流体力学と数学

京都大学数理解析研究所

岡本　久

流体力学には不思議な魅力がある．美しい流れや波は浮世絵のモチーフとして頻繁に取り上げられたし，レオナルド・ダ・ヴィンチのデッサンに多くの流れの絵が含まれていることはよく知られている．これとは別に，誰にも明白に思える流れの現象が一旦数学的に定式化されるととたんに難しい問題になることがあり，これがプロの数学者には魅力となることもあり，一方で初学者を遠ざける原因となることもある．流体中の抵抗（あるいは波の抵抗）の問題や浮力の問題などは機械学ではきわめて重要である．地盤の液状化など，専門家でもよくわかっているとは言えない領域もある．長年数理流体力学の研究に携わったものとして，いくつかの問題を指摘してみたい．

１．序.

我々の日々の生活は流れなくしては語れない．空気の流れがわからないとエアコンの効率は問えない．コーヒーにミルクを入れたとき，攪拌しないと均一には混じらない．雨雲の運動がわからないと天気予報は語れない．地下水の流れを知ることは農業にとって不可欠であろう．また，物流やマネーの流れも広い意味の流れであり，それを科学することは経済学において重要である．本稿では筆者の専門とする非圧縮性流体の流れについて，数学者の立場から思うところを述べてみたい．

そもそも，身の回りには数多くの流れが見られる．右上図のような三角形の液膜は，重力と表面張力だけから説明できるはずであるが，どれだけの流量のときにどれくらいの三角形ができるか，計算しようとすると意外にたいへんである．こうした流れは比較的ゆっくりした流れであり，数値シミュレーションすることも不可能ではない．しかし，世の中には実験はできても数値実験はできそうもない，という現象もある．例えば筆者がハワイで撮影した右図のような波は複雑すぎて数学者が云々できるものではない．

文献[13][15]には様々な流れの写真があり，数学者の想像力をかき立ててくれる．たとえ数学的側面にしか興味のない人でも，一度はこうした写真を眺めていただきたいものである．

＊ 日本数学会年会市民講演会（2013 年 3 月 24 日）

２．流体とは.

そもそも流体とは何であろうか．このことについて一応のコンセンサスがないと議論がかみ合わないので，ここではまずその「定義」をしておこう．流体とは自由に変形のできる連続体である．連続体とは，その微少部分と全体の物理的な性質が変わらないものをいう．標語的に言えば，物質を半分に分けても四分の一に分けても性質の変わらないものである．すべての物質は原子から成り立っているので，二等分を何度も繰り返せばいつかは原子の長さに到達する．したがって連続体というのはあくまで近似的な概念である. 数学者の頭の中にしか存在しないと言っても良い. しかし,物体の中に含まれる原子・分子の数は天文学的なものであるから，水のようなもののマクロな性質を調べるときには連続体であるとして何も問題は起こらない．ミクロな世界では連続体の仮定が成り立たないこともあるから，どういう現象を対象にしているのか，まず始めに限定しておく必要がある．

連続体であるという仮定のもとに，温度，質量密度，圧力，速度，といったマクロな量が定義可能になる．そして，それらを支配する微分方程式が導かれる．こうした事実に最初に気づいたのはオイラーであろう．ニュートンは流体力学を粒子の力学に還元できると信じきっており，連続体を使うことはなかった．かれのプリンキピアの Book II には流体現象の様々な理論が展開されているが，ほとんどすべてが間違いである.「流体の運動を極微の粒子の運動に厳密な意味で帰着させるということは諦めて，連続体であるという近似から出発する」と，いわゆる流体力学になる．言い換えれば，本稿では「粒子の力学原理主義」は放棄するのである．ニュートンが考えたように，基本粒子に関する最小限の仮定のみから出発してすべての流れ現象を演繹する，というプログラムは数学者には魅力的であろうし，未完であるわけだから数学者にはひとつの重要な挑戦である．筆者はこれを重々承知しているけれども，流体力学の具体的な問題を解くためには，これはあまり生産的ではないので，本稿では関知しない．逆に言えば，連続体の仮定はそれだけで十分に実り多いものであり，未解決問題は多いのである．

２．オイラー方程式

次に，オイラーの導いた微分方程式について説明したい．流体の密度 ρ, 速度 $\mathbf{v}$, 圧力 p はそれぞれ，時間 t と空間座標 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$の関数となる．それらは次の微分方程式系に従わねばならない．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \bullet \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

