伊藤清先生と確率解析ー分布系列から見本路へ

福島 正俊 (大阪大学名誉教授)

伊藤清先生のガウス賞受賞を記念するこのおめでたく喜ばしい日に，先生のお仕事を顕彰する講演を行う機会を与えられましたことを，私は大変光栄に存じます．[1]
私が京都大学数学科の大学院生として伊藤先生の下で確率論を専攻し始めたのは 1959 年のことでした．それはちょうど W. Feller によって発見された 1 次元拡散過程の最も一般的ではあるが数学解析的であった記述を徹底的に確率解析的な記述として捉えなおすというお仕事が，伊藤先生を中心に，McKean 教授との共同研究を伴ってほぼ完成に近づいていた頃でした．伊藤先生の主催される京都大学の確率論セミナーには日本の多くの若手研究者が集い，先生のこの成果を理解咀嚼して，より一般の確率過程の研究に発展させようという熱気にあふれておりました．その中には，池田信行，本尾実，飛田武幸，西尾真喜子，田中洋氏等がおられましたし，大学院の 1 年先輩には，渡辺信三氏，同級生には国田寛氏がいました．このような高揚期に身を浸すという幸運に恵まれ，その影響が現在にまで及んでいることを強く感じている者の一人として，伊藤先生のご業績の一部とそれに関連する諸研究の一端を，私なりにやや詳しくご説明したいと思います．

伊藤先生による 1 次元拡散過程の研究の内容を，
「数学解析的記述を確率解析的記述に徹底する」
ことと申しましたが，これは先生のご研究に一貫して流れ，かつ確率過程の研究の歴史においても特筆すべき次のようなもっと特別の意味を持っています．それは，
「分布の系列のレベルの解析から，見本路レベルの解析と総合への飛躍」
ということです．後者が前者よりもずっと深く，後者の研究で得られた公式や方程式の特定な平均を取ることによって前者に関するそれらが得られます．また別の仕方で平均を取ると，前者のみの解析では得られないような公式を作り出すことも可能なのです．

時間の経過に伴ってランダムに変動する粒子の運動を数学的にモデル化したものが確率過程です．説明を簡単にするために，数学記号を 2 つだけ用いることをお許しください．時刻を t で表します．特定の時刻 t における粒子の位置を $X_t(\omega)$ で表します．ω は見本と呼ばれ，ランダム性を表すパラメターです．見本 ω を固定し，時刻 t を変動さすことによって位置 $X_t(\omega)$ が描く軌跡が見本路です．例えば水に浮かぶ花粉内の微粒子を顕微鏡で観察すると，周りの多数の水の分子の衝突効果の結果，時間の経過とともに極めて不規則な連続曲線を描きます．これがブラウンが最初に観察し，現在ブラウン運動と呼ばれている確率過程の見本路です．株価の時間的変化を表すグラフも，ある確率過程の見本路と考えることができます．

[1] この文章は 2006 年 9 月 14 日に京都大学で開催された伊藤清博士ガウス賞受賞記念講演会での講演原稿に基づいている．

確率過程を数学的に厳密に定義するためには，見本 ω 全体の集まりを考え，その各部分の起こり易さを指定する確率測度と呼ばれる量を定める必要があります．この意味で最初にブラウン運動を厳密に定義したのが N. Wiener (1923 年) であり，もっと一般的な確率過程を厳密に定義する組織的な方法を与えたのが A. N. Kolmogorov (1933 年) であり，また連続時間に依存するような見本路の関数についての演算を可能にするために，確率過程の変形理論を導入したのが J. L. Doob (1938 年) でした．

時刻 t を固定すると，粒子の位置 $X_t(\omega)$ はあれこれの値を取る確率分布 μ_t の定まった確率変数と考えられます．確率過程には時刻 t をパラメターとする分布の系列 $\{\mu_t\}$ が対応するわけです．例えばブラウン運動に対応する分布系列 $\{\mu_t\}$ はガウスが誤差論の研究で発見したガウス分布と呼ばれるものの集まりです．この分布の系列は数学解析的量であるために，フーリエ変換や偏微分方程式によって特徴づけようとすることが可能です．確率過程の研究はこのような形で始まりました．確率過程の重要なクラスの中には，独立な増分を持つもので，通常「加法過程」あるいは「レヴィー過程」と呼ばれているクラスと，それよりもずっと一般な「マルコフ過程」と呼ばれているクラスがあります．見本路が連続であるようなマルコフ過程は「拡散過程」と呼ばれます．

