

数学ソフトと歩く曲線の世界

濱田龍義

福岡大学/JST CREST/OCAMI

1 序

平成 24 年 8 月 9 日(木)から 11 日(土)にかけて「女子中高生夏の学校 2012 - 科学・技術者のたまごたちへ -」(以下,夏学)が国立女性教育会館(以下,会館)で行われました。全国から 118 名の女子中高生, 30 名の保護者・教員が参加する規模の大きなものですが, 昨年度は東日本大震災の影響により縮小開催であったため, 2 年ぶりの標準開催となりました。

私が担当したのは, 8 月 10 日(金)の午前中で「サイエンスアドベンチャー ~ミニ科学者になろう~」という 2 時間の実習です。各分野の専門家による 11 の実験・実習が行われ, 参加者はそのうちの 1 つを選んで参加します。日本数学会からは私の他に広島大学の清水理佳先生が「結び目のゲームを作って遊ぼう」という実習を行いました。私は「数学ソフトと歩く曲線の世界」と題して, GeoGebra という動的幾何学ソフトウェアを紹介してきました。本稿では, 実習にいたるまでの準備と当日の内容について紹介します。

2 実習環境の準備

実習は会館に設置されているマルチメディア研修室で行いました。収容人数は 30 人, 私の実習の受講者は少なめだったので, 十分過ぎるほどの広さでした。PC には Windows 環境が用意されていましたが, 様々な数学ソフトウェア環境を紹介したいという気持ちもあり, 我々が開発を進めている MathLibre [4] を使うことにしました。MathLibre は KNOPPIX/Math の後継プロジェクトであり, 世界中で開発されている数学ソフトウェアを DVD 起動の Linux 上に収録したものです。これまでに JST CREST 日比チームによる“JST CREST 神戸スクール”[5], オープンソースの数式処理システム Sage に関する研究集会“Sage Day 39”[6]等において KNOPPIX/Math や MathLibre を実習環境として利用した実績があります。神戸スクールでは参加者の PC に継続的な環境を構築することも目的の一つであるため, VMware Player という仮想マシンを用いています。一方, Sage Day 39 では, CREST 塾に比べて時間も短いことから, USB 起動環境を用いました。幸い, 夏学においては 8GB の USB メモリーを都合していただくことができたため USB 起動環境を選択しました。

実習はが 8 月 10 日の午前中に設定されていたこともあり, 前日にマルチメディア研修室で準備を行いました。USB 起動環境は, ファイルを複製するのに約 10 分前後かかることを除けば, 誰でも簡単に作成することができます。DVD から MathLibre を起動し, 8GB 以上の USB メモリーを PC に接続し, メニューから設定 Install KNOPPIX to flash disk を選択し, 指示にしたがって作業を行えば完成です。USB 起動の利点は, DVD 起動に比べて利用時の体感速度が速いこと, また, ホームディレクトリとなる領域を USB メモリーに作成して継続的に利用できることです。

実習室の PC で USB 起動を試みたところ，残念ながらそのままでは起動しませんでした．BIOS で “USB Storage Device Support” が Disable に設定されていたことが原因でした．実習用の PC の BIOS 設定を Enable に一時的に変更することで解決することができました．

3 GeoGebra について

実習では，MathLibre に収録されているソフトウェアのうち，3D-XplorMath 等，比較的，視覚に訴えるものを導入部分で紹介しました．3D-XplorMath については平成 20 年度の夏学において，首都大学東京の酒井高司先生による「コンピューターで描く図形の数学．～3D-XplorMath を使ったコンピュータ実習～」でも取り上げられています．[7]

今回は，主に GeoGebra を紹介しました．GeoGebra は，オーストリアのザルツブルク大学の大学院生 Markus Hohenwarter によって開発が始められた数学ソフトウェアです．世界中で数学教育に活用され，日本語や韓国語を含む約 50 ヶ国語に翻訳されています．各国には GeoGebra Institute と呼ばれる GeoGebra の地域コミュニティが 100 以上存在し，最近，日本で初の GeoGebra Insitute が沖縄に設立されました．現在，Markus Hohenwarter はヨハネスケプラー大学の数学教育の教授となり，世界各国にいるメンバーと協力して GeoGebra の開発に取り組んでいます．

