

## 第 19 回藤岡おもしろ数学教室

# 数学活用—もっと自由に考える

横浜国立大学大学院環境情報研究院・教授

根上生也

みなさんは、表題にある「数学活用」をご存知でしょうか。これは「ゆとり教育」の反省のもとに作られた現行の学習指導要領の高校数学に登場した新教科です。受験指導に陥りがちな高校数学に新しい風を吹かすために設置されました。公式な設置の趣旨については学習指導要領を参照してもらおうとして、私の言葉でいうと、「数学活用」の目的は、「数学が人とともにあり、世の中で役に立っていることを知る」です。数学という教科には得意・不得意があるでしょう。しかし、人間にはもともと数学的に物事を理解し、判断する力がある。そういう「人とともにある数学」を高校生に知ってほしい。そういう私の数学観を広めるために、私は自ら編集委員長を務めて、『数学活用』の教科書を作りました。

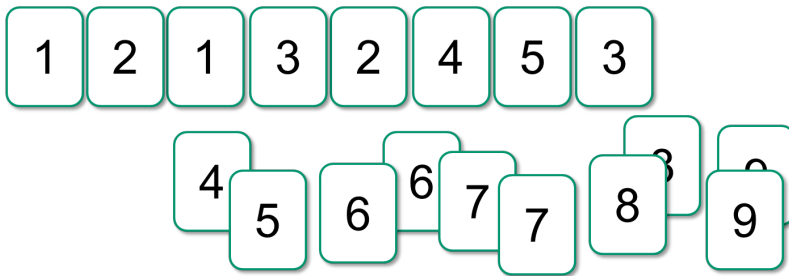
数学の先生の中にはその内容に批判的な方もいるかもしれませんが、上で述べた精神を広めるために、機会があるたびに「数学活用」について講演をさせてもらっています。今回の「藤岡おもしろ数学教室」（藤岡市教育委員会主催，日本数学会，関孝和顕彰会後援）もその1つです。「数学活用」自体は高校生のために教科ですが，中学生でも十分に楽しむことのできる題材がたくさんあります。特に，今回中学生に体験してもらった「もっと自由に考える」という単元は，学年にはよらず楽しめるものでした。

平成 26 年 10 月 3 日（金）の午後，藤岡市立東中学校体育館には，495 名の中学生が 3 人一組で机を囲んで集まっていました。その壁際には，藤岡市教育委員会の方や同行していただいた日本数学会理事の梅原雅顕先生，事務長の張良さんが陣取っていました。そして，私はステージの上から，開口一番，大きな声で「こんにちは〜！」と叫びます。それに応えて，中学生たちも大きな声で「こんにちは〜！」と返してくれました。こういう儀式を経ることで，これから始まることに対して心を開く準備をしてもらうわけです。それに続けて，自己紹介をこっそりとして，「この先生の話は笑いながら聞けばいいんだ」という雰囲気を作っていきます。

そして，ようやく本題に入ります。中学生が囲んでいる机の上にはトランプが用意されています。告知のポスターにもトランプの絵が描かれているし，「パズルが数学に変わる瞬間を体験しよう」というメッセージも添えられていることだし，きっと誰もがそのトランプを使って何か楽しいことをするのだろうと期待していたでしょう。

そこで、「みんなで次の問題を考えてみよう」と投げかけます。

**問題** 1 から 9 までの番号が書かれたカードが 2 枚ずつあります。  
同じ番号のカードの間には、その番号が示す枚数のカードがあるように、  
すべてを横 1 列に並べられるでしょうか。



とはいえ、さらっとこの問題文を読んだだけでは、何をしろと言われているのかわからない。なので、問題文を噛み砕いて解説します。要するに、1 と 1 の間には 1 枚、2 と 2 の間には 2 枚、3 と 3 の間には 3 枚というように、1 から 9 までの番号の書かれたカードを並べられるかという問題です。確かにパズルのような問題ですね。

いきなりこの問題にチャレンジしても難しいので、小さい場合で試してもらいました。1 が 2 枚あるだけでは何もできません。1 と 2 のカードだけだと、2 と 2 の間には 1 が 2 枚入ることになりますが、やはりその 1 と 1 の間に何も入れられません。では、1 から 3 までのカードだったらできるでしょうか。頭の中だけで考えていてもつまらないので、手元にあるトランプを利用して、このパズルにチャレンジしてもらいました。

