

# デカルト、フェルマー、パスカルの 数学（思想）を比較する

足立恒雄（早稲田大学）

## 1 要約

### 1.1 デカルト (René Descartes, 1596 - 1650)

1. デカルトの数学は構想のスケールが大きいのが特徴である。デカルトの哲学は数学をモデルにしている。しかし、自らを数学者と呼ばれることは、パスカル同様、拒否した。何であれ、専門家というものはあまり高く評価されない時代だったのである。自らを恃む所が大で、フェルマーに対する態度などを観ても、やや自信過剰気味だが、実際にはいわゆる数学的才能や論理的緻密性という点ではフェルマー、パスカルに劣る。
2. 「第一原理を置き、単純な推論を重ねて行けば、どんな難しい命題でも必ず証明できる。そして証明できない命題は一切信用しない」という（教条的合理主義とでも名付けられる）思想に見るように、デカルトは「全学問の数学化」を目指したと言える。物理的法則もすべて数学から導けるというデカルトの主張がフェルマーによって批判され、二人の間で論争が持ち上がったこともある。この事件がきっかけでフェルマーは西欧の知識人の世界で知られるようになった。
3. 厳密とされた幾何学に依るアラビア渡りの「怪しげな」代数学の厳密化の試みと、(面積、体積などの)量の体系の1元化はデカルトの重要な業績である。しかし、デカルトの場合でも、数を線分としてだけ捉えているため、数体系が幾何学から完全に独立しているとは言えない。おそらく、幾何学と無関係に数体系を最初に扱ったのはニュートンであろう。
4. デカルトが解析幾何を創始したというのは物事を簡単に捉えすぎていて、事実とは言えない。デカルトは、解析幾何の基本である、座標軸の設定も、座標変換も、与えられた2変数の方程式がどうい曲線を表すかも、一切扱っていない。 $x, y$ の任意に与えられた2次方程式が円錐曲線を表わすことは、一部はフェルマーによって示され、最終的にはヤン・デ・ヴィット(1623—1672)によって証明された(カツ『数学の歴史』, 第11章第1節参照)。われわれは先に固定された座標系を考えるけれども、当時は図形が先にあり、それに応じて横軸が採用される。固定された縦軸が登場するのはオイラーを待たねばならない。
5. たとえば、 $x^3, x^4, \dots$ などの記号法の刷新は革命的と言えよう。記号史上、デカルトに比肩できるのはライプニッツ位である。

### 1.2 フェルマー (Pierre de Fermat, 1607 - 1665)

1. フェルマーには数学や証明を巡る思想や哲学を述べた著作はない。フェルマーは、問題を解くという数学的能力においては、三人の中で一番上であり、当時「ヨーロッパ第一の幾何学者」(パスカルの言)と見られていた。デカルト、パスカルと違って、生涯数学に打込んだという意味では、「アマチュアの王者」という呼称は誤っている。

2. フェルマーの使った記号はヴィエト (F. Viete, 1540—1603) の流儀に従い、伝統的である。記号に対する興味はなかったようである。
3. フェルマーはアポロニウスなどのギリシア古典の創造的復元から数学に入り、解析幾何を導入した。与えられた2変数の方程式に曲線が対応することはフェルマーが指摘したことである。

いわゆるデカルト座標系はエウクレイデス的な意味における「量」を理想的に表現したという意味もあるが、デカルトはそれを完成したのではなく、それを超越したのである。デカルトの同時代人フェルマーが（座標系を使うという意味での）最後の模範的代表者であった。（シュペンゲラー『西洋の没落』より。解析幾何の歴史については足立恒雄『数学から社会へ+社会から数学へ』参照。）

