

書評： 岡村博著 微分方程式序説（共立出版，2003）

井川 満

x は \mathbf{R} の点を表し， $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ は \mathbf{R}^n の点を表すとする． D を $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ の領域とし， $F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は， D で定義された実数値関数とする． $\mathbf{F}(x, \mathbf{y}) = (F_1(x, y_1, \dots, y_n), F_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, F_n(x, y_1, \dots, y_n))$ と置けば， $\mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ は D で定義された \mathbf{R}^n に値をとる関数となる．正規型 1 階常微分方程式系

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \quad \text{すなわち} \quad \frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を考える．これは，ある区間で定義された微分可能な実数値関数 $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で，(1) の両辺に代入したとき x の恒等式となるものを探し出す問題であり，これを満たす $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ を (1) の解と呼ぶ．

$(a, b_1, \dots, b_n) = (a, \mathbf{b}) \in D$ とし，(1) の解であって，さらに

$$(2) \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{b}, \quad \text{すなわち} \quad y_i(a) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を満たすものを求める問題を常微分方程式系 (1) に対する初期値問題という．初期値問題の解の存在に関しては，各 $F_i(x, \mathbf{y})$ が連続でありさえすれば，(1), (2) を満たす解 $\mathbf{y}(x)$ が a を含むある区間で存在することが分かっている（Peano の定理）．しかし， \mathbf{F} が連続なる条件だけでは，解が無数個存在する例が簡単に見つかる．

それでは，初期値問題の解が唯一つであるのはどのような場合であるか，との問いが続くのは，常微分方程式の初期値問題が生まれた歴史からも当然のことである． $\mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ が変数 \mathbf{y} について Lipschitz 連続であれば解の一意性が保障されることは良く知られている．しかし，これは一意性の十分条件であるが，必要条件でない．それでは初期値問題の解の一意性が成り立つための必要十分条件は，どのように与えられるのか，が次に問われるのはまた自然の成り行きである．この問いは，1890 年代から 1940 年くらいまでの，微分方程式研究の重要な課題の 1 つであった．

数学辞典第 4 版，“常微分方程式の初期値問題” の項目に，次の結果が記されている： $\mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ は連続とする．任意の $(a, \mathbf{b}) \in D$ にたいして，初期値問題 (1), (2) の右側に出る解が唯一つであるための必要十分条件は， $(x, \mathbf{y}) \in D$, $(x, \mathbf{z}) \in D$ となる $(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^{1+2n}$ に対して定義された 1 階連続微分可能な実数値関数 $\Phi(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ で， $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ ならば $\Phi(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0$ ， $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ ならば $\Phi(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ となっており，かつ

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial y_i} F_i(x, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{\partial z_i} F_i(x, \mathbf{z}) \leq 0$$

を満たすものが存在することである。

この定理を見つけ出したのが、“微分方程式序説”の著者岡村博であり、1941年、1942年の論文において公表された。上の関数 Φ を、“(岡村の)距離関数”と呼ぶことにする。

この著作の視点を良く表しているのは、“序説”なる語であるように思われる。岡村博から指導を受け、この著作を原稿の段階で読んだ溝畑茂は[1]において、「多分デカルトの『方法序説』が頭にあって、こうなると推察される」と記している。『方法序説』と日本で呼び習わされているデカルトの著書の正式の題名は、“理性を良く導き、もろもろの学問において真理を求めるための方法についての談話”というものである([2])。溝畑の推察に従えば、本書は“微分方程式を良く理解するための方法についての序説”ということになる。

改めて断るまでもなく、ここで微分方程式と呼ばれているのは、常微分方程式をさしている。第6章には、解の一意性の研究の歴史に簡単に触れると共に、著者が上の結果に至るまでの研究の後が簡潔に記されている。そこからも覗えるが、距離関数 Φ は、長年に亘っての着実な思考の積み重ねの後に到達した結果である。その到達点から微分方程式を見直した場合、初期値問題の解の一意性を特徴付ける距離関数 Φ が、常微分方程式を理解するための自然な観点を与えてくれることを述べたのが本書である。