オイラーはここで非圧縮の流体もそうでない流体も区別せずに方程式を導いているから，かなり一般的なものである．しかし，粘性が考慮されていないことには注意するべきである．これはある意味で無理のないことで，粘性の本性について理解した人は当時誰もいなかった．オイラーは 50 歳の頃，ここまでたどり着いたのであるが，同時に，この方程式をきちんと解くことが極めて困難であることにも気づいていた．その後 250 年以上経っているが，数学者の満足行くような解決には至っていない．

３．粘性

オイラーの方程式では粘性が無視されている．これは当初，大きな問題とは見なされなかったようであるが，19 世紀ともなるとその必要性に迫られたようである．1827 年，ナヴィエが流体の基礎方程式であるナヴィエ－ストークス方程式を発表した．非圧縮粘性流体では

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \bullet \nabla)\mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$$

となる．速度ベクトル $\mathbf{v}$ の 2 階導関数が現れてくる．ナヴィエの原論文は

On voit donc en premier lieu que les équations indéfinies du mouvement du fluide deviendront respectivement

$$P - \frac{dp}{dx} = \rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right) - \varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

$$Q - \frac{dp}{dy} = \rho\left(\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}\right) - \varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right),$$

$$R - \frac{dp}{dz} = \rho\left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right) - \varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right).$$

であり，偏微分の記号こそ無いものの，現在の我々が使っているものとほとんど同じであることがわかる．

　さて，ナヴィエの理論はどのようなものであるのか？ ナヴィエはニュートンやラプラスと同じく，最小単位の粒子を多数（しかし離散的に）考える．そしてその相互作用を適当に仮定してナヴィエ－ストークス方程式を導く．分子動力学原理主義者にはたまらない論文であろうが，読んでみても何も納得できないというのが筆者の感想である．実際，彼の論法だと，液体も固体も区別が付きそうにない．固体の弾性体に対するナヴィエの理論は問題なかろうが，全く同じ論法で流れの基礎方程式を出したとしても，結果が正しいだけであって，そのプロセスは正当化できない．

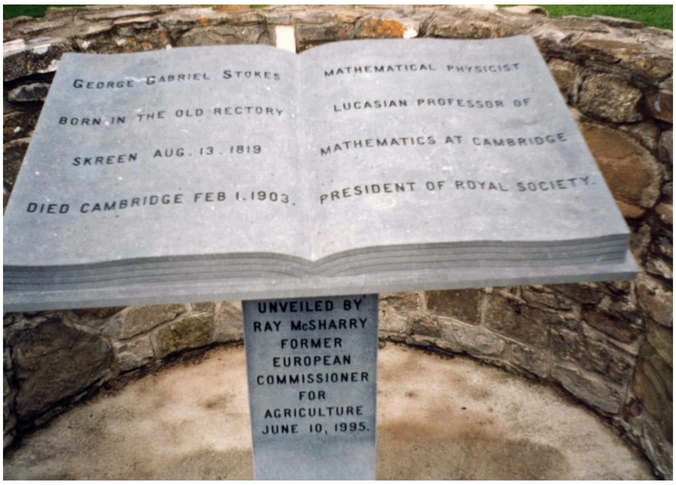
４．ストークス

 ナヴィエの論文を読んだ後でストークスを読むと爽やかな気分になるのは筆者だけではあるまい．ストークスは何を仮定し，何を導くべきかがわかっている．ナヴィエと違って，連続体を使うことに何のためらいもないから，論旨は極めて明快である．こうして，非圧縮粘性流体の基礎方程式が由緒あるものとして定まったのが 1849 年である．というふうに考えるのは現代人である．実際にはナヴィエ－ストークス方程式がどの程度正確に物理現象を再現できるのか，疑問に思う人は多かった．ラムの流体力学の教科書である Hydrodynamics はこの道の定番ということになっているが，この教科書の初版（1879 年）では，ナヴィエ－ストークス方程式に全幅の信頼を置いているようには見えない．実験と比較できるようなデータがまだ出ていなかったのであろう．流れの安定性に関するレイノルズの有名な実験の報告が公表されたのは 1883 年である．この頃まではナヴィエ－ストークス方程式の正当性はそれほどのものではなかったのかもしれない．しかし，理論と実験の両方で研究が進むにつれ，ナヴィエ－ストークス方程式が極めて精度の高い方程式であることが認

