

書 評

数は科学の言葉

トビアス・ダンツィク 著, 水谷淳 訳

日経BP社, 2007年

熊本大学大学院自然科学研究科

加藤文元

最初に著者のトビアス・ダンツィクの略歴を紹介することから始めたい。1884年ドイツ系ラトビア人として生まれる。若いころは反ツァーリズムの活動家であったが、後にパリに移り、アンリ・ポアンカレのもとで数学を学ぶ。1910年にアメリカに移住しオレゴン州で木こりとして生活しながら勉強を続け、1916年インディアナ大学で数学のPh.Dを取得。以後、ジョーンズ・ホプキンス大学、コロンビア大学、メリーランド大学の教壇に立った。1956年ロサンゼルスで死去。一見して特異な経歴の持ち主であることが想像される。それを反映してか、その著述もあまり他に類例を見ない内容を含んでいる。

トビアス・ダンツィク著『数は科学の言葉』に首尾一貫して流れるテーマを一つ言い当てるのは簡単ではない。全12章からなる章立てを見ても、議論の中心の対象は数概念であったり、位取り記数法、実数の連続性、さらには無限であったりと内容豊かである。そんな中で、底流にある著者の思想を強いて短い言葉で表現するなら「人間と数学」ということになりそうだ。第1章最後にも「人間が全ての単位である」(p.27)とある。「人間と数学」との関わりについては、手前味噌ながら評者も拙著『数学する精神』(中公新書)で考察したことがあり、そこでの自分の主張と重なる部分も多く見出せたことは大変興味深かった。もちろん、ダンツィクの省察の方がより深く、より真面目に掘り下げる部分も多く、その意味では大変勉強になったとも言える。

「人間が全ての単位である。」この根本思想が最初に実地で試されるのは、第2章『空白列』で議論される位取り記数法の歴史である。空白列とは、もちろん「0」が数字として現れる前の〈空位〉のこと。現代では当たり前のように使用される10進位取り記数法であるが、その発展史は極めて特異なものであった。インドとアラブの数学の発展の中で中世以降に発明される以前の数千年間には、ほとんど何も進歩がなかった。驚くべきことである。古代ギリシャの天才達は、あれほど完成された幾何学大系を構築しておきながら、位取り記数法を発見することはできなかった。のみならず、初歩的な代数学すら発展させることができなかった。著者はこれらの事実を率直に数学史の謎として、極めて奇妙なことであると認めている。位取り記数法の勃興の理由をソロバンやカウンティング・ボードの使用を背景とした文化的要因に求めながらも、その全面的受容までには、頑な保守主義のために驚くほど長い時間がかかったことも併せて指摘される。

本書は数学史の本ではない。確かに数学史の話題が豊富にあつかわれるが、通史体で書かれているわけではない。ピタゴラス派・古代ギリシャ数学が議論される中で、19世紀のポアンカレの言葉などが織り込まれる。第3章『数の伝説』、第4章『最後の数』を通して、自然数から整数、有理数へと数が拡大していく様子が語られるが、織り込まれるのはそれだけではない。〈無限〉についての認識の変化や、数学そのものに対する認識についても率直に記述されている。

その際、ダンツィクは「人間が全ての単位である」を基軸として、自分自身の省察をためらうことなく披露していることが興味深い。無限とは何か？と率直に問いかけながら、アポリアの本質を焦らずゆっくりと分析していく。ダンツィクという人は実直で真面目な人だったのだろう。「無限の存在を数学的に証明するのは不可能だ」(p. 67)。このように始まる彼の省察は、いくつかの興味深い考察の紆余曲折を経て「数学の創造力は、“人間の直観”という捉えがたく実体のないものに頼っている」(p. 69)という結論へと導かれる。

第5章『記号』では、数学記号の発展が数の概念の深化・発展に寄与したという、著者の考えが披露されているのが興味深い。記号化は数の計算からパターンによる数学の認識へと数学の捉え方を変化させた一方で、記号自体が生成する新たな数の可能性を開いた。若いころの政治運動経験の名残りなのか、基本原理を保ちつつ新たな数が生成されていく様子を著者は「領土拡大はしたいが基本法は維持したいと望む国家の政策と比較」(p. 97)できると述べる。この手の政治的比喻は、本書の各所に見られる。

