

書 評

実験・発見・数学体験

小池正夫 著，数学書房，2011 年

関西学院大学理工学部

川中宣明

今は、全国至る所に子供のためのスポーツ教室がある。例えば、サッカー教室では年少の子供たちをどのように指導しているのだろうか。多分、簡単なボール遊びから始めて次第にサッカーに慣れさせ、パスやドリブルなどの基本がある程度できるようになったら、早いうちに試合形式の練習へと導くのではないだろうか。こうしてサッカーが大好きな子供たちが大量に生まれ、しかしその多くは成長してサッカー選手になるわけではなく、別のスポーツや別の活動・職業の中で（もしかすると自分でも気づかないうちに）サッカーから得た無形の何かを生かしていくことになるのだろう。

数学もこのようであれば、といつも思う。数学の授業においては、それが中学・高校・大学のどれであっても、ドリブルやパスやゴールの練習とか、ルールや戦術の説明ばかりをやっているような気がする。厳格なルールは後回しにしても、とにかく試合をさせて、そこから得られる喜びを先ず味わわせることが、数学の場合にもできないものだろうか。

小池正夫氏の本は初等整数論を題材にしているが、初等整数論の教科書ではない。だから算術の基本定理（自然数の素因数分解の存在と一意性）の証明は載っていないし、オイラー関数やルジャンドル記号も登場しない。（初等整数論をきちんと勉強したい人のためには「あとがき」の中で [2] との併読が薦められている。）これは数学の知識を伝えるための本ではなく、数学研究の楽しさを伝えるための本である。その目的に合わせて著者は随所でさまざまな工夫を凝らしている。ほとんど全てのページに〈観察〉、〈疑問〉、〈推測〉、〈考えるヒント〉などのタイトルがついた枠囲いがあり、著者が読者に対して良いタイミングで指示を出している。まるでサッカー教室の熟練コーチが「よし、大きく右へパスを出そう。いいぞ、そこでゴール前へ走れ。」などと声をかけているかのようである。

このようにして著者は「計算し、得られた結果を観察し、そこから一般法則を推測する。さらに計算し、推測が正しいかどうかを検証する」という一連の行為、つまり「数学研究（の再体験）＝ 数学体験」へと読者を誘ってくれる。推測した法則を証明することには必ずしもこだわっていない。本書の力点は「計算し、観察し、推測し、検証する」という数学研究の実験的側面の躍動感を読者に伝えることにある。

数学の特徴が「厳密な論理による証明」にあるのはもちろんのことで、その重要性は言う

までもない。しかし、そのような方向の本は教科書などの形で既に数多く出版されている。また、サッカー教室が将来のサッカー選手だけのものではないように、数学の授業も将来の数学研究者や数学教師だけのものではない。データを入手し、観察し、推測し、検証する、言いかえれば、データから「本質的なものが何かを見抜く」(: 本書「はじめに」) という行為はどの分野にも共通の、極めて役に立つ方法であるから、数学を通してこれを習得すれば、別の世界でもその経験を生かすことができるはずである。正しいデータを得るには注意深く計算しなければならない。正しいと信じていた自分の大切な予想が唯一つの計算例により粉微塵に打ち砕かれ、すっかり意気消沈した翌日、ふとノートを見直してみるとトリビアルな計算間違いを仕出かしていたことが分かり・・・, といった経験は多くの数学研究者が持っている。できればすべての学生に、こんな経験をさせたいものである。「データは正しいとは限らない」ことや「間違ったデータの混入を防ぐために、データの収集は極めて慎重に行わなければならない」ことが良く分かるはずだ。また、本書の第5章で「剰余法 m の世界」が紹介されているが、その冒頭の枠囲いには

「自分が今考えている対象がいるコンテキストを忘れないようにしましょう。」

と初学者が陥りがちな誤解への注意が、さりげなく書き込まれている。(これは教師のための指針でもある。実際、評者には「目から鱗」であった。) この注意も数学に限らず、どの世界でも重要なことであろう。

本書は独習も十分に可能だが、適切な指導者の元でセミナー形式で読み進めることができればさらに効果的であろう。後半にある「剰余法 m の世界でのフィボナッチ数列」や「剰余法 m の世界でのパスカルの三角形」は標準的な教科書などではあまり見かけない話題だから、指導者も学生と一緒に迷ったり考え込んだりする楽しみが残されている。見慣れた道筋のすぐ脇に見知らぬ街角がある。そこでうろうろと迷っているうちに本書にも書かれていない別の世界への扉が見つかるかもしれない。答えの書かれていない魅力的なく問題<が幾つも用意されているから、それらの問題に自力で取り組む学生が現れるだろう。さらには自分で新たな問題を設定し、それを考え始める学生が現れたら・・・, そのとき指導者は(心の中で) 快哉を叫んでよいと思う。

本書に似た数学書を評者は知らない。著者は「あとがき」で山本芳彦氏の本 [1] からの影響について書いているが、数式処理ソフト **Mathematica** が前面に出ている [1] と手計算が中心の本書とはかなり印象が異なる。(個人的には数学への「手触り」が感じられる本書のスタイルを好ましいと思う。) 評者にはむしろ、本書はポリアの本 [3] の直系であるように感じられる。[3] でポリアは数学における蓋然的推論について多くの事例を挙げて

「私はあらゆる段階の数学に関心を持っているすべての学生に向かって話しかけるのですが、こういたい: なるほど、証明することを学びましょう。しかし推測することも学ぼう

ではありませんか、と。」

と数学教育に「推測を学ぶこと」も取り入れよう、と提唱した。一方で、それが決して容易でないことも述べている：

「私は推測を学ぶのにとっても簡単な方法があるとは信じません。とにかくそんな方法があるとしても私はそれを知りませんし、そして確かに、以下のページにおいて、それを提供しようという素振りはいたしません。蓋然的推論を有効に使うことは実際的技能であり、他の任意の実際的技能と同様に、模倣と練習によって学ばれるものです。」

的確な推測をすることは（数学に限らず）「技」の一種であるから教えられない（言葉にできない）部分があるのは当然だが、サッカーの技術と同様、教えられる部分もかなりあるというのがポリアの主張だろう。

ポリアの本 [3] は本書より扱っている数学分野の範囲が広く、扱う数学のレベルも全般的にはより高いので、[3] を全部を読みこなせる人は、大学の数学科の学生の中にも、正直言って多くないのではないかと思う。本書は予備知識として必要なのは高校数学程度であり、記述もより具体的で分かりやすく、実践的でもあるので、[3] よりずっと広範囲の人、例えば数学科でない（文系も含む）大学生、あるいは高校生でも楽しめるだろう。最初は初級レベルの推測からスタートして、次第に中級レベルへと読者を導くように題材がうまく配列されている。初等整数論にテーマを絞る込むことによって、本書はポリア [3] より一歩前に進んだように見える。

新しいタイプの数学書が誕生した。評者もいろいろな機会に本書を活用していきたい。

参考文献

- [1] 山本芳彦『実験数学入門』岩波書店、2000年（絶版）。
- [2] 高木貞治『初等整数論講義』[第2版] 共立出版、1971年。
- [3] G. ポリア（柴垣和三雄訳）『数学における発見はいかになされるか 第1巻 帰納と類比』丸善、1959年（絶版）。（原著：G. Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. 1 : Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton Univ. Press, 1954）。