

幾何学模型アーカイブからの眺望¹

河野俊丈

東京大学大学院数理科学研究科

はじめに

ヨーロッパの大学などを訪れると、ガラスのショーケースに納められた、石膏の幾何学模型を見かけることがある。これらの多くは 19 世紀末から 20 世紀のはじめにかけて、ドイツで制作されたものである。実は東京大学大学院数理科学研究科でも、このドイツ製の幾何学模型のコレクションを所蔵している。これは、ゲッティンゲン大学にあるものなどに並んで、世界的に見ても最も完全なコレクションの一つである。模型は、代数幾何学、微分幾何学、複素関数論など多岐のジャンルにわたっていて、当時の先端的な数学を表現しているが、現代の視点からも興味深いものが多い。

一方、模型は 20 世紀の前衛芸術運動に影響を与えるなど、数学の枠を超えてさまざまな分野と関わってきた。ここでは、幾何学模型と芸術との関連についても触れたい。また、現代の技術による模型の制作の試みについても述べる。

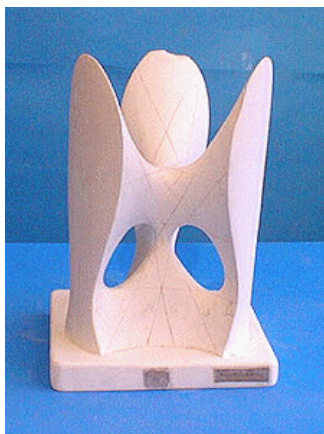
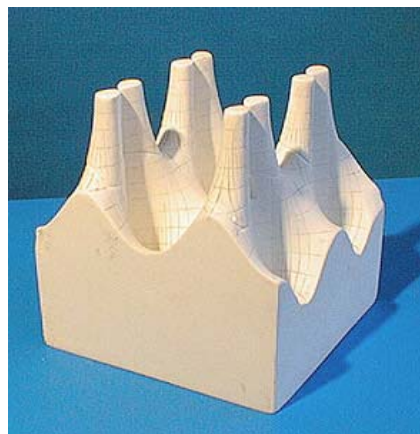


図 1 (1) Clebsch 曲面



(2) Kuen 曲面



(3) 楕円関数のグラフ

¹ 2009 年 3 月 27 日に日本数学会年会で行われた市民講演会に基づく。

1. 幾何学模型の歴史

ドイツで石膏による幾何学模型がさかんに制作されたのは、1880 年頃から 20 世紀初頭までである。1873 年のベルリン科学アカデミーの月報に、E. Kummer が彼自身の制作によるローマン曲面の模型を用いて議論したことが記載されている。ローマン曲面は実射影平面のモデルである。その後、F. Klein, A. Brill から当時の一線の数学者が中心となって、石膏模型制作のプロジェクトが展開し、これは Martin Schilling 社で 1932 年まで継続された。模型はいわゆる概念モデルではなく、厳密な数値計算に基づく精緻なものである。これらは、粘土でモデルを作ってから、石膏の型を作成する石膏取りという方法で制作されているが、当時の技術でどのようにして、このような正確な模型を作り得たのか、具体的な手法については知られていない。模型のカタログとして、Martin Schilling 社による[4]があり、それぞれの模型の制作監修者と数学的な解説が掲載されている。模型の制作が 1932 年で終了したことはある意味で象徴的である。これは、もちろんドイツの当時の政治状況も影響しているに違いないが、例えば B. L. van der Waerden による代数学の教科書が、1930 年頃に出版されていることからもうかがえるように、この時期をさかいにして、数学の流れは抽象的な枠組みを構築する方向に発展していくのである。

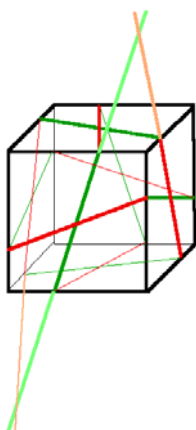
東京大学では、1910 年代頃に中川銓吉教授が理学部数学教室に輸入したようである。現在でも当時の輸送に用いられたと思われる大きな木製のケースが残っていて、Martin Schilling 社のカタログと比較してみると、ほぼフルセットで購入したことがうかがえる。現存する模型は 200 点ほどにのぼる。本郷の理学部 5 号館に数学教室があったころは、模型は教室の隅で埃をかぶっている状態であったが、駒場の数理科学研究科棟に移転した現在は、模型が研究科の資料室に展示されている。1997 年 10 月から 12 月には、東京大学創立 120 周年特別展「学問のアルケオロジー」に模型が出品され、本郷の安田講堂で展示されて多くの人の注目を集めた。ドイツでも、Vieweg 社で模型の一部が復刻され、また解説書[1]が出版されるなどして、模型に対する再評価の動きが高まっている。ここでは、ジャンル別に代表的ないくつかの模型の写真をお見せして、その数学的な背景について説明する。模型のより多くの写真とその解説はウェブサイト[7]に、日本数学会年会の市民講演会で用いた資料は[8]にあるのであわせてご参照頂ければ幸いである。