識されてきた．

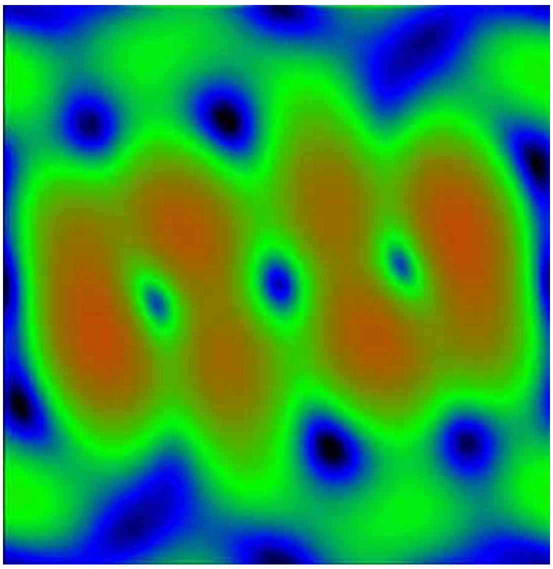
　ストークスは物理学者であるとみなされており，それはそれで間違いではないのだが，数学的な才能もふんだんに持っていた(文献[9])．名だたる数学者に先駆けて関数列の一様収束の概念にほぼ到達していたのは有名な話であるし，水面波に 120 度の角がおき得ることを示した論文など，実にエレガントである．彼のアイルランドの生まれ故郷には彼をたたえて図のような標識が建てられている．この画像は，セント・アンドリュース大学名誉教授の Alex Craik 教授が撮影されたもので，次のように刻まれている：

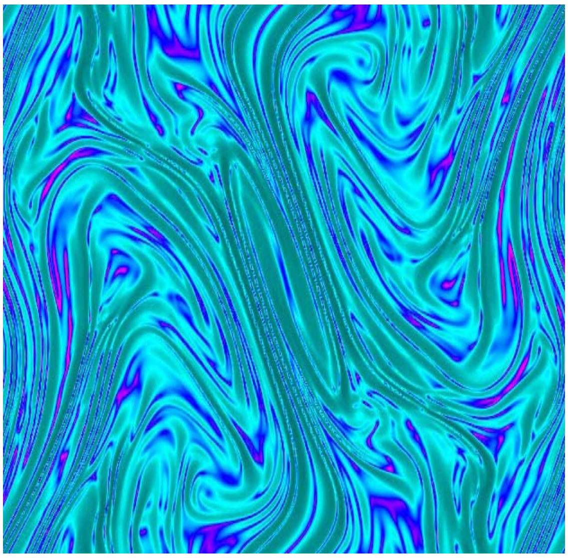
GEORGE GABRIEL STOKES
BORN IN THE OLD RECTORY
SKREEN AUG 13, 1819
DIED CAMBRIDGE FEB 1, 1903.
MATHEMATICAL PHYSICIST
LUCASIAN PROFESSOR OF
MATHEMATICS AT CAMBRIDGE
PRESIDENT OF ROYAL SOCIETY



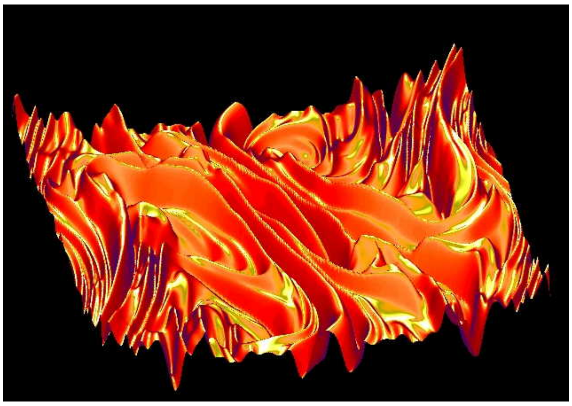
５．渦度

ナヴィエーストークス方程式の解を調べるに当たって，渦度に注目することは重要である． curl $\mathbf{v}$ を渦度と呼び，本稿では $\boldsymbol{\omega}$ で表すことにする．ナヴィエーストークス方程式に境界条件を課し，渦度の初期条件を与えると，解の時間発展が計算できる．下の図は 2 次元の場合のその一例であり，左側のような初期値から出発してある時間後に右のような渦度分布が得られる．いわゆる混合が起きていることが見て取れる．大きな渦が存在しているが，同時に細かい構造も現れている．