GeoGebra は数学ソフトウェアの中でも，動的幾何学ソフトウェアと呼ばれるものの一種です．動的幾何学ソフトウェアとは，コンパスと定木の役割をコンピュータのソフトウェアで実現したものです．有名なものとしては，Cabri, Geometer’s Sketchpad, Cinderella などが存在します．日本国内でも愛知教育大学の飯島康之先生による GC/HTML5，明治大学の阿原一志先生による KidsCindy 等が知られています．

GeoGebra が他の動的幾何学ソフトウェアと一線を画するのは函数のグラフ描画や数式処理にも対応していることです．GeoGebra 自身，動的数学ソフトウェアを自称しています．ここ数年で他のオープンソースソフトウェアの数式処理システムとの連携が進んでおり，目を見張るものがあります．下図は GeoGebra のスクリーンショットです．

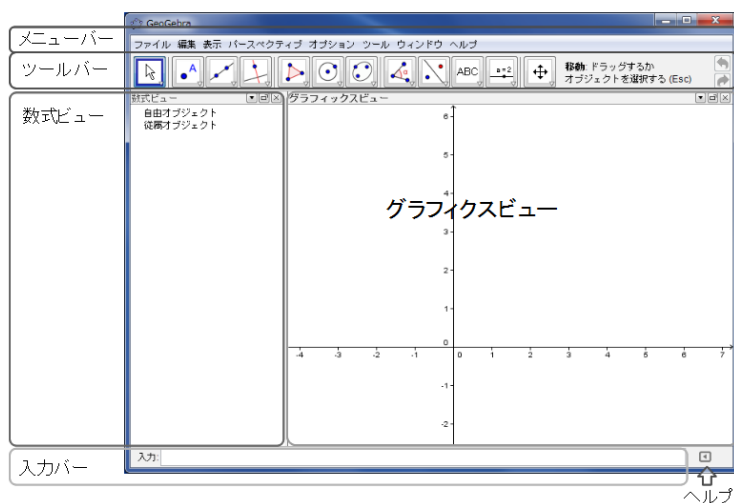


図 1 GeoGebra スクリーンショット

GeoGebra の特徴として、メニューバーからはファイル操作や、ウェブページへの変換、画像ファイルへの変換、保存等が可能です。最近では GeoGebraTube という教材共有サイトが盛んに利用されています。GeoGebra のエクスポートメニューから公開し、ウェブページ上にドキュメントを作成することができます。GeoGebra では、最初にツールバーで描きたい図形を選択し、グラフィクスビューに点を指示することで直線や円、曲線を作図することができます。描かれた点の座標や直線、円の方程式は自動的に数式ビューに表示されます。軌跡や残像の描画、スライダーはとても便利な機能であり、入力バーに GeoGebra の命令を入力することもできます。たとえば、関数を数学の一般的な記法で入力すると関数のグラフがグラフィクスビューに表示されます。^{*1}数式処理や数値計算、プログラミング機能を備えているため、与えられた関数に対するテイラー多項式のグラフやベクトル場、積分曲線なども簡単に描くことができます。