2. 代数曲面のモデル

$P(x, y, z)$ を多項式として、空間内で $P(x, y, z) = 0$ を満たす点全体の集合を代数曲面とよぶ。2 次の多項式で定義される 2 次曲面は大学の初年級で学ぶように、楕円面、双曲面、放物面などと分類される。最初のページの図 1(1) は Clebsch 曲面とよばれる 3 次曲面の模型であり、4 次元実射影空間の斉次座標を用いて

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 &= 0 \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) &\in \mathbf{R}P^4 \end{aligned}$$

で定義される。これは 3 つの穴のあいた種数 3 の曲面である。この曲面の特徴は、ちょうど 27 本の直線が曲面上にのっていることである。写真ではやや見づらいが、模型の上には実際に次のような 27 本の直線が描かれている。



互いに捩れの位置にある 6 本の直線 2 組

$$1, 2, 3, 4, 5, 6; 1', 2', 3', 4', 5', 6'$$

$i, i', j, j', i \neq j$ と交わる直線 15 本

$$ij, \quad 1 \leq i, j \leq 6$$

この直線の配置は、L. Schläfli らによって詳しく研究されていて、現代の言葉では E_6 型ワイル群とよばれる美しい対称性をもつ。直線の配置とその対称性については、文献[1], [2], [3]などをご覧いただきたい。代数曲面上の有理曲線の数え上げは弦理論、ミラー対称性などと関連して、現代の数学でも重要なテーマである。

図 2 に示したのは、上の 3 次曲面が退化して得られる、特異点をもつ 3 次曲面の例である。特異点の現れ方は E_6 型の拡大ディンキン図形の部分グラフを用いて記述されることが知られている。このように特異点とルート系などに関わる先端的な研究が、19 世紀末から 20 世紀はじめに行われ、その成果が模型と

して表現されていたことは注目に値する。

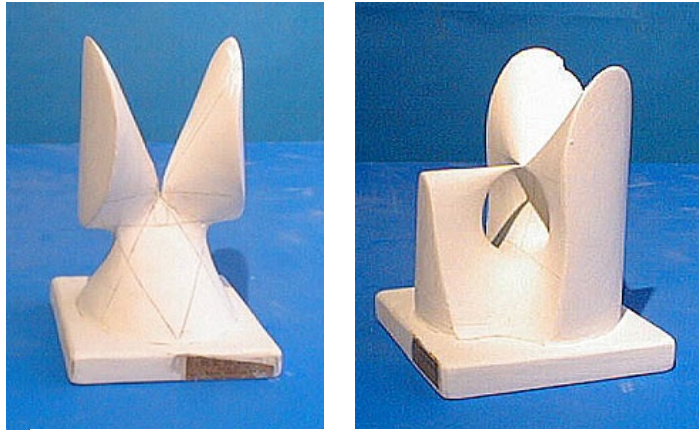
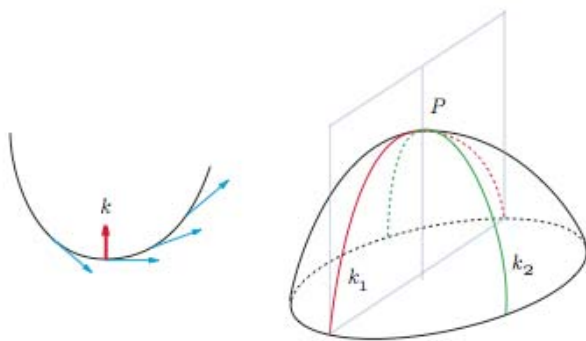