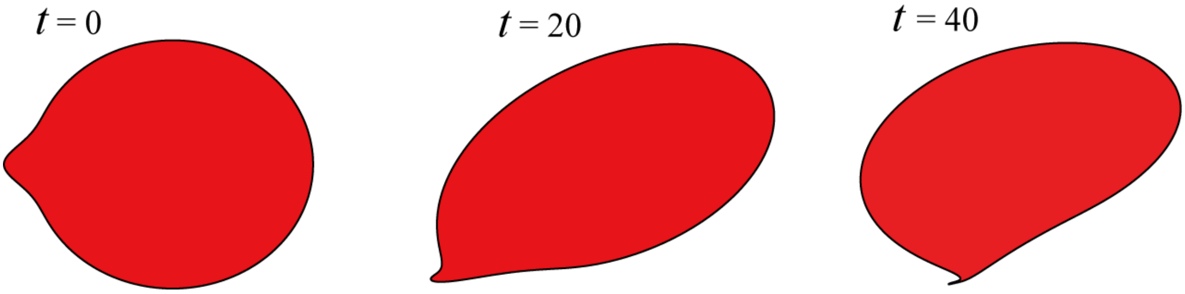




右側の渦度分布を空間（x,y,ω）で描き，斜めから見たものが次の図である．



これからわかるように，渦度分布は連続であるが，鋭く変化している．理論が示しているように，2次元ナヴィエーストークス方程式の解は何回でも微分が可能である．しかし，あたかも C^1 級ではないかのように見える．これが以外に重要である．つまり，数学者の判決は「2次元では解は滑らかであり続ける」であるが，実際には渦度の2階導関数のノルムは，有限ではあっても極めて大きいという実験的事実がある．あまり巨大になればそれは不連続関数と見た目には変わらないのである．実験や観測にひっかからないくらい大きくなったら，実験的には∞になっているということも可能である．数学を応用する際にはこうした解釈の問題に気をつける必要がある．



もう一つの例でこのことを示してみよう．いわゆる「渦斑」というものがある．これは2次元オイラー方程式の弱解のひとつで，ある領域で渦度が1，それ以外の領域で0となるものである．この領域の境目は閉曲線になるが，それが時間とともにどう変化するかが問題となる．これをオイラー方程式にしたがって解いてみる．上の図に見える領域が渦度1の領域であり，その外側では渦度はゼロである．最初の小さな（しかし滑らかな）出っ張りが，時間とともにとがり始めるように見える．実際，こうした数値実験が報告された当初，これを「有限時間で境界の曲線が滑らかさを失う」というふうに解釈した人々がいた．だが，しばらくしてこの曲線がすべての時間にわたって $0<t<\infty$ 滑らかであることが証明された．こうした現象，すなわち，滑らかであるにもかかわらず特異点であるかのごとく振る舞う点のことを擬特異点と名付けてみた(文献[4])．これが数学的に厳密に定義できるものでは無いが，流体力学を数学と他分野で共同に研究する場合には役立つ概念であろうと信ずる．そもそも乱流も数学的な定義にはなじまない概念であるが，その重要性はいまさら強調するまでもあるまい．オイラー方程式にはこのほかにも渦層や水面波などおもしろい現象が多々存在するのであるが，専門的になりすぎるように思うので，あとは文献に譲りたい．

6．ミレニアム問題

ナヴィエーストークス方程式を有名にしている理由は多々あれど，数学者にとって重要なのは3

次元の場合に，滑らかな初期値から出発して，いつか有限時間内に何らかの特異点が発生するかどうか，という問題であろう．ルレイの残したこの問題は有名であり，難しいことで悪名高い．1991年，私がまだ若かった頃，現在名古屋大学にいる木村芳文氏に誘われてニューメキシコ州のロスアラモス研究所に行ったときのことである．「ルレイの弱解は初期値を与えたときにただ一つしかない」事を『証明した』と称する講演に出くわした．これは，特異点のある無しの問題を回避しながら，ルレイの未解決問題を一部解決したことになり，極めてセンセーショナルなことである．この発表の共著者の一人である〇〇はベテランの数学者であり，信じるに足るように思えた．私はこれを聞いて友人や師匠の藤田宏先生などに大急ぎで連絡をとったことを昨日のことのように覚えている．しかし，その後，その『証明』には致命的な欠陥があることがわかった．藤田先生曰く「〇〇も年寄りの冷や水はやめておけばいいんですよ.」この言葉は今でも耳に焼き付いているので，この歳になるとミレニアム問題に挑戦しようという気は萎えてくるのである．1998 年，ベルリンのコングレス(ICM)でも「解けた」という報告が一般講演にあったが，その後どうなったかは聞いていない．当時誰も信用していなかった事だけは事実であろう．