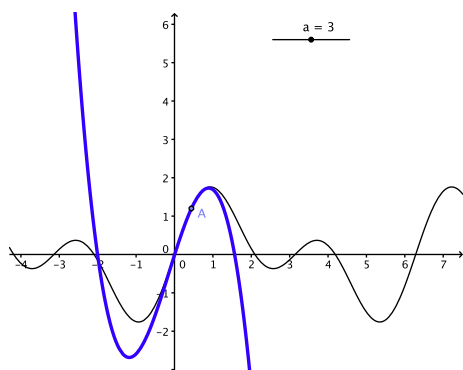


図 2 テイラー多項式

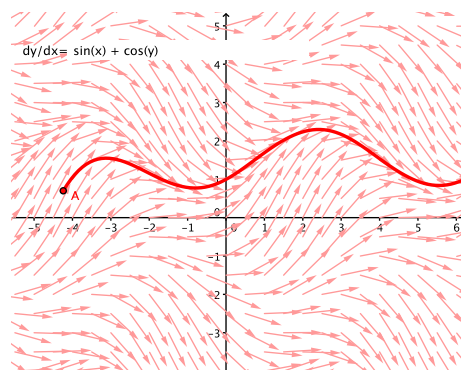


図 3 ベクトル場と積分曲線

4 動点の軌跡

まず導入として GeoGebra を用いて三角形の重心、外心等を描いてもらいました。2 点間の中点、与えられた線分に垂直な直線等、マウス操作でボタンアイコンを選択するだけで簡単に作図できます。また、作成した図形を動的に動かせることを確認してもらいました。その後、以下のような設問を紹介しました。これらは「直線と曲線ハンディブック」[2] で最初に紹介されている問題です。

問 1. 「壁に立てかけられた梯子 (はしご) が、なめらかな床面を滑り落ちていきます。梯子の真ん中には猫が座っています。座っている猫はどんな曲線に沿って動くでしょうか？猫は梯子におとなしく座っていて、途中で飛び降りないものとします。」^{*2}

問 2. 猫が梯子の真ん中ではない別の場所に座っているときは、どんな曲線に沿って動くでしょうか。

GeoGebra は PNG, EPS 等の画像を出力できます。この原稿は、MathLibre 上で $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 編集を行い、EPS 画像を張り付けたものです。実は、GeoGebra では、幾何学的に構成された図形については PSTriks, PGF/TikZ, Asymptote 等のコードに変換して $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ のソースコードに挿入することもできます。論文に挿入する図を GeoGebra で作図している方は、すでに多いのではないのでしょうか。

^{*1} つまり、Plot[] も plot() も plot2d() も必要ありません。

^{*2} 当日は TA の学生さんのアイデアで、この点を「猫点 (にゃんこてん)」と名付けて実習を進めました。なお、この猫の画像のオリジナルは Mac 用のフリーウェア neko DA の作者である後藤寿庵さんの作品であり、xneko, oneko 等の派生版にも用いられています。[3]

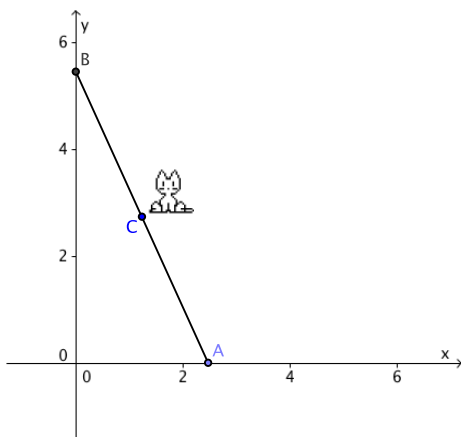


図 4 猫が中点にいる時

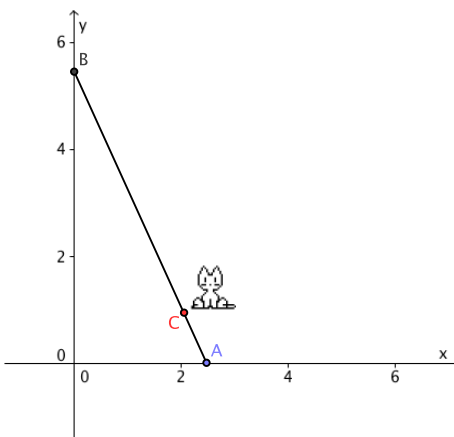


図 5 猫が中点以外の場所にいる時

線分 AB が壁 (y 軸) に立てかけられた梯子を表し、猫が座っている場所は点 C で表されています。点 A は床 (x 軸) を自由に滑らせることができます。問 1. において猫が梯子の真ん中にいるということは、点 C が線分 AB の中点であることを表しています。点 A を x 軸に沿って滑らせるとき、点 C の軌跡は、どんな曲線を描くかという問題になります。簡単にですが問 1. の場合について作図手順を紹介します。