図 2 特異点をもつ 3 次曲面

3. 定曲率曲面など微分幾何学のモデル

微分幾何学に関連したモデルは多彩である。まず，空間内の曲面の曲率について復習しておこう。図 3 左に示したように，平面内の曲線の曲率は曲線上を速さ 1 で動く点の加速度ベクトルの大きさとして定義される。図 3 のように空間内の曲面上の点 P について， P を通る法線方向の直線を含む平面をとり直線の周りに回転させる。このとき，切り口として現れる曲線の曲率を符号付きで考えて，その最大値と最小値を主曲率とよぶ。主曲率を用いて，Gauss 曲率と平均曲率が図 3 右下の式で定義される。



k_1, k_2 主曲率
Gauss 曲率 $K = k_1 k_2$
平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

図 3 Gauss 曲率と平均曲率

図 4 は擬球とよばれる曲面のモデルで， Gauss 曲率が負の一定値をとるような曲面の典型的な例である．これは，図 4(2)に示したトラクトリクスの回転面として表される．トラクトリクスとは，図のように x 軸に接して，それぞれの接線の接点と y 切片との距離が一定になるような曲線である．



$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos u}{\cosh v} \\ y &= \frac{\sin u}{\cosh v} \\ z &= v - \tanh v \\ (0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < \infty) \end{aligned}$$

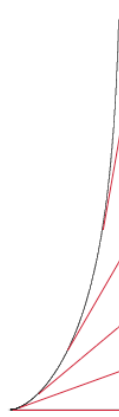
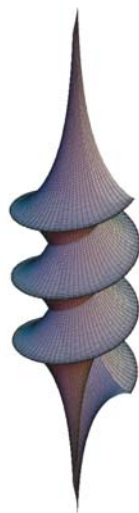


図 4 (1) 擬球とそのパラメータ表示

(2) トラクトリクス



$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos u}{\cosh v} \\ y &= \frac{\sin u}{\cosh v} \\ z &= v - \tanh v + au \\ (0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty) \end{aligned}$$

図 5 Dini 曲面

図 5 に示した Dini 曲面は，トラクトリクスを螺旋にそって回転させることによって得られ，これも Gauss 曲率が負の一定値をとる曲面の例である．ここでは Mathematica によって作成した図をあわせて示した 最初のページの図 1(2) Kuen 曲面も Gauss 曲率が負の一定値をとる曲面である．



図 6 に示した曲面はオンジュロイドとよばれ ,平均曲率が正の一定の値をとる .この曲面の各点に単位法線ベクトルの終点を対応させることによって得られる ,球面への Gauss 写像が調和写像になることが知られている .オンジュロイドは図 7 に示した直線上を転がる楕円の焦点の軌跡として得られる曲線の回転面として表される .

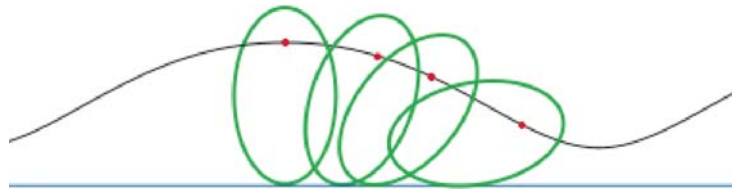


図 6 オンジュロイド

図 7 直線上を転がる楕円

図 7 は極小曲面の例である .これは面積を極小にする ,いわゆる石けん膜のなす曲面で ,平均曲率がいたるところ 0 であるという性質をもつ .

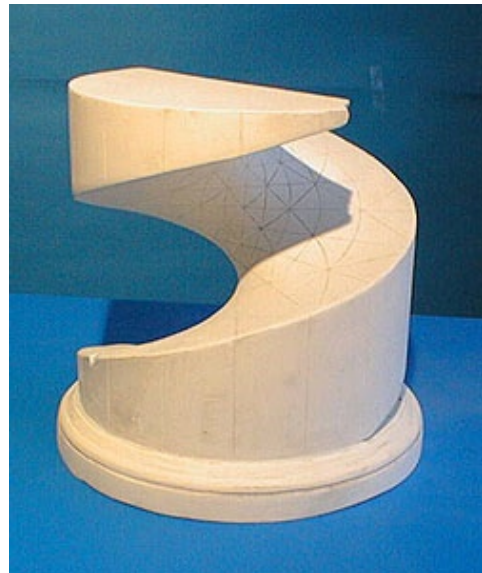


図 8 極小曲面

図 9 に示したのは Dupin サイクリッド曲面である．この曲面はトーラスにメビウス変換を施すことによって得られる．各点で主曲率方向を表す曲率曲線がすべて円になる．