正方形の対角線が通約不可能であること、言い換えれば、 $\sqrt{2}$ が有理数ではないことを発見したのはピタゴラス派だとされる。しかし、この発見以降もしぶとく $\sqrt{2}$ を有理数で表そうとする人々はいたのではないか。現在でも角の三等分を定規とコンパスで作図しようと日々努力している人々がいるかもしれない。そんな一見無駄な努力の中から、 $\sqrt{2}$ の近似分数 $17/12$ が生まれたのではないかと著者は述べる(第6章)。エレアのゼノンが巻き起こした逆理の数々が、ギリシャ人のその後の数学・科学に与えた影響は大きい。それは一方で詭弁の時代の到来をもたらし、他方で〈無限〉に対する恐怖感を植え付けた。無限小解析の創始者と言っても過言ではないはずのアルキメデスが、微積分の発見者とならなかったのは、適切な記号体系の欠如の他に〈無限〉に対して正面から向き合う態度が時代環境の中に無かったことが原因なのではないか(第7章)。

本書の後半以降では〈無限と有限〉、〈連続と離散〉という2つのディレンマと深刻に対峙することになる。「宇宙のハーモニーはレガートというたった一つの形式しか持たないが、数のシンフォニーはその対極にあるスタッカートしか奏でない」(p. 163)。文芸復興以降のヨーロッパは、ギリシャの数学のほとんどすべてを引き継ぐことができたにも関わらず、これらのディレンマに対する恐怖感や批判的精神は全く受け継がなかった。それがかえってニュートンやライプニッツらによる微積分の発見を促し、近代以降の西洋数学が独自の発展をしていくきっかけとなった、と著者は考

える。バークリー司教の辛辣な批判にも関わらず、解析学はどんどん成長した。19世紀というエポックにおいて批判的精神が復活し、厳密性のレベルを極限まで高める努力がなされるようになったが、その努力の方向性はゼノンやバークリー司教の批判に正面から向き合うものではない。むしろ、それを巧みにかわすものであった。「直線上のどの点にもただ一つの実数を割り当てることができ、逆にどの実数も直線上の点としてただ一つの形で表せる」という「デデキント＝カントールの公理」(p. 170)が幾何学や解析学を算術化させた。「数は世界を統治する」(p. 171)。それは心理的な恐怖感の大部分を払拭したという意味で、〈解決〉であったというより一つの〈奇跡〉であったと言うべきだろう。「奇跡は起こっているのだ！」(p. 135)。

数学の歴史に一貫性を求めるのは間違っている。数学は論理の鎖の一つ一つを、確実にたゆみなく積み重ねることで発展してきたわけでは決してない。不確実な基盤の上に、不安定な楼閣を次々に建て増しし、危なっかしい状態が長く続いた中から、数々の革新が起こった。微積分は典型的な例であり、近代ヨーロッパ数学が独り立ちして行く中で、最初に経験しなければならなかった試練であった。他にもある。複素数の歴史がそうだ。「虚構は解釈を探す一つのやり方だ」(p. 194)。第11章であつかわれる実無限についての長い論争もまた然り。

最後の章、第12章『二つの実在』では、数学の対象の実在性について、つっこんだ議論がなされる。ここでの記述は、もはや数学ではない。そして、本書全体を通じて主張される「人間と数学」の関わりが、ここにも極めて色濃く配色されている。著者は徒に無批判なプラトニズムに耽溺するわけではないが、かといって、無責任な懐疑主義に陥ることもない。そこはさすがに数学者である。

「実在に関する哲学者の思索は、一般的な数の概念にどんな程度の実在性を当てはめるべきかを決める上では、ほとんど役に立たない」(p. 217)。実際、過去の哲学者たちによる数学的実在の分析の数々が検討に付されて行く中で、直観と論理、あるいは主観と客観といったディオコトミーの狭間に〈漂っている〉数学的実在の姿が浮き彫りになる。「主観的世界にも客観的世界にも、数の概念に関する実在性の基準は見つけられない」(p. 227)。結局、根拠は何もないのだ！しかし、このことからネガティブな印象しか引き出せなかったとすれば、数学の発展など存在しなかったに違いない。実際、抽象的な数学の発展がなかった民族の歴史など、いくらでも存在するだろう。ここでもやはり「人間が全ての単位」というスローガンが浮き彫りになる。「数学はいわば最高裁判所であり、それ以上控訴はできないのである」(p. 227)。

数学における概念の〈根拠〉とは何か？この不躰な質問は、数学を愛好する者にとって、数学は何の役に立つのか？と問われるよりも苛立たしい。拙著『数学する精神』で評者も秘かに苦しんだ。確かに理屈では説明できない。〈数学そのもの〉を宙づりにするのは危険なことだ。しかし、だからと言って、レトリックの虚飾には走りたくない。ダンツィクはこれに成功しただろうか？私の印象では…彼はちょっと真面目過ぎたかもしれない。