加法過程に対応する μ_t のフーリエ変換を特徴付ける公式は Lévy-Khinchin (1937 年) によって与えられ，拡散過程の推移確率分布は Kolmogorov (1931 年) によって拡散係数とドリフト係数を含む 2 階の放物型偏微分方程式の解として特徴付けられ，それは更に Feller (1936 年) によって，ジャンプ・レートを表す積分核による積分項をも含む方程式として，ジャンプを含むマルコフ過程にまで拡張されていました．

この直後に伊藤清先生が登場します．先生は東京大学数学科をご卒業になった後，名古屋大学数学教室助教授に赴任されるまでの期間である 1939 年から 1943 年にかけて内閣統計局にお勤めになっていました．この間に先生は加法過程とマルコフ過程に関する 2 論文を発表されました．どちらも見本路の解析と構成を厳密にしかも徹底的に展開されたもので，分布の系列に関する Lévy-Khinchin の公式や，Kolmogorov-Feller の方程式はそれらから特定の仕方で平均を取ることによって得られます．今改めてこの 2 論文を読み返してみますと，あたかも突然に誕生した 2 つの宝石を眺めるような錯覚を覚えます．

もっとも加法過程の論文には，1937 年に出版された P. Lévy による仏文の著書という原石がありました．この中で Lévy は加法過程の見本路の分解を真に深い洞察によって記述していました．しかし記述は厳密性に欠け，あいまいで難読なものでした．当時は，私が学生だった 50-60 年代には既にあった複写機のような便利なものはなく，先生は図書館に通って Lévy の本を筆写しながらそれに取り組まれたという苦労話を繰り返しされたことを憶えています．その結果，Kolmogorov, Doob の厳密な枠組みを用いて，加法過程の見本路 $X_t(\omega)$ からポアッソン・ランダム測度とブラウン運動を巧みに取り出して，それによって元の見本路を再構成することに成功されました．今日，レヴィ・伊藤の分解定理と呼ばれているものです．

この成功に基づいて，伊藤先生は加法過程の基本構成要素を用いて，マルコフ過程の見本路を一気に大胆に構成しようと試みられました．Kolmogorov-Feller の方程

式における拡散係数，ドリフト係数，ジャンプ・レート核が与えられたとき，それらに見合って，ブラウン運動とポアッソン・ランダム測度を瞬間瞬間にうまく繋いで行くという描像の下に，マルコフ過程の見本路 $X_t(\omega)$ を直接に確率微分方程式の一意解として構成することに成功されたのです．1942 年の「全国紙上数学談話会誌」という手書きの謄写版刷りの雑誌に載った日本語の論文においてです．この雑誌は当時の日本全国の数学者達の研究の交流を促進するために，大阪大学の数学教室から編集発行されていたものでした．この論文は戦中から戦後にかけての先生ご自身による整備・拡張を経て，1951 年にアメリカ数学会の叢書シリーズであるメモアールの英文書として発表されました．

確率微分方程式を定式化し，その解の計算運用を可能にする必要から，この日本語論文において,「確率積分」あるいは「伊藤積分」と呼ばれているブラウン運動の見本路によるランダムな被積分関数の積分概念と,「伊藤の公式」と呼ばれている確率積分の変換公式が初めて同時にその姿を現します．ブラウン運動の見本路はそのどの部分を取り出しても，普通の仕方で長さを計ると無限大になってしまうため，Newton-Leibniz 以来の伝統的方法では積分が定義できず，微分やその変換公式も考えられません．しかし見本路の増分の自乗和の極限はランダムでない有限量であるという良い性質があるために，それを巧みに用いて確率積分概念とその変換公式が捉えられたのです．伊藤の公式は Newton-Leibniz calculus における合成関数の微分法に相当しますが，ブラウン運動の見本路の上述の性質が反映して，後者にはない 2 次の補正項が現れます．この補正項が効いて，一定の仕方で平均を取ると，Kolmogorov の 2 階微分方程式に繋がるのです．Itô calculus の始まりです．