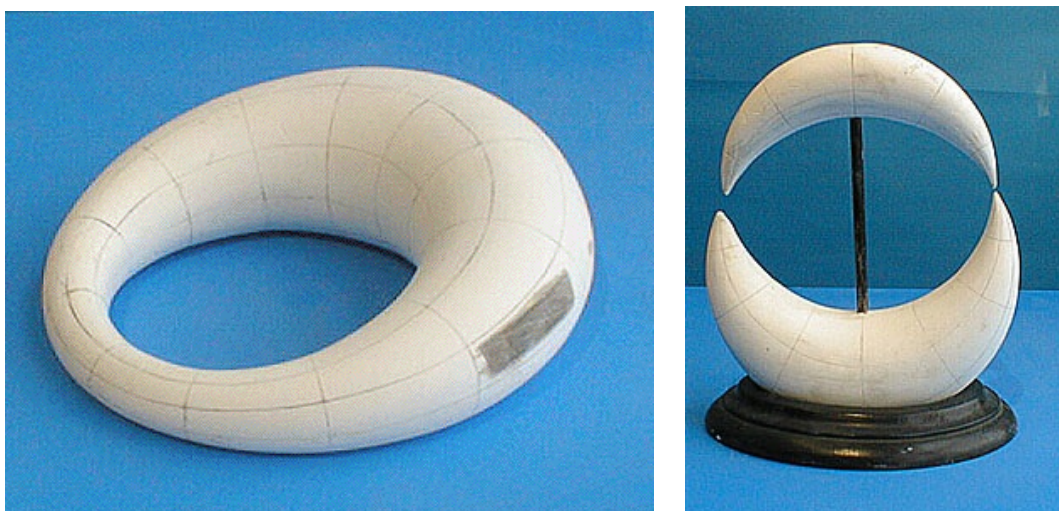
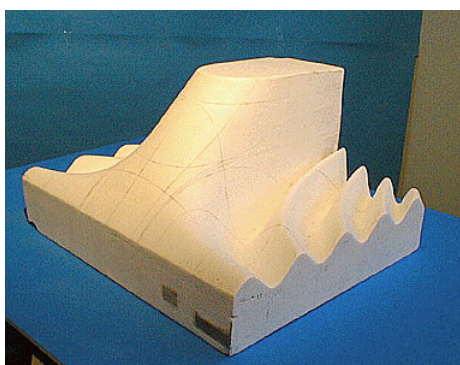


図 9 Dupin サイクリッド曲面

4. 複素関数論のモデルなど

その他の模型のジャンルとしては，複素関数のグラフなどがある．最初のページの図 1(3)に示したのは，Weierstrass ペエ関数の実数部分のグラフである．2位の極が格子点上に分布している．また，図 10 は Jacobi の楕円積分を表す．