1. x 軸上に点 A を作成します。点 A は x 軸上を自由に動かすことができます。
2. 点 A を中心にして特定の半径 (図では 6) の円を作成します。
3. 円と y 軸との交点 B を作成します。
4. 線分 AB を作成すれば、梯子の完成です。
5. 点 A と点 B の中点 C を作成します。
6. 「画像の挿入」機能により、あらかじめ USB メモリーに同梱した猫の画像ファイルを選択し、中点 C に挿入します。
7. 猫点 C を右クリックして「残像表示」を選択します。
8. 点 A を動かすと、猫点 C の残像としての軌跡が描画されます。
9. 描かれた軌跡を右クリックすることで自由に、色、太さ、形を変更できます。

このように、「残像表示」を用いて描かれた曲線は、点の動きを実感しやすいようです。一方で、GeoGebra には「軌跡」という描画機能も用意されています。線分や円、スライダー等の図形に拘束された駆動点と、駆動点によって生成される描画点の 2 点を選択することで軌跡として美しい曲線を描くことができます。軌跡は、残像の場合と違って動的に曲線を変形できる点も良いところです。ただし、GeoGebra の場合には線分上の任意の点を描画点とすることはできません。線分上の点を描画点とするためには別に比を定義して、線分における点の位置を定めることが必要です。^{*3}

猫点によって、円と楕円が構成されましたが、楕円について、さらに別な方法で構成することを試みました。まず、ひとつは円をある方向に縮小拡大する方法です。ここでは、 y 軸方向に縮小することを考えます。GeoGebra の「残像表示」で楕円を描いたのが図 8 です。一方、楕円は 2 点からの距離の和が一定な点の軌跡としても実現できます。ある線分 CD の長さを距離の和とみなし、線分 CD 上の点 E によって分割される線

^{*3} 別の動的幾何学ソフトウェア KSEG は線分上の任意の点を描画点とすることができます。

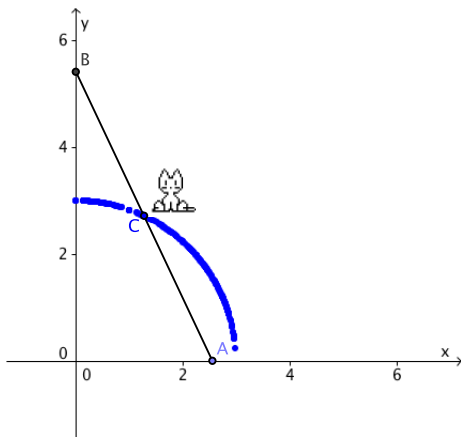


図6 猫点が描いた円

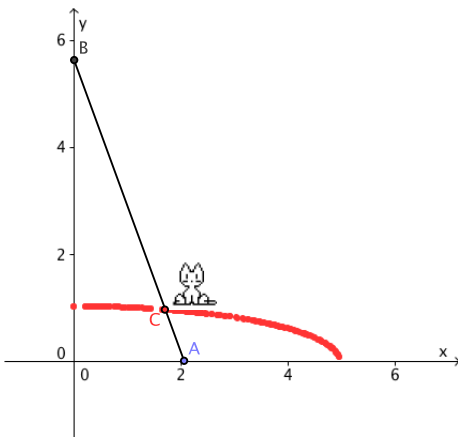


図7 猫点が描いた楕円

分、それぞれの長さを半径とする2円を考えます．点Eを駆動点，2円の交点を描画点として「軌跡」を用いて楕円を描いたのが図9です．時間があれば，参加者の方にはゆっくりと作図方法を考えてほしいところでしたが，まずは操作方法に習熟して欲しいと考え，ここでは作成方法の紹介にとどめました．2点からの距離の差や積，商が一定な点の軌跡も同様に考えることができますが，どのような手順で作図すれば良いかを考えるというのも面白い問題です．