4. フェルマーは整数論と有理点論の双方に貢献した。整数論は数のパズル、あるいは数秘術の形では存在したが、系統立って研究されたことはほとんどなかった。17世紀は微積分学が出現する直前の時代で、自然数を扱う数学は幼稚と見られていた。整数論の面白さをイギリスの数学者たちに向かって力説したフェルマーは近代整数論の祖と言えるだろう。だがその死後オイラーが登場するまでの70年間整数論は再び眠りに就いた。
5. フェルマーはディオファントスの『算術』を読み、そこで扱われている2次不定方程式の有理数解（幾何学的に観れば、2次曲線の有理点）の問題を3次、4次の不定方程式の有理数解（幾何学的に観れば、楕円曲線上の有理点）の問題に発展させた。そういう意味で、フェルマーは楕円曲線論の祖でもある。ただし、後年のオイラーもそうだが、問題を幾何学的に扱ったわけではない。
6. フェルマーの大定理

これに反し、立方を二つの立方に、平方平方を二つの平方平方に分かつこと、一般に、平方より大きい任意の冪を二つの同名のものに分かつことはできない。そのことの真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを記すには狭すぎる。（『欄外書込み』第2：足立恒雄『フェルマーを読む』、『フェルマーの大定理 - 整数論の源流』参照）

### 1.3 パスカル (Blaise Pascal, 1623 - 1662)

1. すべての用語を直接定義し、すべての命題を証明するという方法は不可能なので、「自然の光に照らして」明白な事柄しか仮設しないという方法が人間に許された最善の学問体系であるという認識を示した。「時間」や「存在」などのように、それ以上は簡単な言葉で説明しようのない始原的概念を「無定義用語」として捉えようという思想はパスカルに始まる。これは現代的公理主義の魁と評価される。しかしエウクレイデス『ストイケイア』も、実態としては、そういう構造になっている。
2. パスカルは「幾何学的精神」と「繊細な精神」を区別した。「幾何学的精神」という言葉で表した。また論理だけで全てを説明しきることはできない世界があって、これを探究するのは「繊細な精神」であるとした。繊細な精神を有しない「幾何学者でしかない幾何学者」というのはデカルトを（少なくともその一人として）念頭に置いているのではなからうか。

幾何学者は繊細な事柄までも幾何学的に取り扱おうとする。そしてまず定義から、次いで原理から始めようとして、人の物笑いになる。(『パンセ』より)

3. 数学的帰納法を定式化したのはパスカルの功績である。(ただしフェルマーの言う「私の方法」、すなわち「無限降下法」も数学的帰納法と同値である。) こうした業績から観られるように、論証の明晰さはパスカルの特徴である。ただ記号法にはまったく関心がなかったようで、この精神構造はニュートンに似ている。
4. パスカルは「神秘六角形の定理」を、円の場合に証明し、射影によって任意の円錐曲線の場合に拡張するという方法で証明した。
5. フェルマー同様、求積や確率論の魁の業績もあるが、これらについては本講演では割愛する。パスカルの定理を使うと、接弦法により楕円曲線に加法構造が入れられることが証明できる。結果から観れば、フェルマーが始めた楕円曲線論にパスカルが大きな貢献をしたことになり、奇しき縁と言えるのではなからうか？

## 2 デカルト

### 2.1 『方法序説』

デカルトが『方法序説』において学問の方法としていることは以下のように要約される。数学から受けた影響の大きさが看取される：

1. 一番単純で、一番認識しやすい命題を「第一原理」(一種の公理)とする。
2. どんなに難しい、遠い命題でも、単純な易しい推論を重ねて行けば、必ず到達できる。
3. 証明できない命題は一切信用しない。

しかしながら、「自分が存在する」という事実だけを第一原理にして一切合財を説明できるというのは大ざっぱ過ぎるのではないだろうか？ またデカルトは合理主義の祖とされ、それはその通りだが、第一原理からすべて演繹するという思想は科学的合理主義とは相容れないものがある。その排他性を考慮すると、デカルトは「教条的合理主義者」と呼べるのではなからうか？ 実験的経験主義者であるガリレオとデカルトとの比較については足立恒雄『 $\sqrt{2}$ の不思議』, p.74-p.77 参照。

