書　評
「フーリエ解析入門」(プリンストン解析学講義 I)

エリアス・M・スタイン, ラミ・シャカルチ 共著
新井 仁之・杉本 充・高木 啓行・千原 浩之 訳
日本評論社, 2007 年, 312 頁

松山 登喜夫 (東海大学 理学部)
望月 清 (東京都立大学 名誉教授)

本書は「Princeton Lectures in Analysis」の全 4 巻の中の第 1 巻「Fourier Analysis: An Introduction」の訳書である．第 2 巻は「Complex Analysis」, 第 3 巻は「Real Analysis: Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces」, 第 4 巻は「Functional Analysis: An Introduction to Further Topics in Analysis」からなっており, すでに第 2 巻は同一の訳者らにより翻訳され出版されている．本シリーズの目的は, 解析学の中核となる部分を有機的にまとめあげ, その考え方が数理科学に幅広い応用をもつことを示唆することにある．たとえばフーリエ解析の応用として, 医療において重要な X 線変換やディリクレによる算術級数の素数定理などが記述されていることに注目したい．スタイン教授は周知のように調和解析における世界的な権威であり, シャカルチ博士はスタイン教授の新進気鋭なお弟子さんである．訳者まえがきにもあるように, この 2 人の合作である本シリーズはたいへんな意欲作である．その記述は教育的にも行届いた配慮がなされ, 対象とする大学 3 年から 4 年の読者を勇気づけるものになっている．評者らは本書を学部 4 年のセミナーで何度か使用しているので, そのときの感想を述べることにしたい．

スタイン教授は多くの優れた学術論文を発表するとともに, 引用度数の非常に高い調和解析の専門書も多く出版している．たとえば「Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces」,「Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions」,「Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals」(何れも Princeton Univ. Press) などである．本書の訳者らはスタイン教授などの論文や書物に精通している調和解析や実解析の第一人者で, 彼らによる日本語訳は本書の意図と内容を日本の読者に理解させるのに最適であろう．

フーリエはダランベールのアイディアをより進化させ熱伝導方程式の三角級数解を構成する方法を考案した．フーリエ級数の起源はここにある．しかしフーリエ級数の収束の問題はかなり後に意識され, 各点収束についてはディリクレ, フェイエールなどの有名な核表示により収束の問題が考えられるようになった．1876 年, デュ ボアア-レイモンはフーリエ級数が一点で発散する周期的連続関数を構成し (この話題は第 3 章に記述されている), 1926 年にフーリエ級数がいたるところ発散する周期的可積分関数がコルモゴロフにより発見された．そこで p 乗可積分関数 $(1 < p < \infty)$ のフーリエ級数の概収束の問題がルージンにより提唱され, コルモゴロフ以来 40 年を経た 1966 年にカールソンとフントらは高度な技術を駆使することにより解決した．その後フェファーマンが彼らの別証明を与えた．現在でも別証明の追求がなされているようである．

本書は全 4 巻の第 1 巻としてフーリエ解析の入門書に位置づけられているため, 高度な技術を要する話題には触れてはいない. しかし, 収束の問題がいかに難しいかは第 3 章を読めば納得できる. また学習初期の段階にある学生を念頭に置いているため, 測度論やルベーグ積分を使わずにあくまでも古典的なフーリエ解析をわかりやすく説明している. なお, 測度論, ルベーグ積分, ヒルベルト空間の基礎については本シリーズの第 3 巻を参照されたい. 最小の予備知識としては, 極限, 級数, 可積分関数, リーマン積分などの解析学の初等的事項及び線形代数であるので, 大学の学部 2 年レベルの知識があれば十分に読了できるように記述されている. 以下本書を紹介する.

本書の構成は次のようになっている : 第 1 章 : フーリエ級数の起源, 第 2 章 : フーリエ級数の基本性質, 第 3 章 : フーリエ級数の収束, 第 4 章 : フーリエ級数のいくつかの応用, 第 5 章 : $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換, 第 6 章 : $\mathbb{R}^d$ 上のフーリエ変換, 第 7 章 : 有限フーリエ解析, 第 8 章 : ディリクレの定理, 付録 : 積分. また各章の冒頭に著名な数学者の興味深いエッセーの抄文が載せてあり, これらを読むとフーリエ解析の歴史や先達の苦闘も垣間見ることができる. 本文のいくつかの項目で数論や幾何の問題も取り上げているところは, 本書の特徴のもう一つの側面で, フーリエ解析が代数や幾何といかに関わっているかを興味深い問題を通して解説している. 本シリーズの内容はどれも標準的ではあるが, ところどころで目新しいトピックが取り上げており, 大学院生などにはよい刺激になるのではないだろうか. 本書には「練習」と「問題」が多くある. 「練習」では本文を補足するものが多くあり, 本文を深く理解するためにも解く努力が必要である. 中には初学者には難しいものもあるかもしれないが, 関連する適当な書物に頼れば大体解けるものばかりである.「問題」には手ごわい問題が多い. すべてを解こうとするより飛ばしても差し支えないであろう.

