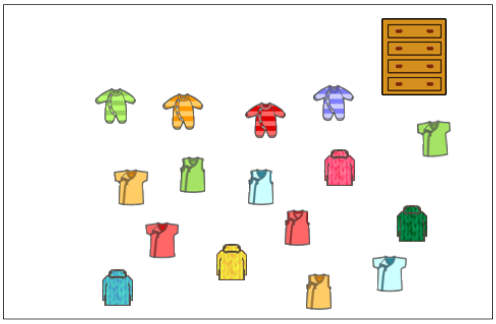
# 鏡の国へ行ってみよう！
## ～対称性のはなし～

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
伊藤　由佳理

以下は，2010 年秋に名古屋大学で開催された市民講演会の講演内容をまとめたものです．講演会にはたくさんの方に来ていただき，アンケートにもご回答いただき，どうもありがとうございました．また，市民講演会での講演という貴重な機会をいただきましたことをこの場を借りて，お礼申し上げます．

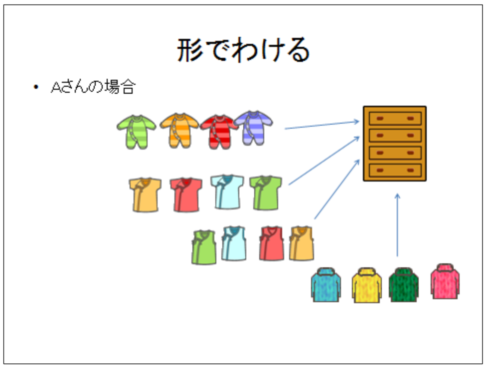
---

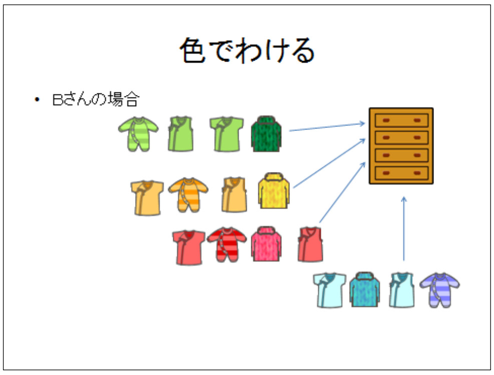
数学は，たくさんあるものを分類・区別して，きれいに整理整頓する学問です．
まずは，具体例を考えましょう！



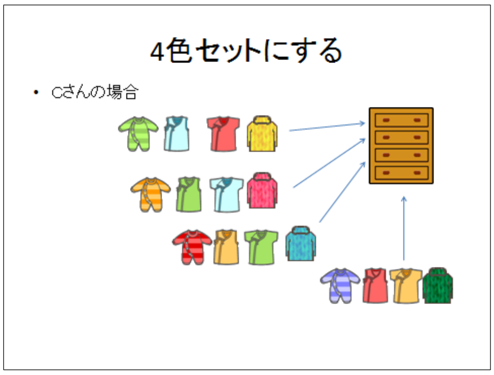
問：あなたは，右のような複数の洗濯物を，
　　どのようにしまいますか？

簡単に思いつくものとしては，
・形でわけるＡさんの場合，
・色で分けるＢさんの場合　があります．




この他にも，Ｃさんのように「4 色セット」でしまう方法もありますし，
・すべて一つの引き出しにしまう，
・ひとつずつ引き出しを変える
など，たくさんあり，答えは回答者の数だけ考えられます．




これらはみな，「同値関係」の例です．

講演会では詳しくお話しませんでしたが，この「同じ引き出しに入れる」という概念を数学的に言い表せるのが「同値関係」です．つまり，この「同じ引き出しに入れる」条件が次の同値関係の定義をみたすときに，うまく分類（引き出しにしまうこと）ができます．