私は丸山儀四郎先生から，先生が徴兵されていた頃，門衛当番の詰所の灯りでこの日本語の伊藤論文を繰り返し読まれたと伺いました．丸山先生の他に，1944 年にポテンシャル論とブラウン運動の見本路の深い関係についての先駆的な論文を発表された角谷静夫先生を除いて，当時の日本では，この伊藤論文の意義を理解された方はあまりおられなかったと思われます．日本は数学の研究でも国際的に孤立した状況に置かれておりました．しかし，世界中を見渡しても，たとえこの日本語の伊藤論文が読めたとしても，その意義を十分に理解できた人が，上に名前を挙げた人たちの他にどれだけいたでしょうか？また，確率論研究の伝統の強かったロシアの当時の事情はよく分かりませんが，日本だけでなく欧米においても，確率過程の研究は厳密な純粋数学としての市民権を数学者社会の中で十分には得られていない状態でした．ごく限られた数の先達たちが，時代を先駆ける時期がしばらく続いていたのです．

1956 年に伊藤先生がプリンストン高等研究所から京都大学に帰られ，1 次元拡散過程の H. McKean との共同研究が進行していた頃は，明らかに状況が変わり始めておりました．Doob は 1953 年の著書で，公平な賭け事を最も抽象的にモデル化したマルチンゲールと呼ばれる確率過程の見本路の深い解析を行っていました．ロシアの E. B. Dynkin の学派は最も一般なマルコフ過程を定式化し，その見本路の関数である加法的汎関数による変換論を展開し始めておりました．また G. A. Hunt によって一般のマルコフ過程に内在するポテンシャル論的構造が明らかにされつつありました．これらの動きが互いに影響し合い共鳴し合って，60 年代以後の，時には意外と思われ

るような理論展開へと繋がって行きました．その様子に少し触れてみたいと思います．

Feller は一般の 1 次元拡散過程が標準スケール関数と標準測度と呼ばれる二つの量によって局所的に特徴づけられることを解析的に見出していましたが，伊藤先生と McKean (1965 年) は Lévy の考察したブラウン運動の局所時間と呼ばれる量を標準測度で積分して得られる加法的汎関数によって，ブラウン運動の見本路の進行スピードを変更することと，標準スケール関数による位置の変換を行うこととを組合すと，一般の 1 次元拡散過程の見本路が得られることを示されました．このようにして，見本路の時間的要素と図形的要素への分解と総合が実現したのでした．

更に Feller が解析的に見出していた一般境界条件に従う 1 次元拡散過程のマルコフ的拡張を，見本路レベルで構成することを目指して，伊藤先生は 1970 年の論文で，excursion（見本路の境界から離れて境界に帰るまでの部分）の値を取るポアッソン点過程を考察されました．これは加法過程のレヴィ・伊藤分解におけるポアッソン・ランダム測度の無限次元版とみなされるもので，伊藤先生ご自身が後に述懐されていますように，いつも「有限次元的なものでも，無限次元的観点から捉えようとする先生の習慣」の発露でした．私がイリノイ大学に滞在しておりました頃の 1970 年の研究集会で伊藤先生がこの講演をされましたとき，Doob 教授が「貴方はいつもそのような見方をする」と言って感心しておられたのを思い出します．

さて 1 次元拡散過程の場合，Kolmogorov の方程式の右辺は Feller の標準形のごく特別な場合に当たりますので，内在性に欠けると思われたせいでしょうか，伊藤先生は 50-60 年代のセミナーでは，前者に関連させて考察されていた確率微分方程式や，それに付随する Itô calculus には殆ど言及されませんでした．ところで，1965 年の本尾-渡辺論文においては，一般のマルコフ過程に対して，平均が 0 で自乗平均が有限な加法的汎関数の族の構造についての深い解析が実行され，その中では確率積分の特別な場合の定式化が与えられていました．一方，劣マルチンゲールをマルチンゲールと増加過程の和に分解する Doob-Meyer 分解定理が P. A. Meyer によって完成されつつありました．この二つの仕事が合流して，1967 年の国田-渡辺論文と，同年の Meyer の Strasbourg Seminar Notes に発展しました．