ヤコビの楕円積分

$$u = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

図 10 Jacobi の楕円積分のグラフ

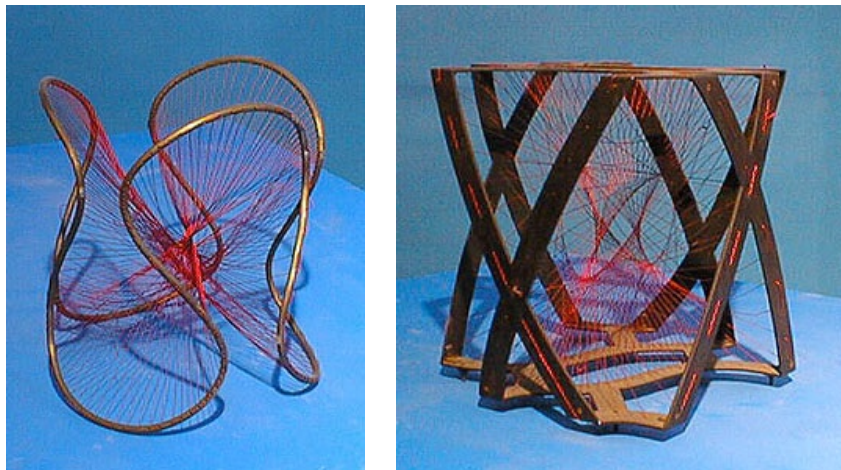


図 11 線織面のモデル

5. 正多面体の針金模型

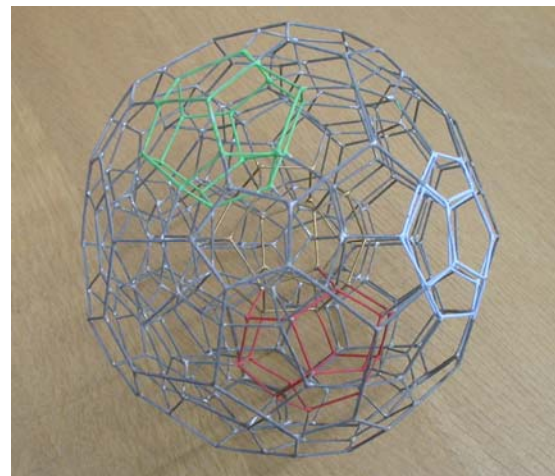
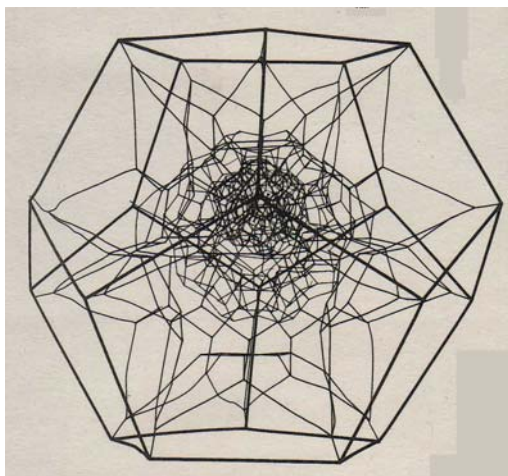


図 12 (1) 東大数理所蔵の正 120 胞体の模型 (2)乙部融朗氏の制作による正 120 胞体

ドイツ製の幾何学模型には石膏模型以外にもいくつかの種類がある．図 11 に示した線織面のモデルはそのひとつであり糸を張ることによって曲面が表現されている．その他，針金による正多面体の模型などもある．図 12(1)は東大数理が所蔵する正 120 胞体の針金模型である．これは 4 次元空間の正多面体を一点から照射された光線によって 3 次元空間に射影したもので，空間が 120 個の正 12 面体の部屋に分割されている．これは，3 次元球面の 120 個のセルによる胞体

分割と考えることもできる．この模型は Martin Schilling 社のカタログ[4]には見当たらず，おそらく，日本で制作されたものではないかと考えられている．しかし，制作者，制作年代とも不明である．残念なことに，この模型にはかなり破損している部分がある．正 120 胞体の針金模型を東京大学創立 120 周年特別展に展示した際に，模型の修理を申し出て下さった方がいた．それが乙部融朗氏である．乙部さんは，円通寺の住職をされていた方であるが，ご自身で 4 次元の多面体の針金模型を多数制作されているとのことであった．結局，修理については叶わなかったが，乙部さんには制作された模型の多くを東大数理に寄贈していただいた．図 12(2)がその一つで，正 120 胞体を別の射影の仕方では表現したものである．

ここで，4 次元空間の正多面体の分類についてふれておこう．正多面体を表すのに，Schläfli 記号が用いられる．まず，3 以上の整数 n に対して，記号 $\{n\}$ で正 n 角形を表す．また，それぞれの頂点のまわりに正多角形 $\{p\}$ が q 個集まってできる 3 次元空間の正多面体を記号 $\{p, q\}$ で表す．5 種類の正多面体（プラトン体）の Schläfli 記号は以下ようになる．

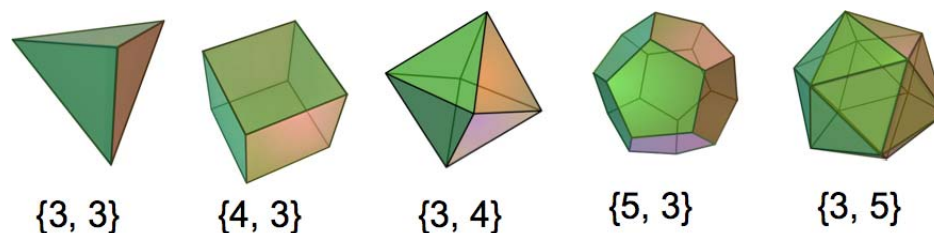


図 13 正多面体とその Schläfli 記号

4 次元空間の正多面体は，3 次元球面の正多面体による正則分割（正多胞体）とも考えられ，これは立体射影によって 3 次元空間の領域への分割としてみることができる．この分割における頂点，辺，面，領域（胞体）を，それぞれ 0-セル，1-セル，2-セル，3-セルとよぶことにする．一般に 4 次元空間の正多胞体は Schläfli 記号 $\{p, q, r\}$ で表される．これは，正多面体 $\{p, q\}$ が，各辺のまわりに r 個集まっていて，各頂点のまわりの 2 次元球面による切り口の分割のタイプが $\{q, r\}$ であることを意味する．