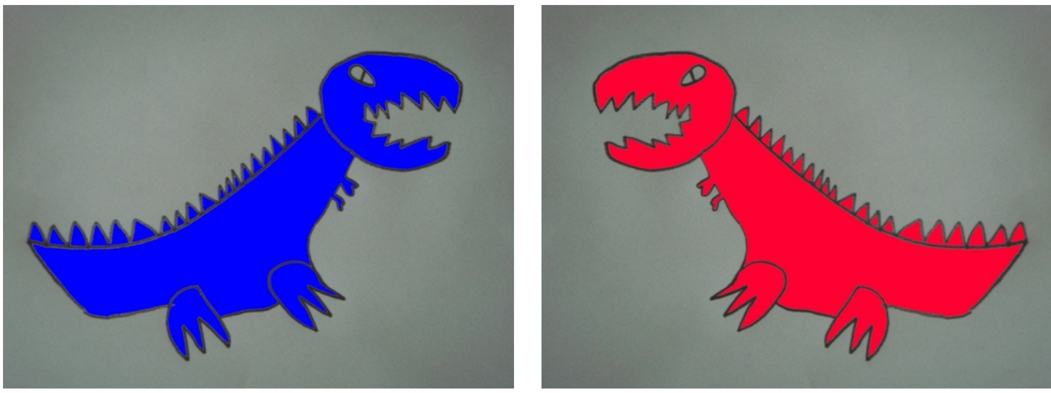
**【定義】**（同値関係）
ある集合の中の関係～が次の３つの条件をみたすとき，同値関係という．
① X～X
② X～Y　なら　Y～X
③ X～Y　かつ　Y～Z　ならば　X～Z

講演会では，幾何学的な対象（図形）をいろんな対称性を用いて，分類する方法を説明しました．

**１．道具としての鏡の存在**

鏡にうつる姿は，こちらと同じように動くが，向こう側の構造は反対でもあり，鏡の向こう側の世界を描いた「鏡の国のアリス」を書いたルイス・キャロルも数学者ですが，精神分析では，鏡を通して自我が目覚めるというラカンの「鏡像段階論」など，鏡はいろんな場面に登場する不思議な道具として扱われています．

さて，今回は数学の話なので，鏡といっても「対称性」だけに注目します．したがって，「幾何学的な対称性」にだけ注目し，「色」の違いは，数学では気にしないことにします．



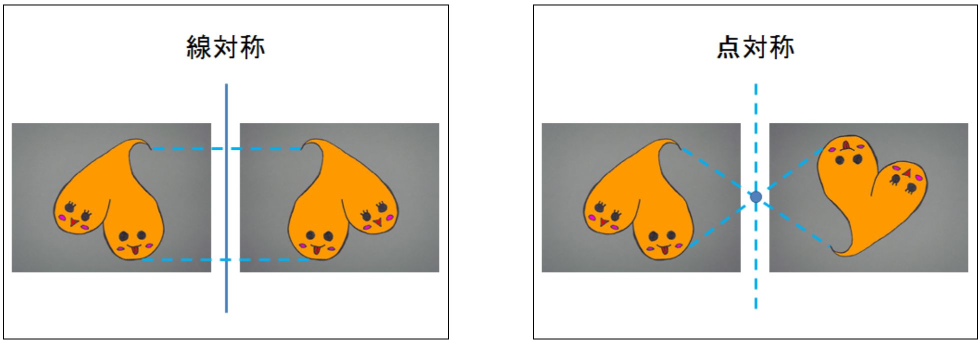
©Haruki

以後は幾何学的な対称性を扱いますが，「対称性」は幾何学的にだけではなく，代数学的にも，解析学的にも定義できます．たとえば，式　$a+ab+b$　は，a と b について　対称，　つまり，a　とｂを入れ替えても，同じです．

幾何学的には「対称性」を次のように定義します．

【定義】（対称性）
対称性をもつ，とは，ある軸を中心として回転したり，ある点を中心として反転したり，鏡に映す，など，ある操作（合同変換）の後にはじめの状態と同じ状態になることをいう．