真空中の物体の落下の速さにしても、ガリレオが述べていることはすべて何の根拠もない。というのは、まずガリレオが決定すべきであったのは、重さとは何かであって、もし彼が真実を知っているなら、真空中の重さは無であることがわかったであろう。

### 2.2 『幾何学』

1. 数の四則演算を作図で説明し、当時怪しげな学問とみなされた代数学を基礎付けた。
2. ヴィエトの「同次元の要請」を進めて、すべての量は線分(1次元)で表せるとした。これは量の体系の1元化と評価できる。ただしシモン・ステューヴン(ステヴィン)の小数導入の業績も見落とせない。

(線分)  $a$  にもう一度  $a$  を掛ける場合は  $aa$  または  $a^2$  と、これにもう一度  $a$  を掛ける場合は  $a^3$  と書き、以下どこまでも進む。(中略) ここで注意してほしいが、 $a^2$ ,  $b^3$  そのほか類似の書き方をするとき、私も代数学で用いられている用語を使って、これを平方(正方形: carré), 立方(立方体: cube) などと呼びはするが、普通は単なる線(分)しか考えていないのである。

ただし、 $a^n$  という記号を発明したわけではないことは注意を要する。この自然数を変域とする文字  $n$  の使用は、ラグランジュに始まるであろう。

### 3. 記号法の革新(「多項式 = 0」の記号法にも注意)

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

$$y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0$$

ヴィエトの記号例(複数の変数の使用はヴィエトに始まる):

$$A \text{ cubus} + B \text{ plano} 3 \text{ in } A, \text{ aequari } Z \text{ solido } 2$$

現代記号で書けば、

$$A^3 + 3B^2A = 2Z^3$$

だが、ヴィエトの場合は母音字は未知数を、子音字はパラメータ(既知数)を表す。

中世のコス代数の記号例:

$$2C + 2Q + U = N$$

現代記号では、これは

$$2x^3 + 2x^2 + 1 = x$$

を意味する。1変数であることに注意。

4. 作図可能な問題は2次方程式を重ねて解いていくことに還元できることを認識した。ギリシアの三大作図問題はかくして方程式の問題に還元された。「解ける問題はどのような形をしているか」という発想の逆転も歴史的に重要である。

## 2.3 接線など

デカルトは接線や法線を求めるのに、代数方程式の重根を求める方法を用いたのに対し、フェルマーは極限法の原型的な方法を用いた。

## 3 フェルマー

### 3.1 ディオファントス『算術』

1. フェルマーはアレクサンドリアのディオファントス(3世紀)の『算術』を読み、それを一般化した48項の考察を余白に書き残した(その翻訳と解説は足立恒雄『フェルマーを読む』参照)。

- 『算術』は、現在の言葉で言えば、2次不定方程式の有理数解、同じことだが、2次曲線の有理点を求める問題を集めた問題集である。ギリシアでは、自然数のみを数としたが、ディオファントスが有理数を数の仲間に加えた。近代に至るまでその習慣が続いた。
- 以前は、自然数解は難しいので有理数解で済ませた（ゴマカシた）とか、一つの解を求めることで満足しているといった評価だったが、最近では代数曲線の有理点の理論の「遠祖」として評価が一変した。（あるいは、未だそのように認識されていないのなら、そのように認識は改められるべきである。）
- 『算術』の問題の例。ただし現代的表現による。

(a)  $a, b$  を与えられた「数」（すなわち正の有理数）とするとき、

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

の解（正の有理数解） $(x, y)$  を求めよ。（第2巻問題10は  $a = 3, b = 2$ ）。

(b)  $a, b, c, d$  を与えられた「数」とするとき、

$$ax + b = \square, \quad cx + d = \square$$

の解（正の有理数解） $x$  を（種々の制約条件の下に）求めよ。ただし  $a, c$  が平方数であるか、 $b, d$  が平方数であるとする。（たとえば、第4巻問題45は  $a = 8, b = 4, c = 6, d = 4, 0 < x < 2$ ）。