どのチームも喜んでこの問題に取り組んでいました。そして、うまく並べられると、歓声が上がります。「それなら、4 までのカードでやってみよう」と促します。4 までだとそう簡単には答えが見つからず、どんどんのめり込んでいきます。そして、答えが見つかる、さらに大きな歓声が。

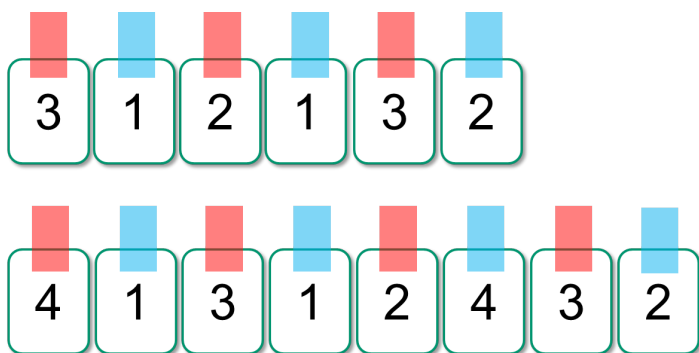
さらに 5 までのカードでチャレンジしてもらおうわけですが、今度はなかなか答えが見つからない。実は、5 までのカードでは、条件どおりに並べることができないのです。それを隠したままチャレンジしてもらい、時間調整。どのチームも少なくとも 4 までのカードで答えを発見して、一度は成功を喜んでもらうわけです。

その状態が実現したところで終了を宣言するのですが、どのチームもチャレンジを止めようとしません。そこで、「実は、5 までのカードだとできないんだよ」と告白します。そして、どうしてできないかを考えてみようと呼びかけます。

最初は、いろいろな場合を考えて論理的に考察します。途中でいわゆる「鳩の巣原理」

のことに触れながら、5 までのカードではできないという感触をつかんでもらいます。しかし、こういう議論を続けても、めんどくさいだけです。

そこで、登場するのが「魔法の付箋紙」です。3 までの場合、4 までの場合の答えを作ってもらって、そこに赤と青の付箋紙を交互に貼ってもらいます。さて、その状態を見て、何がわかるでしょうか。



少人数のクラスならば生徒たちから意見を募るところですが、500 人近くの生徒がいるので、私が誘導していきます。とりあえず、わかることを口にしてみましょう。3 までの場合、3 は赤と赤、1 は青と青、2 は赤と青になっていますね。4 までの場合は、赤と青の 4 が追加されています。この事実を一步進めて抽象的に述べてみると、「奇数は同じ色、偶数は異なる色」と言えます。そして、うまく言葉で理由を説明できないまでも、なぜそうなるのかは誰もが理解できるはずです。

この「奇数は同じ色、偶数は異なる色」という法則は、何番までのカードかには関係なく成り立つ事実です。それならば、それを 5 までのカードの場合に適用してみましょう。仮に、5 までのカードが条件どおりに並べられたとします。そこに魔法の付箋紙を貼っていくと、赤が 5 枚、青が 5 枚。特に、偶数の 2 と 4 にはそれぞれ赤と青が貼られます。つまり、2 と 4 のために赤と青が 2 枚ずつ使われるので、奇数の 1 と 3 と 5 には残りの赤 3 枚、青 3 枚が使われることとなります。しかし、奇数には同じ色を 2 枚ずつ使わなければいけないのに、赤も青も奇数枚だから、それができない。ということは、5 までのカードを条件どおりには並べられないこととなります。

これと同じことを 9 までのカードの場合で考えてみましょう。9 までのカードが条件どおりに並べられたとすると、赤 9 枚、青 9 枚の付箋紙が貼られることとなります。そして、偶数の 2 と 4 と 6 と 8 のために 4 枚ずつが使われ、残りの赤 5 枚、青 5 枚が奇数の 1, 3, 5, 7, 9 に使われます。しかし、奇数枚を 2 枚ずつ分けることはできません。したがって、9 までのカードを条件どおりには並べられないことがわかりました。ちなみに、残りの赤、

または青の枚数は、そこに並んでいる奇数の個数と一致しています。

最初の問題で「並べられるでしょうか」と言っておきながら、「できない」が答えではずると思った生徒もいたかもしれませんが、その理由がわかったのはうれしかったはずで、これでパズルが数学に変わりました。