19 世紀半ばに Schläfli によって，4 次元空間の正多胞体は次の表に示す 6 種類であることが示された．上の 3 つは正 4 面体，立方体，正 8 面体の 4 次元化

であり，この系列は任意の次元で存在する．5次元以上では，これらの3通りの系列のみが存在することが，Schläfliによって示されている．

| | シュレフリー記号 | 3-セル | 頂点数 |
|--------|-----------|-------|-----|
| 正5胞体 | {3, 3, 3} | 正4面体 | 5 |
| 正8胞体 | {4, 3, 3} | 立方体 | 16 |
| 正16胞体 | {3, 3, 4} | 正4面体 | 8 |
| 正24胞体 | {3, 4, 3} | 正8面体 | 24 |
| 正120胞体 | {5, 3, 3} | 正12面体 | 600 |
| 正600胞体 | {3, 3, 5} | 正4面体 | 120 |

ここで，数学者 L.Schläfli (1814 – 1895) について少しふれておこう．彼はスイスの Grasswyl で生まれ主に Berne 大学 (Hochschule) で大半の研究生活を送った．すでに述べた3次曲面上の27本の直線の配置の研究でも知られているが，1850年から52年に執筆された200ページを超える論文 *Theorie der vielfachen Kontinuität* では，高次元の正多胞体の分類，現在 Schläfli の等式とよばれている球面単体の体積の公式など，非常に先駆的な仕事が行なわれている．この論文は Schläfli の生前には出版されず，英語とフランスの短い要約のみが出版された．これは同時代の研究者の関心をほとんど引かなかったようである．B. Riemann による *Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* の出版が1854年であったことを考えると，Schläfli は Riemann に先立って高次元の図形の幾何学を意識していた研究者であり，その先端性がうかがわれる．

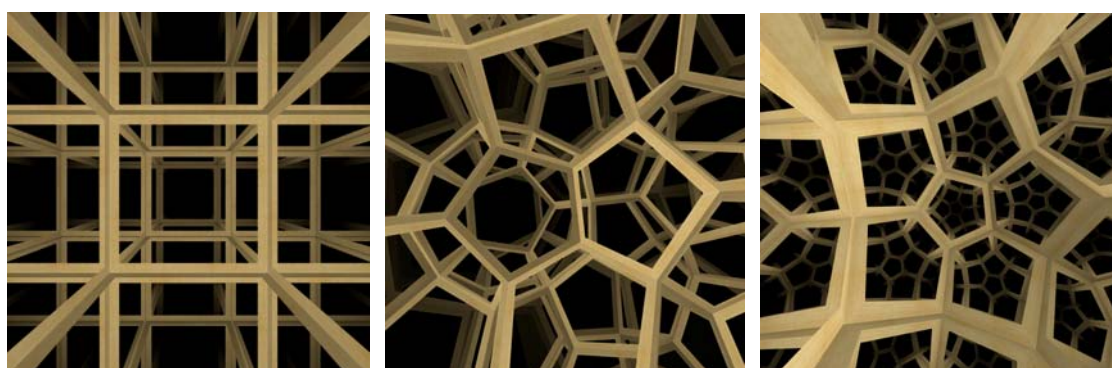


図 14 3次元空間のユークリッド，球面および双曲幾何構造

図 14 は 3 次元ユークリッド空間，3 次元球面および 3 次元双曲空間の正則分割を示している，それぞれ，Schläfli 記号では， $\{4,3,4\}$ ， $\{5,3,3\}$ ， $\{5,3,4\}$ で表される．この 3 次元球面の分割は正 120 胞体に対応する．これらの図は J. Weeks によるソフトウェア[5]によって作成した．またビデオ Dimensions [6]には 4 次元の正多胞体の見事な画像がある．