### 3.2 楕円曲線とは

- フェルマーは『算術』の問題を3次式、4次式、また二つの2次式に拡張して考察する。これは現代数学で言うと、楕円曲線の有理点を求める問題である。
- 楕円曲線とは標準形

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (\text{ただし右辺} = 0 \text{ は重解を持たない})$$

に双有理同値な曲線のことである。

- フェルマーは有理点が一つ与えられたとき接線を使って他の有理点を求める方法を「バンシェの方法」と呼んでいる。一般的な接弦法を考えたのはニュートンが最初であろう。
- 楕円曲線の点の間に演算  $+$  を定義して、加法群にすることができる。

### 3.3 『欄外書込み』に現れる楕円曲線の例

- $a, b$  を与えられた「数」とするとき

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3$$

には（正の有理数）解  $(x, y) \neq (a, b)$  を（無数に）求めよ。

2.  $a, b, c, d$  を与えられた数とするとき,

$$ax^2 + b = \square, \quad cx^2 + d = \square$$

同じことだが, 同次式で書くと,

$$ax^2 + by^2 = \square, \quad cx^2 + dy^2 = \square$$

の解を求めよ. ただし  $a, c$  は平方数であるか,  $b, d$  は平方数であるとする.

たとえば, 『書込み』第45では  $a = b = c = 1, d = -1$  が扱われている.

3.  $a, b, c, A, B, C$  を与えられた「数」とするとき,

$$ax + A = \square, \quad bx + B = \square, \quad cx + C = \square$$

の解  $x$  を求めよ. ただし  $a, b, c$  は平方数であるか,  $A, B, C$  は平方数であるとする.

たとえば, 『書込み』第41は  $a = 1, b = 3, c = 8, A = B = C = 1$  の場合である.

4. (a) 第2項の2次曲面の交線は楕円曲線

$$y^2 = x(ax + b)(cx + d)$$

に双有理同値である.

(b) 第3項の定める曲線は楕円曲線

$$y^2 = (ax + A)(bx + B)(cx + C)$$

に双有理同値である.

### 3.4 『算術』の『欄外書込み』第2

これに反し, 立方を二つの立方に, 平方平方を二つの平方平方に分かつこと, 一般に, 平方より大きい任意の冪を二つの同名のものに分かつことはできない. そのことの真に驚くべき証明を見つけたが, この余白はそれを記すには狭すぎる.

この書込みから, 当時の数学についてわれわれはたくさんを知ることができるが, それはさておき, 書込みを現代的に述べると次のようになる:

$n(\geq 3)$  を自然数とし,  $a$  を与えられた正の有理数とするとき

$$a^n = x^n + y^n$$

を満たす正の有理数  $x, y$  は存在しない.

これは次のように自然数の問題として言い換えられる:

**フェルマーの大定理**  $n$  を3以上の自然数とすると

$$x^n + y^n = z^n$$

は自然数解  $(x, y, z)$  を持たない。

フェルマーは本当に「驚くべき証明」を持っていたのだろうか？ これはあり得ないと断言できる。フェルマーは、メルセンヌ等を通じて、自分の発見がヨーロッパ中の知識人に知れ渡るようにしていたが、 $n = 3, 4$  のとき以外は、メルセンヌなどへの書簡に述べていないからである。 $n = 4$  の場合の証明は、『欄外書込み』の中に見られる。

### 3.5 整数論の始祖フェルマー

フェルマーは整数論に深遠さ、美しさを見つけていた。当時の数学の世界は微積分学の創造に向けて加速している時代だったため、整数論（自然数の理論）はアマチュア的と見られていた。

