあるものです。

最近、Kenneth Stephenson, Circle Packing: A mathematical tale, Notices of the AMS vol. 50, number 11(December 2003)1376-1388 という文献に気が付きました。最初の導入のあたりはこの講演と良く似ています。彼もApollonian gasketと呼んでいます。ウェブページ

http://www.math.utk.edu/~kens/

にNoticesの文章の他、アポロニアン・ガスケットの絵もあります。

つぼい たかし（東京大学大学院数理科学研究科）
http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/