

書 評

数理ファイナンスの基礎 —マリアバン解析と漸近展開の応用 国友 直人・高橋 明彦 著 東洋経済新報社

大阪大学 金融・保険教育研究センター 深澤 正彰

“数理ファイナンスの基礎—マリアバン解析と漸近展開の応用”なるタイトルを見て、我々はなるほどこの本は“数理ファイナンスの基礎”なる非専門家向けの解説と、“マリアバン解析と漸近展開の応用”なる専門家向けの解説の二本立てなのか、と理解するべきである。決して“マリアバン解析と漸近展開の応用”として数理ファイナンスを基礎付けるとか、そういうストーリーではないし、“マリアバン解析と漸近展開の応用”が数理ファイナンスの基礎的な部分の一つという訳でもないので安心してよい。二本立ての内、前者が全体のほぼ3分の2を占めて、残りが後者に充てられている。後者は金融実務に直結するテクニックを扱っているという意味でむしろ金融工学的だが、それほど基礎的な事項ではなく、専門家にとって興味深い内容である。したがって幅広い読者層に対して有意義な情報を提供していると言えよう。

さて数理ファイナンスである。お金に興味がある訳だが、お金を物と思えば、金融工学と数理ファイナンスの関係は工学と数理物理学の關係に似ている。金融工学は金融というサービス業のための技術である。その基礎理論としてスタートした数理ファイナンスは、現在では確率過程論と融合し、非常に実際的な研究分野の一つとして、非常には実際的でない数学の中で異色な存在である。それゆえ数学者個人として数理ファイナンスに対する何らかの見解を持っておきたいという向きもあるだろう。そのような向きには、とくに金融工学より理論的な部分に興味がある場合、この本は日本語で読める解説書として参考になるだろう。著者は経済学者であるから、証明等では数学者にとって読み辛い(数学者以外にとっては恐らく読みやすい)部分もあるが、それを差し引いても、数理ファイナンスの日本語ダイジェストとして貴重な文献である。

二本立ての二本目について。これは著者の両氏が近年研究している確率微分方程式モデルの小分散漸近展開の方法を解説したものである。これは株価など資産価格の変動を記述する確率積分方程式の確率的な部分(ブラウン運動に関する確率積分の部分)を摂動項とみなして、非確率的な微分方程式の解の周りで摂動展開する方法である。解析解が陽に求められない期待値(確率測度に関する積分値)は、統一的なアプロー

チとして、この摂動展開によって近似できるのだというメッセージである。ファイナンスの問題では一般に微分可能でない関数を非積分関数としてとるので、この摂動展開はただテイラー展開すればよいという訳にはいかず、関数の滑らかさの代わりに、分布の滑らかさを保証することで漸近展開の正当性を証明することになる。ここでマリアバン解析が登場する。マリアバン解析はもともと確率微分方程式の解の分布の滑らかさ(偏微分方程式の解の滑らかさ)を証明するために導入されたもので、このプログラムを実現したのが楠岡-Strook の定理であった。今の問題である摂動展開のためには、マリアバン共分散の非退化性の仮定の下、確率展開を分布の漸近展開に持ち上げる渡辺理論と、それを拡張する吉田の定理が必要となる。この辺りの事情がいくつかの定理とともに解説されている。この後半部分は数理ファイナンスの専門家が楽しめる部分であろう。

第一章は 30 ページ弱であるが、これだけで数理ファイナンスの基本単語と問題設定の理屈がわかる。デリバティブと言ったら微分ではなく派生商品のことだが、“派生”した商品の価格は派生元の資産価格と整合的でなければならない(そうしないと誰かが損をする)。ラフに言って整合的であるための必要十分条件は、その価格がある確率測度に関する期待収益として書けることで、この「数理ファイナンスの第一基本定理」は、最も単純な設定では、 \mathbb{R}^n の凸集合の分離定理から導かれる。数理ファイナンスではデリバティブのヘッジというのが重要なキーワードであって、デリバティブがヘッジ出来るとは、そのデリバティブの収益を派生元の資産の運用によって複製出来ることを言う。デリバティブを売るとは、原理原則的には、その収益を実現するために派生元の資産を運用する代行サービスに他ならない。先に金融工学は金融というサービス業のための技術であると述べたのはこのことである。デリバティブの価格が期待収益として書けるからといって、それは保険数学において保険料が期待収益として計算されることとはまったく関係ない。保険では大数の法則が根拠であり、金融工学においてはヘッジのための初期費用が根拠である。これを混同して、とある金融商品をヘッジなしで売りまくったアメリカンな保険会社は有名である。第二章も 30 ページ弱であるが、ここで Black-Scholes モデルが解説される。これは資産価格が幾何ブラウン運動するモデルで、そのときコールオプションなどデリバティブの価格は、正規分布に関する積分として陽に導かれる。一方でこの章では、なぜ Black-Scholes モデルだけでは不十分なのかも解説される。この最初の二章で第 I 部を構成する。

第三章ではより一般的な確率微分方程式によるモデルが記述され、数理ファイナン

スの第一基本定理と Girsanov-丸山の定理との関係が明らかになる。第四章では完備性や、ヘッジの問題 (Clark の公式)、金利変動のモデルが記述される。第五章では資産運用の最適化の話題が紹介される。この三つの章が第 II 部だが、ここでは種々の定理を解説を交えつつ紹介し、証明は参考文献を参照させる形式が採られている。

第六章以降が先に述べた二本立ての二本目の部分で、まず摂動モデルを導入して漸近展開の一般的な計算法を説明した後、第七章でバスケットオプション、平均オプション理論価格の漸近展開公式を与え、数値実験結果も併せて報告している。第八章では金利過程の漸近展開を扱い、第九章ではこれら漸近展開の数学的な裏付けをリアバン解析を導入して解説している。この四つの章が第 III 部である。

第十章ではアメリカン・プットオプションの理論価格をプットオプション理論価格と早期行使プレミアムに分解する公式が与えられ、さらに第 III 部で説明された漸近展開法を価格計算に応用している。第十一章では最適投資問題において、Ocone-Karatzas による最適ポートフォリオの表現を利用して、漸近展開により近似的最適ポートフォリオ戦略を陽に構成している。第十二章では漸近展開公式をモンテカルロ積分における制御変量として利用し、分散を現象させるテクニックについて解説されている。第十三章で今後の展望を与え第 IV 部が閉じられる。

以上、順を追って内容の概略を述べた。数理ファイナンスにおいて市場が完備であるとは、任意のデリバティブを原資産運用によって複製出来ることを言う。この本は、市場が完備となるようなモデルの枠内で、多くの基本的な事項を解説すると共に、漸近展開による実際的な方法を与えていることになる。一方で一つだけ注意しておきたいのは数理ファイナンスは完備市場における解析に限定されている訳ではないということである。例えば株価の不連続性を許容するなら市場は非完備となる。高頻度データ解析の示すところは、資産価格の変動率 (ボラティリティ) そのものが固有の確率変動を持つことだが、そのような確率ボラティリティモデルでも市場は非完備となる。そもそも数理ファイナンスの第二基本定理は市場の完備性を特徴付けるものであり、ある意味で市場がなかなか完備になりにくいことを示している。このような少し大局的な視点がこの本では提供されていないのであるが、例えば経済系の学生にも理解出来るよう書かれたのであろう本としては、むしろこの内容配分で既に最適ポートフォリオかもしれない。

著者のホームページに訂正表が掲載されているので適宜参照されるとよい。この本は 2004 年第 47 回日経・経済図書文化賞を受賞している。