簡単な対称性の例としては，線対称や点対称がある．




では，これからいろいろな「鏡（対称性）」をみていきましょう．

## ２．自分自身がうつる鏡（合同変換群）

まずは，自分自身とまったく同じになる鏡を考えましょう．つまり，「鏡に映した姿」が「自分」とまったく同じになってしまう場合を考えます．
ある図形を自分自身にうつす「動かし方」が，どのくらいあるのか見てみましょう！

「幾何学的な対称性」を表す方法として，「群（ぐん）」という概念があります．
【定義】（群（ぐん））
ある演算∗で閉じた代数的集合 G の, 任意の元 x,y,z が, 次の性質をみたすとき, 群という．
１．$(x*y)*z=x*(y*z)$　（結合法則）
２．$x*e=e*x=x$　をみたす単位元 e が存在する．
３．$x*y=y*x=e$　をみたす x の逆元 y が存在する．

実は,「家紋の動かし方全体」は群になります．
つまり，定義の１から３の性質は,
１．３つの操作に関して，結合法則がなりたつ
２．単位元＝恒等操作（何もしない）
３．逆元＝ある動かし方の逆操作
というように言い換えられます．

具体例を見てみましょう．

家紋の動かし方・その１（回転）・・・・巡回群

　家紋自身を，回転することにより，
自分自身に一致させることができます.
【例】三つ巴（みつどもえ）
120 度回転で，自分自身と一致します.
この家紋の動かし方は，3 次の巡回群になっています.

家紋の動かし方・その２（回転と裏返し）・・・・二面体群

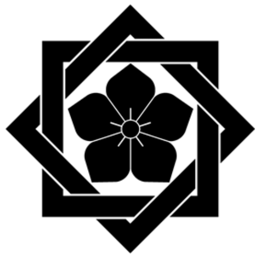
　　家紋自身を回転したり，裏返すことで，
　　自分自身に一致させることができます.
【例】桔梗（ききょう）
72 度回転や，裏返しによって，自分自身と一致します.
この家紋の動かし方は，5 次の二面体群になります.

他にも，いろんな動かし方があります.
【演習】次の家紋を自分自身に動かす動かし方には，どんなものがありますか

菊

桐

花菱



坂本龍馬の家紋として有名な「違い枡に桔梗」は，きれいな対称性のある図形に見えますが，この家紋を自分自身に動かす動かし方はなく，対応する群は単位元のみからなる単位群になります.
どんな勢力にも加わらず，わが道を突き進んだ坂本龍馬のような家紋ですね.

ちなみに，異なる図形でも，動かし方が同じなら，対応する群が同じとみなします.
たとえば，次のふたつは，動かし方は同じなので，対応する群も同じです.

桐

橘

これ以外にも，家紋の種類は豊富にありますが，家紋を自分自身に重ねる操作（合同変換）にあたる群は，回転と裏返しだけになります．つまり，もう少し群論の言葉で表現すると，

1．n 次の巡回群（正 n 角形の回転）

2．n 次の二面体群（正 n 角形の回転と裏返し）

のいずれかで，家紋を自分自身に動かすことができるのです．

以上は，2 次元平面に描かれた図形を，自分自身に動かす動かし方に注目しましたが，さらに 3 次元で考えるとどうなるでしょうか．2 次元の正多角形にあたるものとして，3 次元の正多面体が考えられます．正多面体が全部で 5 種類あります．