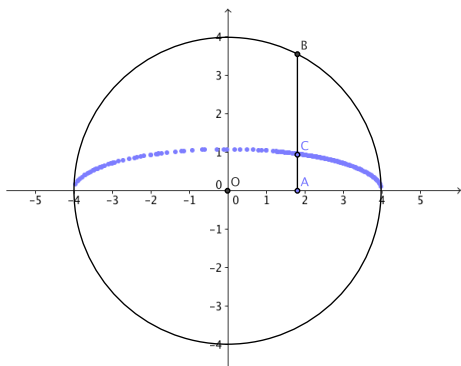


図8 円をy軸方向に縮小

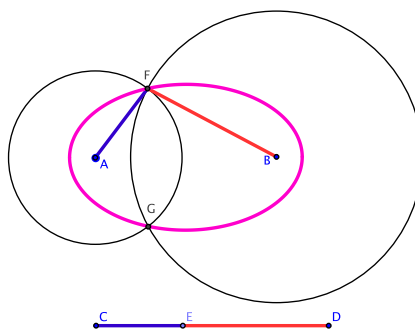


図9 2点からの距離の和が一定

楕円の次は放物線です．GeoGebraは表計算機能も備えており，表のデータを元に点のリストを作成することもできます．点のリストを利用した関数のグラフ，幾何学的な構成等についても予定していましたが，時間の関係もあり，この部分については省かざるを得ませんでした．

5 平均変化率と微分係数，接触円

中学生の参加者もいるため，取り上げる題材については非常に迷いましたが，結局，放物線を題材に微分法の導入を行いました．スライダーは，パラメータの範囲を自由に指定することができるため，ここでは，極限の概念を可視化するのに用いました．

例えば，函数 $f(x) = x^2$ のグラフ上の点 $A = (a, f(a))$ における平均変化率を考えます．極限の概念をスラ

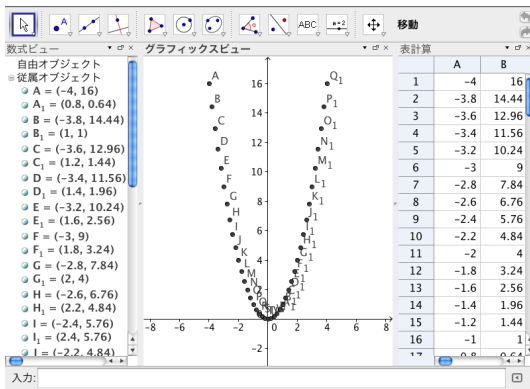


図 10 表による点リストの作成

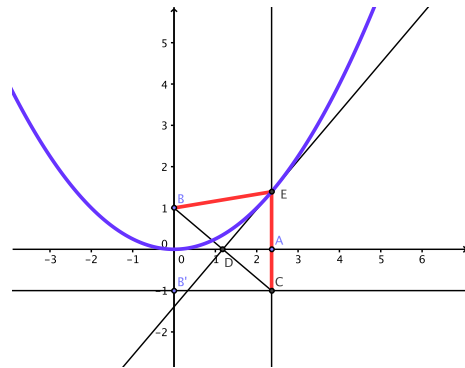


図 11 焦点と準線からの距離が等しい点の軌跡

イダーで実現することを目指します。以下に手順を示します。

1. 入力欄に $f(x) = x^2$ を入力してグラフを描画します。
2. 範囲 $[-5, 5]$ ，増分 0.1 のスライダー a を作成します。
3. 入力欄に $(a, f(a))$ を入力して，グラフ上の点 A を作成します。
4. 点 A は，スライダーの値に応じて動かすことができます。
5. 範囲 $[0.01, 1]$ ，増分 0.01 のスライダー h を作成します。
6. 入力欄に $B = (a + h, f(a))$ を入力します。
7. 入力欄に $C = (a + h, f(a + h))$ を入力します。
8. 直線 AC を作成すると AC の傾きが平均変化率となります。

スライダー h の値を 0 に近づけることで，微分係数を実感してもらえたのではないのでしょうか。また，スライダー a を動かし，点 A を動かすことで，導関数を意識させることもできます。