いずれにせよ，難しい問題であることは間違いない．これに挑戦できるほど若くはないと思うとき，寂しさを感じるこの頃である．ミレニアム問題については文献を参考にしていただきたい．特に，[8]の中にある小薗英雄氏の解説と[3]を引用させていただく．

７．流体力学と数学

筆者は学生の頃から流体力学に魅了されてきた．今井先生の教科書[1]はよくできた教科書である．今井先生が書かれた流体に関するエッセイが長編シリーズ[2]に数多くあることは知る人ぞ知る．今井先生は多くのお弟子さんを育てられたので，日本の理論流体力学はきわめてレベルが高い．私は今井先生のお弟子さんや孫弟子さんから多大の影響を受けてきた．若い頃でも今でも共通する思いは，「流体力学を理論的に研究するときには，数学も物理も数値計算も重要性に差はない.」という信念である．

1991 年にロスアラモスへ行ったとき，著名な物理学者の DC 氏と立ち話をすることができた．そのときに「私は流体力学について研究している．今後は乱流についても研究したい.」というようなことを述べたところ，彼の反応は私の予想外であった．確か，このような感じのアドバイスをもらったのであったと思う．「やめとけ．乱流は悪い問題だ(Turbulence is a bad problem.)．ものすごいエネルギーを費やしてもあまりはかばかしい結果は出てこない.」 ある別の人の言い方はこうであった：「乱流は悪女のようなものだ．魅力的だし，最初は笑顔を振り向けてくれるが，あるとき急に冷たくなって，どれだけ貢いでみても戻ってこない」．こうした「乱流＝悪女」説はそれ以後も聞いたような気がする．数年してから A. Chorin 氏が京都大学に来たときに，彼の乱流の講義を聴いた後，DC 氏の話をした．Chorin 氏は「DC は正しい．私も同じアドバイスをしたかもしれない.」これで私の進路は決まったようなものである．乱流についてはおっかなびっくりでついて行くのではあるが，全身全霊を捧げることにはならなかった．

数理流体力学を専門にする人は問題の選択が重要であろうと思う．あまり難しすぎる問題を選ぶと論文は書けない．しかし，物理学的に見て意味のない論文は数学であっても数理流体力学ではない．どのあたりで妥協するかが思案のしどころである．

参考文献

[1] 今井　功，流体力学，岩波書店（1970).

[2] ロゲルギスト，物理の散歩道，岩波書店.

[3] 数学七つの未解決問題，森北出版（2002).

[4] 岡本　久，ナヴィエーストークス方程式の数理，東京大学出版会（2009).

[5] 岡本　久，ナヴィエ-ストークス方程式の導き方，「数理科学」，2010 年 11 月号，71--77.

[6] 岡本　久，ある応用数学者の弁明，数学の道しるべ，サイエンス社（2011), 112--121.

[7] 岡本　久，流体力学の厳密解，「数理科学」2012 年 11 月号.

[8] 特集ナヴィエーストークス方程式，数学セミナー2010 年 2 月号.

[9] A. D. D. Craik, Mr Hopkins' Men, Springer (2007).

[10] J. S. Calero, The Genesis of Fluid Mechanics, 1640-1780, Springer (2008).

[11] O. Darrigol, World of Flow, Oxford Univ. Press (2005).

[12] H. Okamoto and M. Shōji, The Mathematical Theory of Bifurcation of Permanent Progressive Water-Waves, World Scientific (2001) .

[13] M. Samimy 他（ed.), A Gallery of Fluid Motion, Camb. Univ. Press (2003).

[14] G. A. Tokaty, A History and Philosophy of Fluid Mechanics, Dover Publ. (1994).

[15] M. van Dyke (ed.),　An Album of Fluid Motion, Parabolic Press (1982).

[16] T. von Karman, Aerodynamics, Cornell Univ. Press (1954).