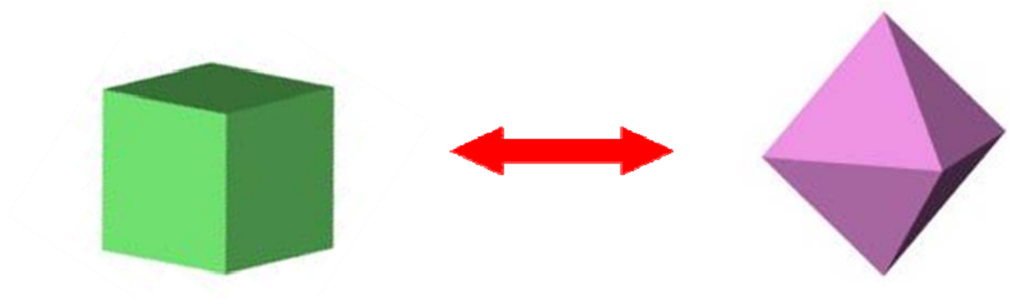
しかし，３次元の正多面体の合同変換群は，３種類しかありません．つまり，

1．正四面体群（正四面体）

2．正八面体群（立方体，正八面体）

3．正１２面体群（正１２面体，正２０面体）自分自身に動かす動かし方は，５つではなく，３つになります．

正多面体の合同変換群が，３つになるのは，図形の**双対性**のためです．立方体と正八面体（正 12 面体と正 20 面体）は互いに頂点と面を対にすることができるので，動かし方は，同じになります．



ここまでに登場した群は，３次元の空間内の距離を変えない合同変換に対応しており，これらは 3 次元空間内の線形変換で表現することができます．そのような変換は 3 行 3 列の行列で表示でき，その全体は回転群と呼ばれます．さらに，その中で，数回の操作で必ず元に戻る，つまり単位行列になる有限部分群を分類すると，これまでに登場した 5 種類の群でつきていることがわかります．したがって，次のようにまとめられます．

【定理】３次の回転群 SO(3)の有限部分群は

１．巡回群
２．二面体群
３．正四面体群
４．正八面体群
５．正１２面体群

のいずれかと同型である．

### ３．永遠に続く鏡（結晶群）

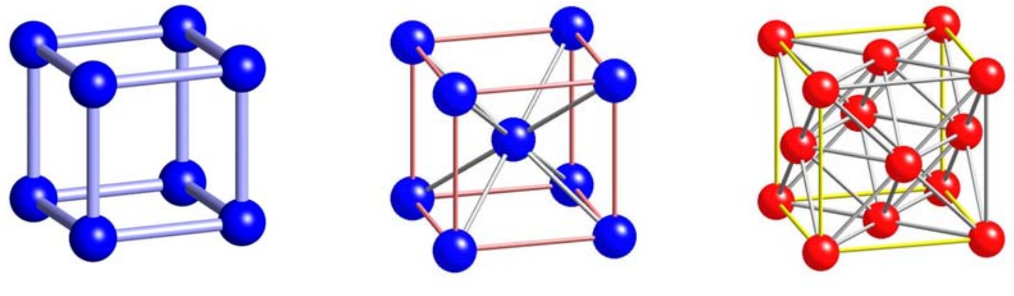
ここまでは，ある図形を自分自身に移す対称性に注目して，2 次元と 3 次元の場合を見てきました．こんどは，同じ図形がどこまでも続いているような場合を考えてみましょう．そこで，回転と裏返しのほかに，平行移動も加えてもとの図形と一致する場合を考えます．

ある図形を平行移動すると，包装紙や壁紙のように連続する図形が得られます．このような図形を自分自身に重ねる動かし方は，「２次元結晶群」と呼ばれ，全部で１７種類あります．この分類は，19 世紀の結晶学者のフェドロフによって証明されたことになっていますが，17 種類すべてのパターンが，それ以前から使われています．たとえば，

1. スペインのアルハンブラ宮殿のタイルの模様
2. 着物などの古典的な文様

などにもあります．2 のような文様を使った 2 次元結晶群の分類については，『この定理が美しい』（数学書房）の「対称性の美」を参照してください．

さらに 3 次元でも平行移動を加えた「3 次元の結晶群」を考えることができます．数学的には，「3 次元結晶群」は，217 種類あることが証明されていますが，そのほとんどが自然界に存在するというのも不思議です．よく知られた例として，高校の教科書に出てくる次のような結晶があります．