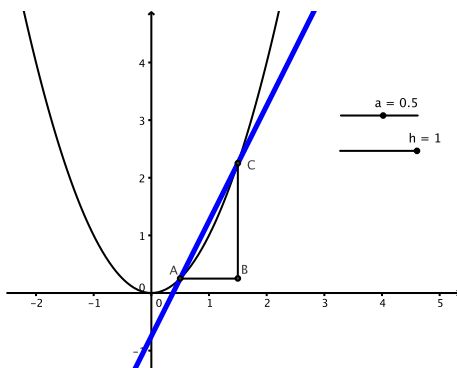


図 12 平均変化率

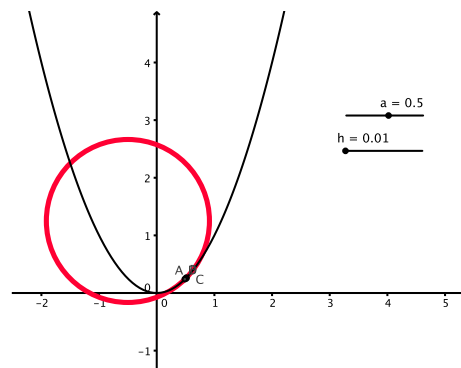


図 13 接触円

微分係数は，曲線における各点の動く方向を表す量と考えることができますが，次に曲線の曲がり具合について紹介しました。3点 $A = (a, f(a))$ ， $C = (a + h, f(a + h))$ ， $D = (a - h, f(a - h))$ を考えます。3点を通る円，すなわち三角形 ACD の外接円を描き， $h \rightarrow 0$ を考えることで接触円を描画することができます。

GeoGebra には 3 点を通る円を描く命令も用意されているため、比較的簡単に作図可能です。^{*4}接触円の半径 r の逆数 $1/r$ をとれば、それが曲線の曲がり具合、すなわち曲率をあらわしています。スライダー a を動かすことで、各点の曲率が変化する様子を確認できます。

6 アステロイドとスピログラフ

GeoGebra を用いたスピログラフの作成も紹介しました。スピログラフは Denys Fisher によって発明された玩具で、現在はアメリカの玩具メーカー Hasbro によって商標登録されています。平成 21 年度の夏学では、上智大学の角皆宏先生による「作図から始まる発見体験」が行われました。この時は KSEG という動的幾何学ソフトウェアを用いてスピログラフを紹介しています。[10]

スピログラフの仕組みを考える前に、まずは、もう少し単純なアステロイドを作成しました。定円 c の中を動円 d が滑らずに転がったとき、動円 d の円周上の点の軌跡を一般にハイポサイクロイド（内擺線）と呼びます。円 c, d の半径を r_c, r_d とおき、これらが $r_c : r_d = 4 : 1$ という関係を満たすとき、アステロイド（星芒形）と呼びます。GeoGebra では、変換ツールの「角度を指定して点の回りにオブジェクトを回転」を使うことで、ハイポサイクロイドや、アステロイドを作図することができます。

例えば、図 14 において、アステロイドを作図する手順を簡単に示します。

1. 点 $A = (0, 0)$ を中心に点 $B = (4, 0)$ を通る定円 c を描きます。
2. 範囲 $[0, 2\pi]$, 増分 0.1 のスライダー t を作成します。
3. 変換ツールの「角度を指定して点の回りにオブジェクトを回転」を指定します。
4. 点 B , 点 A の順序でマウスで指定し、角度 t を逆時計回りに与えて点 B' を作成します。
5. 点 $C = (3, 0)$ を作成し、同様に回転させて C' を作成します。
6. 点 C' を中心に点 B' を通る動円 d を作成します。
7. 角度 $4t$ を指定して点 C' の回りに B' を時計回りに回転させて点 B'' を作成します。
8. 特別な直線ツールの「軌跡」を選択し、スライダー t と点 B'' を指定します。

以上で、アステロイド曲線が描かれます。

定円 c の円弧 BB' と動円 d の円弧 $B'B''$ の長さが等しくなるように点 B'' を作図しているだけですが、スライダー t を右クリックしてアニメーション機能を動作させると滑らずに転がっているように見えます。