国田-渡辺-Meyer の理論では，一般の半マルチンゲールに対して確率積分が定式化され，その変換公式が「伊藤の公式」の名で導かれています．Itô calculus が半マルチンゲールという壮大な枠組みの中で復活したのでした．

それ以降，伊藤先生を含めて多くの研究者達の Itô calculus と確率微分方程式への関心が高まりました．確率微分方程式の解の存在と一意性についての伊藤先生による基本定理は，70 年代以降，渡辺信三氏等のグループにより，解や一意性の概念の新たな定式化も含みながら，より深く一般的な場合へと拡張されて行きました．これと平行して，公理論的ポテンシャル論と Hunt 理論を合体させた対称マルコフ過程論の研究が盛んになって行きますが，これは 1 次元拡散過程の研究の自然な拡張とみなされるものです．また，伊藤先生の 70 年論文が直接のきっかけになって，excursion 理論とその応用についての数多くの研究が生まれ現在に至っています．

以上伊藤先生のお仕事の一部とそれに関連する数学研究の発展の一部をたどってきましたが，注目すべきことは，工学に関連する確率制御理論と filtering 理論の記述

に，伊藤の確率微分方程式が直接用いられ，それが逆に 70 年代以降の確率微分方程式の数学的研究を促す一つの駆動力となったことです．

伊藤先生は学生時代から数学理論の物理学への応用に非常に強い関心を持たれ，実際 60 年代に至るまで，乱流や Feynman 積分に関する幾つかの論文をお書きになっています．また先生は確率論と日常生活に関係する事柄，例えば，人口動態の統計，との関連についての会話を楽しまれ，造詣の深さを披瀝しておられました．そして 70 年代以降は，伊藤理論自体の応用が，工学，物理学，生物学の中へと次第に広がって行くのが，先生や多くの人によって確実に感じられるようなっていました．しかしながら金融商品の価格決定に伊藤理論が使われるのは先生にとって全く予想外のことで，これにはとまどいを感じられたようです．

思い直して見ますと，確率論は本来賭け事の考察から生まれたものですし，20 世紀初頭にパリの株式市場で仕事をしていた L. Bachelier は，ブラウン運動の見本路を株価の変動に関連させながら，ブラウン運動の分布系列を発見しました．これはブラウン運動の統計力学的考察を行ったことで有名な Einstein 論文が発表されるよりも少し前のことです．ですから，ブラウン運動の見本路解析の基本である伊藤理論がやがて金融の問題に応用されるのは，ごく自然の成り行きだったと言えます．それにしても，1973 年に，デリバティブという金融活動と伊藤理論との構造的対応を初めて洞察し，それによって前者にとって極めて有効な公式を導いた Black-Scholes-Merton の業績は驚嘆に値することと言わねばなりません．伊藤理論の創生から 30 年以上経ってからの出来事でした．

このような経過は，純粋数学理論の発展とそれに伴う応用の発展という二元的な見方で捉えるよりは，むしろ次のように述べる方がよいのかもしれません．多くの人々の極めて多様で優れた科学的営みの中に，伊藤の数学理論が時間をかけて浸透し，それらが互いに影響を与え合い重なりながら広がって来ました．それはあたかも長い時間の流れの中で奏でられる協奏曲のようです．伊藤の数学理論の主題は 21 世紀にもまた新たな演奏者による異なる音色の協奏を惹き起こして行くに違いありません．

「確率解析における私の仕事は，純粋に数学的な研究でしたが，それが評価されての今回の受賞につきましては，ともに数学の研究に勤しんできた仲間たちとは勿論，私の想像を超えた領域にまで確率解析の成果を応用された方々とも，その名誉と喜びを分かち合いたいと思っております」
という伊藤清先生のお言葉に，私たちは文字通り共感し，先生とこの喜びを分かち合いたいと思います．