さらに、わかったことを一般化すると、「奇数が奇数個だと、できない」ということになります。その対偶を考えれば、「できるならば、奇数は偶数個」ということになります。高校生を相手に話すときは、この辺の論理構造をきちんと理解してもらうように述べるのですが、今回は中学生相手なので、あまり深入りしませんでした。そして、7までの場合、8までの場合はどうなるのだろうねと、興味をそそり、答えをチラ見させてあげました。

ちなみに、トランプを使って実験してみると、カードの番号が13までなら、その番号までの奇数が偶数個であることが、カードを条件どおりに並べることができるための必要十分条件になることが確認できます。別の機会に私の講演を聞いたある高校の先生によると、コンピュータを使って、20まででもそれが成り立つことを確認できたそうです。また、その並べ方も一般には1通りではないそうです。この事実が一般的に成り立つかどうかは私も知りません。もしそれを証明できたという方がおられたら、ご一報を。

会場には、現場の先生や教育委員会の方もいたので、こういう活動をするこのよさについても話しました。端的にいうと、この活動を通して、生徒たちに感じてもらいたかったことは、「論証することのよさ」です。もちろん、数学において論証を大切にすることは当然ですが、この活動では次のようなことが実践されました。

- 論証すべき命題を探す活動をする。
- 根拠となる原理を探す活動をする。
- 必ずしも、使える根拠は明示されていない。

当初の問題はパズルのようで、何々を証明しなさいというものではありませんでした。しかし、問題にチャレンジするうちに、「奇数が奇数個だったら、できない」と事実を理解したいと思うようになりました。これが論証すべき命題です。そして、魔法の付箋紙を貼ってわかることを挙げていくことで、論証の原理となる根拠を探求しました。しかし、そういう根拠を使っていけないとは、問題文には書かれていません。

論証を指導するには初等幾何が一番よいという人がいますが、通常、初等幾何の問題では使ってよい前提が問題文の中に明示されています。しかし、日常的に直面する問題に対しては、何を前提にすればよいかなど誰も教えてくれません。それを自分で探さなければいけない。そうならば、子どもたちに前提となる根拠を探求するような経験をしてもらってもよいのではないか。「離散数学」はそういう題材をたくさん提供します。

高校までの数学の中では、離散数学は強調されていませんが、現行のカリキュラムの中には離散数学を感じさせるものがこっそりと入っています。それは「数学A」の中の「整数の性質」です。整数自体が内包している性質を暗黙の前提として、整除性などを根拠に言葉による論証をしようという意図が込められていると思います。実際の教科書では、ユークリッドの互除法ばかりが扱われているようですが、本当はその単位では、離散数学でよく使われる「鳩の巣原理」を指導することになっているのです。

鳩の巣原理とは「鳩が10羽いるのに、巣が9個しかないと、どこかの巣には2羽の鳩が入る」ということです。そんな当たり前のことなど、誰でもわかる。しかし、次のような問題をいきなり突きつけられたら、即答できるかどうかは怪しいでしょう。

- 必ず同じマークが出るようにするには、トランプを何枚引くか？
- 誕生月が同じ人がいるように人を集めるとしたら、何人呼んでくればよいか？
- 48人も人がいれば、出身都道府県が同じ人がいる。

もちろん、きちんと考えれば、いずれも簡単に理解できることです。たとえば、最後の命題では、日本の都道府県が47しかないことが根拠となっています。

こういう話をしたうえで、「人間の髪の毛は10万本程度だそうです」と言ってみる。そして、「それを知って、私は次のことがわかったよ」と言う。

- 地球上には髪の毛の本数がぴったり同じ人たちがいる。

しかも、7万人くらいの人髪の毛の本数が一致する。はじめは変なことを言うなと思っ  
ていても、鳩の巣原理の話の流れを理解している子は、「そうか」とうなずきます。

要するに、この鳩の巣原理の話を通じて、自分自身で知識が生み出せるのだということに気づいてもらいたい。カードを並べる活動でも、単に理屈を解説するのではなくて、みんな知識を生み出すように誘導していきました。

とにかく、大人たちは知識を獲得することの大切さを強調します。もちろん、それ自体が間違っているわけではありませんが、誰もが知識を生み出す知恵を持っていることに気づいてほしい。そういう自覚を促して、私の話を閉じました。

私の講演では、数学の最先端の話題を紹介したわけではありません。しかし、子どもたちの数学をしたいという気持ちを引き出すことができたと思います。実際、その後に送られてきた子どもたちの感想文の中には、「数学のイメージが変わった」、「数学は嫌いだったけれど、もっと数学をやってみたいと思った」という意見がたくさん書かれていました。