動円 d が滑らずに転がるということは、思いのほか、参加者には理解しにくい概念のようで、うまく伝えることに苦労しました。本来であれば、アステロイドを描いた後にハイポサイクロイド、スピログラフと進みたかったのであるが、決められた時間を過ぎてしまい、実習を行うにまでにはいたりませんでした。

積分や微分方程式の概念を紹介する時間があれば、クロソイドなど実用上も重要な曲線等を紹介したかったのですが、さすがに無理でした。GeoGebra には、与えられた常微分方程式に対して数値計算を行い、積分曲線を描く命令 `SolveODE[]` が用意されています。積分曲線は GeoGebra の「軌跡」として作図されており、「軌跡」の実体は点のリストです。命令 `First[]` を用いることで「軌跡」をリストに変換できます。また、得られたリストに対し任意の要素を取り出す命令 `Element[]` を用いることで、図 17, 18 を作成することができます。[8] 詳しくは MathLibre の Wiki ページ [4] や GeoGebraTube [9] に公開されているファイルを参照してください。

^{*4} GeoGebra は様々な命令が用意されており大変便利なツールですが、利用者がブラックボックスとして作図をしがちであり、そこが、教育ツールとしては悩ましい点でもあります。

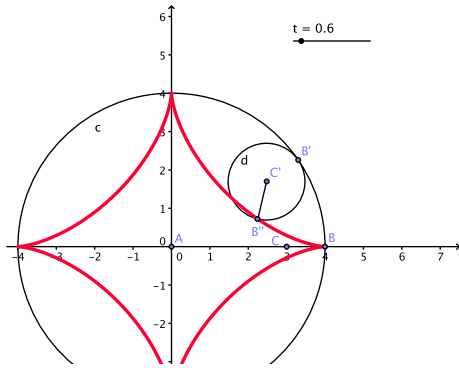


図 14 アステロイド (星芒形)

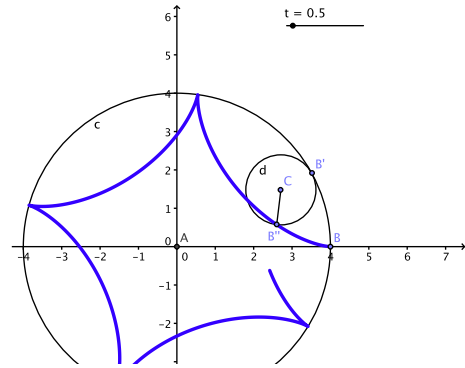


図 15 ハイポサイクロイド (内擺線)

