

辻雄さんの日本学士院学術奨励賞と日本学術振興会賞受賞によせて

斎藤 毅（東京大学大学院数理科学研究科）

辻雄さんが、 p 進ホッジ理論とその応用という業績に対して、第5回日本学士院学術奨励賞と第5回日本学術振興会賞を受賞されました。辻さんの受賞は、数論幾何の中核に位置する p 進ホッジ理論の基本定理を証明した業績が高く評価されたものです。専門の近い研究者としても、日ごろからセミナーなどで顔をあわせる職場の同僚としても、たいへんうれしいことです。

日本学術振興会賞は、これまでも数学通信で毎年受賞者の紹介記事がありますが、優れた研究を進めている若手研究者を顕彰する賞ということで、今回は人文系、理工系、生物系の各分野から、あわせて24名が受賞しました。日本学士院学術奨励賞は、さらにその受賞者の中から選ばれるもので、6名の受賞者がありました。数学関係では、第1回の望月新一さん以来ということになります。望月さんの受賞業績も p 進的手法による数論幾何の研究ということでしたので、これも何かの縁かもしれません。それでは、辻さんの業績などについて、簡単にご紹介します。

1994年のワイルスとテイラーによるフェルマー予想の解決以来、ガロワ表現の研究を中心とする整数論の発展にはめざましいものがあります。ここ数年で、2次元法 p 表現に対するセール予想が解決され、楕円曲線に対する佐藤・テイト予想のかなりの部分も証明されるまでになりました。はるかな夢とも思われていた類体論の非可換化が、現実のものとなりつつあります。こうした発展は、直接的には、ワイルスが導入したガロワ表現研究の画期的な新手法とその深化によるものです。そしてこれらを基礎で支えているのが、今回の辻さんの受賞の対象となった p 進ホッジ理論をはじめとする、20世紀後半に整備された幾何的なガロワ表現の理論です。

幾何的なガロワ表現の研究は、1950年代の谷山によるアーベル多様体の等分点が定めるガロワ表現の整合系の先駆的な研究にまでさかのぼることができます。志村による保型形式にともなうガロワ表現の構成や、セールによる楕円曲線の等分点が定めるガロワ表現の像の研究などを経て、整数論の中心的な研究課題としてその重要さが広く認識されるようになりました。1960年代のグロタンディエックによるエタール・コホモロジーの導入により、代数曲線やアーベル多様体だけでなく、一般の多様体に対してもガロワ表現が構成できるようになり、ドリーニュによるラマヌジャン予想の解決へもつながりました。

現代の整数論の基本的な方法として挙げられるのが、局所大域原理です。幾何的なガロワ表現は、たとえば有理数体上の代数多様体に対しそのエタール・コホモロジーが定める有理数体の絶対ガロワ群の表現という、大域的な対象です。その局所理論は、素数 p ごとの、 p 進体の絶対ガロワ群への制限の研究です。

エタール・コホモロジーとしてガロワ表現を構成するには、素数 l を一つ選び、 l 進体係数のコホモロジーを考えます。そのため、局所理論には、 $l \neq p$ と $l = p$ の2つがあります。このうち、 $l \neq p$ の方は、比較的手がつけやすく、エタール・コホモロジーの導入直後から研究が進みました。一方、 $l = p$ の方は難しく、発展が遅れました。これが、1980年ごろから、フォンテーヌを中心に研究が大きく進み、 p 進ホッジ理論という壮大な理論が構築されました。その頂点を飾るのが、最終的に辻さんの証明した、 C_{st} 予想とよばれた、基本定理です。

p 進体の絶対ガロワ群は p 巾部分が非常に大きく、そのために、その p 進表現はたいへん複雑なものになります。複雑なだけに、そこに含まれる数論的な情報は、とりだすのが難しいのですが、特に重要なものがあります。このことは、上述のセールの研究でもすでに有効に使わ

れました。ブロック・加藤予想のようなゼータ関数の特殊値の整数論的性質の研究や、はじめにふれたフェルマー予想などのガロワ表現が関係する大予想の証明でも本質的な役割を果たしています。

グロタンディエクは、よい還元をもつアーベル多様体の等分点から定まる p 進表現を研究し、 p 進表現をフィルター付きフロベニウス加群という対象と結びつけることの重要性を見抜きました。そして、 p 進表現に対しフィルター付きフロベニウス加群を対応させる圏の同値の構成を問題として提出し、これを神秘関手 (mysterious functor) と名付けました。 p 進表現は大変複雑なものですが、対応するフィルター付きフロベニウス加群は、簡単に記述できる線形代数的な対象です。そこで、この神秘関手が構成できれば、 p 進表現がずっとあつかいやすくなるのです。

グロタンディエクが予言した神秘関手は、1980年代はじめに、フォンテーヌが p 進周期環を定義して構成しました。ここで、 p 進ホッジ理論とよく比較されるホッジ理論を簡単に復習しましょう。 p 進ホッジ理論が p 進体上の代数多様体のコホモロジーの理論であるのに対し、本来のホッジ理論は複素多様体のコホモロジーの理論です。複素多様体の特異コホモロジーを \mathbb{C} まで係数拡大したものとドラム・コホモロジーの間に、標準同形があります。そして、ホッジ分解もなりたちます。ホッジ理論では、このように、係数を \mathbb{C} まで拡大すると、異なるコホモロジー理論を結びつけることができます。