6. 幾何学模型と芸術

冒頭でも述べたように，幾何学模型は 20 世紀前半のさまざまな前衛芸術運動に影響を与えた．その主な 2 つの潮流が超現実主義 (surrealism) と構成主義 (constructivism) である．パリのポアンカレ研究所に展示されていた幾何学模型に超現実主義を代表する画家 Max Ernst が注目し，これが契機になって，Man Ray がこれらの幾何学模型を撮影し，1936 年に，芸術誌 Cahiers d'Art に発表した．また，Man Ray 自身，幾何学模型をモチーフにした一連の絵画作品を制作している．Man Ray は，映画 A Life in the Day of Man Ray で幾何学模型の印象を次のように述べている．

“...I went to see them [the models], although I am not particularly interested in mathematics. I didn't understand a thing, but the shapes were so unusual, as revolutionary as anything that is being done today in painting or in sculpture.”²

構成主義はロシアを起源とする 20 世紀初頭の芸術運動で，後の Bauhaus などに見られるデザインや建築にも影響を与える．構成主義の作家である Naum Gabo, Antoine Pevsner らが幾何学模型からインスピレーションを得た作品を多く発表している．また，構成主義と関連して，幾何学模型の影響を受けたイギリスの彫刻家として，Barbara Hepworth, Henry Moore らがいる．Henry Moore は London の科学博物館で線織面の模型を見て，自らの作品に糸を張ってできる曲面を取り入れている．我々が目にする 20 世紀の抽象芸術の源流には，アフリカの原始美術などさまざまな要素があったと考えられるが，数学の幾何学模型もその要素の一つであったということが出来る．

幾何学模型と芸術との関わりは現在でも続いている．東大数理の資料室に展

² Reinders, M. (Director). (1993). Man Ray: A Life in the Day of Man Ray (Montparnasse Revisited, Vol. 4)

示された模型の見学には、数学に直接興味がある方のみならず、芸術家、建築家などさまざまな分野の方が訪れている。2005年に写真家の杉本博司氏が東大数理を訪れ、資料室に展示されている幾何学模型の撮影を行った。その作品は森美術館における展覧会「杉本博司 時間の終わり」で展示された。その際にヤマダ精機の協力を得て、現代の技術で制作したアルミニウム製の曲面の模型もあわせて展示した。この展覧会はその後、パリのポンピドーセンターなどを巡回した。

7. 現代の技術による模型の制作



図 14 (1) アルミ製の Clebsch 曲面 (2) Dini 曲面の制作 (協力：ヤマダ精機)

前節でもふれたように、我々は現代の技術で幾何学模型の制作を行うことも試みているので、その経緯について説明しよう。東大数理所蔵の幾何学模型の写真とその解説をウェブサイト[7]に掲載したところ、2000年頃、ヤマダ精機の山田恭弘さんから連絡があった。ウェブサイトに載っている曲面を自分たちの技術で制作出来るかどうか是非試してみたいので、曲面のデータをいただけないかということであった。早速、山田さんを研究室にお招きして、どのような形のデータが必要になるのか、お話をうかがった。曲面の数式から工学で用いられるようなファイル形式に変換することには、いくつかの困難があった。客員講座の荒木義明氏の協力も得て、比較的簡単な曲面について、樹脂による模型を制作することに成功した。

2005年には杉本博司さんからのお話があり，アルミニウムを素材とする本格的な模型を制作してみようということになった．ヤマダ精機で数十時間，機械をまわし続けて，精度を 1/100 ミリ以下にまで高めた Dini 曲面とオンジュロイドの模型を制作した．これらの模型は高さ 3 メートルほどの大きなもので，前述の森美術館における展覧会で展示された．図 14(2)が Dini 曲面の制作の様子を表す画像である．その後，技術的にはさらに難しい図 14(1)の Clebsch 曲面の制作を行った．これは，27 本の直線を書き込むとことまでには至っておらず，試作品の段階である．

このような技術を今後，数学の研究支援，教育に活用していきたいと考えている．

参考文献

- [1] G. Fischer, Mathematical Models, Vieweg, 1986.
- [2] ヒルベルト，コーン・フォッセン，直観幾何学，みすず書房．
- [3] 松澤淳一，特異点とルート系，朝倉書店 2002 年．
- [4] Catalog mathematischer Modelle, Martin Schilling, 1903.
- [5] J.R. Weeks, <http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/>
- [6] <http://www.dimensions-math.org>
- [7] <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/models/models.html>
- [8] <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/msj2009.pdf>