さらに 4 次元では，4783 種類あるそうですが，5 次元以上は未解決です．

## ４．自然科学における対称性

「群」は，幾何学的な対称性を知る手段として，物理学や化学などでもよく利用されています．その代表的なものが，分子の構造決定です．自然界に存在する未知の物質の分子構造を知るため，その物質に特殊な光を当てて，幾何学的な対称性を調べることで，その分子の結晶構造がわかります．この技術は，天然物の合成などに生かされ，製薬などに応用されています．

2001 年ノーベル化学賞を受賞した野依良治氏の「不斉分子触媒の開発」は，２つの鏡像体のうち，一方だけの合成を可能にする重要な反応の触媒分子を開発に関する業績です．自然界には，鏡像対称な分子が同じ数だけ存在するわけではなく，一方のみが多く存在することがありますが，人工的に合成すると同じ数の鏡像体が得られます．しかし，サリドマイドのように，それぞれの性質が異なり，一方のみが有効な鎮痛剤になる例もあります．そのような問題を解消するのが，この野依氏の研究業績であり，数学的には「対称性をなくす方法」を見つけたことになります．

また，2008 年にノーベル物理学賞を受賞した小林誠氏，益川英敏氏の受賞理由は「CP 対称性の破れの起源の発見」です．1972 年に，粒子と反粒子の非対称性で，私たちの世界が存在するという「小林・益川理論」を提唱し，その事実が 30 年後に大型加速器で実証されての受賞でした．ここでも，対称性がないところが注目されています．

数学では一般に「対称性のよいもの」に注目することが多いのですが，自然科学では「対称性がないところ」に面白い研究対象があることも多いようで，同じ理系と呼ばれる研究者ではありますが，それぞれの見方はちょっと違うのかもしれません．

さて，来月（2010 年 10 月）には，この名古屋で「生物多様性会議(COP10)」が開催されます．ここでは，様々な生物の関わり合いが議論されることでしょう．たとえばチョウの分類に関しては，その幾何学的な文様だけでなく，様々な色，性質など，多様な面に注目するので，数学の世界の「分類」とは，少し趣が異なります．つまり，数学という学問は，数多くあるモノの本質的な部分，基本的な構造に注目することが多いので，一見「多様性」とは相反する学問に見えます．しかし，自然科学や社会現象の説明にも使われ，それらをよりよく理解する助けにもなっていますし，逆に自然科学や社会現象から生まれる数学もあります．

## ５．おわりに

以上が，市民講演会でお話しした内容です．今回は，市民講演会ということで，群の初歩的な内容を視覚的に説明しましたが，高校生向けには，群の定義や正多面体群の話も取り入れると，大学数学を身近に感じてもらえるようです．

参考文献を少し挙げておきます．対称性に関する面白い啓蒙書は他にもたくさんあります．

・ヘルマン・ヴァイル（遠山　啓訳）「シンメトリー」紀伊国屋書店
・伊藤　由佳理「対称性の美—結晶群の分類」:「この定理が美しい」(共著) 数学書房 P.30-39.

また，講演の中で，以下のような名古屋大学内での，博物館や展示物の紹介も，させていただきました．名古屋大学博物館の展示内容は，もう変わってしまいましたが，あと２つの展示は，いつでもご覧になれますので，名古屋大学にお越しの際は，ご訪問ください．

・「恐竜たちがやってきた」－化石から学ぶ過去の生物多様性－
　名古屋大学博物館～2010 年 9 月 30 日(木)
・ノーベル物理学賞・化学賞展示室（理学部Ａ館１階）
　　月～木　10:00～12:00，13:00～16:00
・名古屋大学野依記念物質科学研究館 2F　（野依良治氏ノーベル化学賞）