p 進ホッジ理論では、はじめ1960年代にホッジ分解の類似として、テイトがホッジ・テイト分解を予想し、アーベル多様体については証明しました。そこでは、 \mathbb{C} のかわりとして、 p 進体の代数閉包の完備化 \mathbb{C}_p が考えられました。しかし、神秘関手を実現し、 p 進エタール・コホモロジーと、クリスタリン・コホモロジーやドラム・コホモロジーという全く起源のことなる理論を結び付けるには、もっと大きく複雑な環が必要でした。それが、フォンテーヌが定義した p 進周期環です。

p 進ホッジ理論では、いろいろな p 進周期環がでてきて、それを状況に応じて使い分けることになります。また、結びつけるコホモロジーの一方はいつも p 進エタール・コホモロジーですが、その相手となるコホモロジー理論も、状況に応じていろいろなものがでてきます。 p 進体上の代数多様体を考えるときには、その p を法とした還元が重要です。その還元に応じて、環やコホモロジー理論を使い分けることになります。感じとしては、 p 進体上の代数多様体は、原点を抜いた複素単位円板上の多様体の族で、 p を法とした還元は、その族を原点まで延ばしたときの原点でのファイバーと考えるとわかりやすいです。

p を法とした還元は何も仮定をおかないときには、 p 進周期環として B_{dR} を使い、相手のコホモロジーはドラム・コホモロジーです。 p を法とした還元がまた非特異な多様体になるときをよい還元といいます。このときは、 p 進周期環として B_{cris} を使い、相手のコホモロジーは還元クリスタリン・コホモロジーです。よい還元の場合は、一般の場合よりずっと精密な結果が得られます。

辻さんは、よい還元より少しだけ条件をゆるめた、準安定還元とよばれる場合に、フォンテーヌとヤンセンが定式化していた C_{st} 予想とよばれるものを証明しました。このようにいうと、特別な場合をやったのかと思われるかもしれませんが、そうではありません。デヨングが証明したオルタレイションという特異点解消の弱い形を使うことで、 p 進体上の任意の完備非特異多様体に関する p 進ホッジ理論の定理は、ホッジ・テイト分解なども含め、すべて C_{st} 予想から導くことができます。その意味で、辻さんの定理は p 進ホッジ理論の中心にある結果です。

C_{st} 予想では、 p 進周期環として、 B_{cris} より少し大きく B_{dR} より小さい B_{st} という環を使います。 p 進エタール・コホモロジーの相手をするコホモロジー理論は、クリスタリン・コホモロジーの対数幾何版である対数クリスタリン・コホモロジーです。この対数クリスタリン・コホモロジーについては、加藤さんと若くして亡くなられた兵頭さんの研究があり、 C_{st} 予想は、正確にはその結果を使って定式化されます。素数 p がコホモロジーの次数よりある程度大きいときには、加藤さんによる証明がありましたが、辻さんは、その仮定を取り除いて一般の場合に証明することに成功しました。

本来のホッジ理論の場合には、ポワンカレの補題によって、特異コホモロジーとドラム・コホモロジーを直接結びつけることができました。 p 進ホッジ理論では事情が全く異なり、 p 進エタール・コホモロジーと対数クリスタリン・コホモロジーを結びつける写像の構成が著しく困難で、それが定理の証明の核心部分です。ここは、フォンテーヌとメッシングによって導入され、加藤さん、兵頭さん、栗原さんによって精しく調べられたサントミック・コホモロジーというものを使うのですが、ここが精緻を極めるところで、私にはうまく説明することができません。辻さん本人による解説が「数学」の論説 (57 巻 (2005) 337-349 ページ) にありますので、ぜひそちらを読んでいただきたいと思います。また、辻さんが日本数学会賞春季賞を受賞されたときに加藤さんが書かれた紹介記事 (同 401-405 ページ) もあわせて読んでいただければと思います。

p 進ホッジ理論には、辻さんの仕事と前後して、ファルティングスの業績もあります。ファルティングスの論文は細部が十分に書かれていないこともあり、評価がわかれているようです。辻さんの論文によって p 進ホッジ理論に確実な基礎が築かれ、その後の発展によい影響を与えていることも特筆に値します。

p 進ホッジ理論は、よくホッジ理論と比較されます。両者は確かによく似ていますが、整数論への影響からいうと、 p 進ホッジ理論のほうがはるかに大きいものがあります。ホッジ理論は、周期積分を通してゼータの特殊値と密接に結びついています。しかし、 p 進ホッジ理論は、ガロワ群と直接つながるものなので、それだけ影響が大きいのです。

辻さんの業績は、グロタンディエクが夢みた神秘関手の理論を完成させるものといえます。辻さんの定理は、このように数論幾何のおおもとをおさえた定理なので、いろんなところで使われています。辻さんの業績の紹介のなかで、自分の話を始めるのは反則かもしれませんが、私も保型形式にともなうガロワ表現の局所大域整合性の証明で、辻さんの定理を使いました。これはのちに、はじめにもふれたセール予想の証明で使われたので、セール予想の証明も辻さんの定理の応用の一つということになります。また別の方向へ、辻さん自身も、超特異還元をもつ楕円曲線の岩澤理論への応用を与えています。このように、優れた業績というのはみなそうなのでしょうが、辻さんの定理は、数論幾何のなかでもひとときわ応用の広い定理の一つだと思います。

よくいわれることではありますが、日本の整数論には、高木貞治の類体論以来の優れた伝統があります。今回の受賞は、それが加藤さんから、兵頭さん、栗原さん、そして辻さんへと着実に受け継がれていることを示すものと思えます。辻さんの今回の受賞は、奨励賞ということですし、これからも、ますます素晴らしい業績を挙げていかれることと思います。また、若い人の中からそれをさらに超えていく人が、どんどんできて欲しいとも思います。