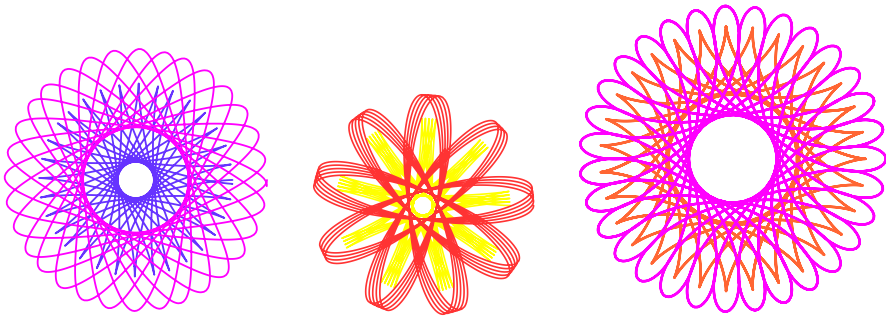


図 16 スピログラフによる曲線の描画

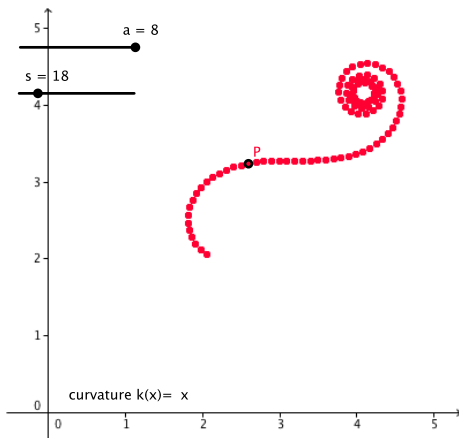


図 17 曲率 $k(s) = s$

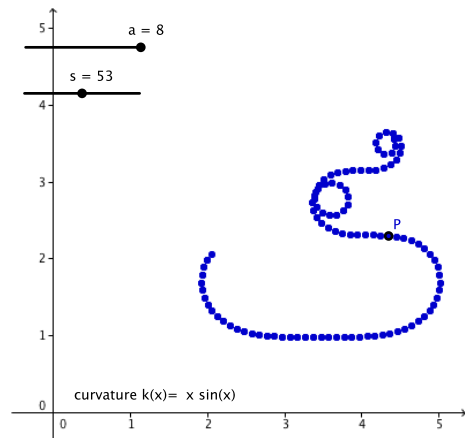


図 18 曲率 $k(s) = s \sin(s)$

7 夏学を終えて

今回、中学校3年生ぐらいを対象に考えたことは正解だったのではないかと考えています。一方で、実習時間をたっぷりつつもりでしたが、つい、早口になってしまい、もう少しゆとりをもって説明をした方が良かったのではないかと反省しています。

夏学3日間のうち、1日目の夜は天体観測会なども開かれました。この季節はちょうどペルセウス座流星群の活動が活発になります。また、惑星の観測にも良い時期で、望遠鏡や双眼鏡が用意されていました。あいにくと、当日は雲が多かったのが残念です。2日目の夜には、講演、実習の担当者へのインタビューの時間が用意されました。東京大学の柏原賢二先生、愛知工業大学の大島和幸先生、清水理佳先生、清水先生の実習のお手伝いをされたお茶の水女子大学の大山口菜都美さん、私の5人で対応いたしました。中学生や高校生が将来について真剣に考えている様子は、大変新鮮であり、初心に帰る良い機会をいただけたと思っています。一方で、数学に苦手意識を持っている方も多く、必要以上に萎縮している様子については考えさせられるものがありました。

事前の準備については柏原先生、日本大学の平田典子先生に大変お世話になりました。謹んで御礼申し上げます。また、当日は日本大学の内田有美さん、石井夕紀子さんの2人に実習のお手伝いをしていただきました。参加者と年齢の近い方々の存在は、とてもありがたく、おかげで実習を円滑に進めることができました。あらためて御礼申し上げます。

参考文献

- [1] 「数学ソフトと歩く曲線の世界」講演資料, <http://prezi.com/user/knxm/>,
- [2] 「直線と曲線ハンディブック」V. ゲーテンマツヘル+ N. B. ヴァシーリエフ著, 蟹江幸博+佐波学訳, 共立出版, 2006.
- [3] “COPYRIGHTS of oneko-2.0”, Nobuyuki Sasaki, <http://www.3bit.co.jp/~sasaki/oneko/COPYRIGHTS>, Aug 9, 1997.
- [4] MathLibre, <http://www.mathlibre.org/wiki/>, 2012.
- [5] JST CREST 神戸スクール, <http://cr.math.sci.osaka-u.ac.jp/~k-nishiyama/gb-school/>, 2012.
- [6] Sage Day 39, 沼田泰英, 横山俊一, <http://www.stat.t.u-tokyo.ac.jp/~numata/html/sage/days/201206/index.ja.html>, 2012.
- [7] 「コンピューターで描く図形の数学。～3D-XplorMath を使ったコンピュータ実習～」, 酒井高司, 数学通信 15 (3), 2010, 13–20, <http://mathsoc.jp/publication/tushin/1503/1503sakai.pdf>.
- [8] “Third Edition, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA”, Alfred Gray, Elsa Abbena, and Simon Salamon, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [9] GeoGebraTube, <http://www.geogebraTube.org/user/profile/id/5287>
- [10] 「作図から始まる発見体験～女子中高生夏の学校 2009 実習記～」, 角皆宏, 数学通信 14 (3), 2009, 6–17, <http://mathsoc.jp/publication/tushin/1403/1403tsunogai.pdf>