各章について概観する. 第 1 章では波動方程式と熱方程式を導出し初期値のフーリエ級数展開から解の三角級数表示を得るという筋で議論が展開されている. 本章の内容は大概のフーリエ級数の教科書に書かれてはいるが, 進行波としてとらえるダランベールの方法と定常波の重ね合わせとしてとらえるフーリエの方法を, 収束の問題を抜きにしてうまくつないでいる. ところどころにフーリエ級数の歴史をまじえた記述を紹介し読者に問題の起源を示し, 好奇心をくすぐっている. たとえばフーリエがダランベールやオイラーの方法に疑問を抱きフーリエの方法が当時の意識を一変させたことなどである. 第 2 章ではフーリエ級数の一意性, 部分和の収束, 畳み込み, 良い核の定義, フーリエ級数のチェザーロ総和法とアーベル総和法について解説している. 本章の特徴は, 良い核を導入しているところである. フーリエ級数の部分和を考える場合自然にディルクレ核が現れるがそれは良い核の範疇からはずれ, フーリエ級数の部分和の収束は微妙な問題をはらんでいることを解説している. 良い核のもっとも典型的な例はポアッソン核である. この核は, 本書では扱われてはいないがハーディー・リトルウッドの最大関数やハーディー空間などの概念には必須であるがゆえに, この段階で著者らは本章で導入したものと考えられる. チェザーロ総和法を用いることによりフーリエ級数のフェイエール核表示をし, ディリクレ核の意味づけを行っている. ちなみにディリクレは数論に関心を持っていたが, フーリエに彼の人柄を買われフーリエ級数の手ほどきを受け, ディリクレ核を発見したそうである. 第 3 章では多くの教科書にあるフーリエ級数の平均二乗収束・各点収束の問題を取り上げている. 本章の最後でフーリエ級数が発散する連続関数の例を与えている. 第 4 章ではフーリエ級数の応用として, 等周問題・ワイルの一様分布定理・連続ではあるがいたるところ微分不可能な関数・円周上の熱方程式を解説している. 評者らが注目したのは無理数 γ の

非整数部分の列 $\{\langle n\gamma\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ ($\langle x\rangle$ は x の小数部分) は区間 $[0,1)$ において一様に分布しているという数論の問題を取り上げているところである. この結果を用いることにより正方形の中の光線の反射が稠密に分布している様子を考察している. 第 5 章では一次元ユークリッド空間上のフーリエ変換, 偏微分方程式への応用, ポアソンの和公式を解説している. 初めにフーリエ変換とシュワルツ空間 $\mathcal{S}$ の定義を与え, $\mathcal{S}$ 上のフーリエ変換・フーリエ逆変換を解説し, 一次元熱方程式のコーシー問題の解を熱核表示することにより, 熱方程式の解の性質を論じている. また上半平面でのラプラス方程式の境界値問題の解を, ポアソン核を用いて表示している. 他のフーリエ解析の入門書があまりふれていないハイゼンベルグの不確定性原理について最後に記述されているところは興味深い. 第 6 章で多次元ユークリッド空間上のフーリエ変換の一般論, 波動方程式のフーリエ変換による解表示を標準的に扱っている. またフーリエ変換の球対称性とベッセル関数の入門的解説も与えられている. 6 章の最後で最近特に注目されているラドン変換を概観しているところが興味深い. 逆問題との関わりも示唆されており, 研究者にも一読をお勧めしたい項目である. 普段, 数論の問題を意識していないせいもあるが, 第 7 章の有限フーリエ解析と第 8 章のディリクレの定理が新鮮に思える. 極限や積分が表面に現れない初等整数論の問題にフーリエ級数の理論がうまくかみ合っているからである. 第 7 章の内容は, 円周上の 1 の N 乗根からなる群 $\mathbb{Z}(N)$ 上のフーリエの反転定理とプランシュレルの等式を証明し, そののち有限生成アーベル群に拡張している. 第 8 章では初等整数論の基礎を復習し, ユークリッドによる素数の無限性定理を紹介している. 2 以外の素数は $4k+1$ の形のものか $4k+3$ の形のいずれかのクラスにあることに注目すれば, ユークリッドの素数無限性定理をより精密にし, $4k+1$ からなる素数全体 $\mathcal{P}_1$ と $4k+3$ からなる素数全体 $\mathcal{P}_2$ の無限性に関する解説を与えている. $\mathcal{P}_1$ の無限性はユークリッドの証明に少し手を加えれば比較的容易に証明できる. $\mathcal{P}_2$ についてはユークリッドの論法に帰着することはできないので, 問題は $\mathcal{P}_2$ の無限性である. そこでルジャンドルは平方剰余の相互法則を証明しようとしてこの問題を一般化し次のような問題を提唱した: “q と ℓ が互いに素であれば, 数列 $\{\ell+kq\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は無限の素数を含んでいる.” この問題を解決したのがディリクレであり, 表題のディリクレの定理として知られている. 証明の鍵は, ディリクレの L-関数 $L(s,\chi)$ の $s=1$ での非零性を示すことにある. $L(s,\chi)$ は ζ-関数 $\zeta(s)$ の積表示のアナロジーとして定義されるものである. ここで, χ は $\mathbb{Z}$ 上の q を法とするディリクレ指標と呼ばれる関数で有限フーリエ解析をとおして定義されている. 本章の最後に $L(1,\chi)$ の非零性の証明を与えディリクレの定理の証明を完結している.

数学の世界では通常代数, 幾何, 解析の棲み分けを行っている. 本書を最後まで読むと「数学は一つではないか」という気持ちにさせられる. ある調和解析の専門家が「フーリエ解析は応用されるためだけではなく解析学の哲学である」と言っているが, 本書を読む限り, そこで「解析学」を「数学」に置き換えてもよいのではないかとさえ思われてくる.

ただ第 7 章, 第 8 章は不等式などの評価になじんでいる解析系の人間にはそれほど読みやすくない. 若いうちにきちっと読み切ることが大切であろう. 最後に本書を読了された読者に上で引用したスタイン教授らによる一連の専門書に進まれるまれることをお勧めしたい.