デカルトは、自分が学問をする場合の究極の立場を“私は考える。ゆえに私はある”というところに置いた。岡村博は、常微分方程式を良く理解する最終の観点は、距離関数 Φ であると言うのである。距離関数 Φ が存在するような方程式系、すなわち初期値問題の一意性が保障されるような微分方程式系においては、距離関数 Φ を用いると、多くの問題が自然な、具体的な形で理解されてくる：Cauchyの折れ線の方法で作られる近似解の収束性、解の延長問題、解の初期値に関する連続性、助変数をもつ方程式の解の助変数への依存性の検討、などなどの基本的問題において、考察しなければならない事柄が距離関数によってキッチリと量となって取り出すことが出来るのである(距離関数を使わなければ、背理法に依ったり、問題に応じて付加条件をおく必要が生じる)。方法は自然で見通しが極めてよい。また、応用例としてそれまでの色々の研究者によって、それぞれの工夫の許に得られた結果も、統一的に示すことが出来ることや、また問題によっては結果の大幅な改良も可能であることを示している。

本書には、岡村博から指導を受けた山口昌哉の、岡村博についての文章が付録として収録されている。そこで山口は、距離関数 Φ はLyapunovが解の安定性の考察で用いた、今日Lyapunov関数と呼び習わされているものと同じものであることを述べている。本文の中に、解の安定性については記されていないが、正に安定性そのものを距離関数 Φ を用いて考察されていることも、指摘しておきたい。

私には、初期値問題の解の一意性が成り立つとの条件から、距離関数 Φ を作り上げる第6章「解の一意性」は興味深かった。自然な流れで各段階を理解できるが、一歩下がって何故このような着想に至ったか今尚問う思いである。

今回が3度目となる本書の刊行であるが、著者による“はしがき”の日付は1948年2月8日となっている。この日から数えると60年が間も無く経過しようとしている。著わされてから60年をやがて閲する本書の何を、私はこの書評を読んでくださる方々に一番勧めたいか、それは、ここには“解析をする”とはどういうことかが良く示されていることである。

溝畑茂が、本書のタイトルはデカルトの「方法序説」に由来している、と推測していたことは先に述べた。[2]には「方法序説」は“全体として透明水のごとき文章であり、けばけばしい修飾などは1つもなく、くりかえしもなく、淡々たる筆致で自己を語り、哲学を語っている”と記されている。著者岡村博は学問の根本をデカルトに深く学んでおり、本書のタイトルとスタイルはその当然の帰結と私には思える。

淡々と論が進められているが、その言葉遣いに細心の注意が払われていることは、1度読めば深く印象付けられることと思う。例えば、解の収束を考察するには、いわゆる ε - δ 論法が用いられるのは当然である。ここでの言葉の選び方にも私は心打たれる。俳句では、助詞の選び方1つ、語の順序が1つ入れ替わるだけで、その俳句が人の心を打ち、歌われた風景が拡がり、読者の想像を限りなくかきたてるように変わるといふ。句作では、助詞1つ、言葉の順序にも渾身の注意が払われるであろう。そのような言葉の選び方が本書でなされているのを私は見る感を受ける。

最近の学生の論理性の欠如を、私はしばしば嘆き、また同僚の嘆きも限りなく耳にした。しかし、本書を読むと、果たして私は“収束”なることが本当に分かっていたのか、が問われる思いがする。また、たとえ分かっているとしても、“収束”を、聞き手の心に無理なく確実に届けるだけの適切な表現力を備えていないことは、どうしても認めざるを得ないのである。

付録として収録されている山口昌哉の、著者についての文章も是非読んでもらいたく思う。敗戦の混乱のなかで、闇物資を口にする事なく、42歳で栄養失調の故に逝去した一生であったことが分かる。岡村博は言葉を大切に、学生と交わす些細な会話でさえもどこまでも大切にされた日常であったことが記されている。数学に携わる者が、言葉を大切にしないならば、どこに存在意義が見つけれられるのだろうか。最近私は、数学をする者の言葉遣いがふやけているのが気になっている。

参考文献

- [1] 溝畑茂, 旧刊再読 岡村博「微分方程式序説」, 数学セミナー, 1984年4月.
- [2] 野田又夫, デカルト, 岩波新書, 1966.