算術の問題を出す人はほとんどいない。またそれらを理解する人もほとんどいない。これは、現在まで算術が算術的によりはむしろ幾何学的に扱われてきたという事実によるのだろうか。それは実際、一般的に言って古代においても現代においてもその通りである。ディオファントスでさえその例にもれない。彼は自分の解析法を有理数の範囲に制限することによって、他の者たちよりはいくぶん幾何学から解放されていたが、それですら幾何学が完全に姿を消しているわけではない。・・・

それだから算術をして、それ自身の固有の領域である整数の理論を回復せしめよ。算術の学徒をして、エウクレイデスによって『原論』においてかすかに触れられているが、彼に従う者たちによって十分に展開されたとは言い難いこの領域を発展させる努力をさせしめよ。

したがって、算術の学徒に、辿るべき道を照らさんがために、次のような証明さるべき定理、または解かるべき問題を提示する。もしもこれを証明すること、または解くことに成功したならば、この種の問題が幾何学における名高い問題に比して、美しさにおいても、難しさにおいても、また証明の方法においても劣るものではないことを認めるであろう。（『イギリスの数学者たちへの挑戦状前文』：足立恒雄『フェルマーの大定理 - 整数論の源流』参照）

### 3.6 フェルマーの解いた整数論の問題の例

1.  $4n + 1$  型の素数  $p$  は  $p = x^2 + y^2$  というように、二つの平方数の和に、ただ一通りに表せる。たとえば、 $5 = 1^2 + 2^2$ ,  $13 = 2^2 + 3^2$ 。（証明は「私の方法」、すなわち「無限降下法」によると述べ、証明の道筋を丁寧に指示している。これを見ると、真の証明を持っていたことがわかる。）
2. 「 $D$  を自然数とし、平方数ではないとする。このとき  $D$  に平方数を掛けて 1 を加えると平方数になるような自然数の組を求めよ。」（現代記号で書けば、

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

を満たす自然数  $x, y$  を求めよ。たとえば  $D = 2$  なら  $x = 2, y = 3$  が一つの答。）フェルマー曰く、「一般的に解くのが難しいなら、 $D = 61$ 、あるいは  $D = 109$  という、ごく易しい場合に求めるだけでも良い。」（イギリスの数学者に対する第 2 挑戦状）

$D = 61$  のとき  $x = 226153980$  が最小の解。

$D = 109$  のとき  $x = 15140424455100$  が最小の解.

これらはとりわけ桁数が大きくなる場合であって、フェルマーはとても意地悪な人であったことがわかるだろう.

- 立方数であって、そのすべての約数の和が平方数になるものを探せ. たとえば  $343 = 7^3$  であって、その約数は  $1, 7, 7^2, 7^3$  でその和は  $400 = 20^2$  である. 同じ性質を持つ立方数をもう一つ与えよ. (第2挑戦状)

最小の解は  $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 47)^3$

### 3.7 イギリスの数学者たちの反応

- イギリスの (ウォリスを筆頭とする) 数学者たちは最初は「数」というのを「有理数」だと受け取って,

$$x = \frac{2mn}{Dn^2 - m^2}, \quad y = \frac{Dn^2 + m^2}{Dn^2 - m^2}$$

(ここに  $m, n$  は任意自然数) を答として送った.

- これでは答になっていないというフェルマーの返事に対してブランカー子爵は  $1/n^6$  が答であると述べている. またウォリスは次のように書いている. 数学者としてのセンスの違いとともに解析学の興隆する時期に来ているのだという時代性を感じさせる逸話である.

この問題は完全だの, 不足だの, 過剰だのというお定まりの問題と全く軌を一にするものです. これらの問題は, すべての問題を包括する一般の方程式には決して還元できません. 問題の焦点が何であろうと, 私にはせねばならぬ仕事がたくさんあって, すぐにこの方面に関心を向けるというわけにはまいりません. しかしながら, 今のところ次の答えを与えることができます. 1 自身がその答です. (ブランカー子爵への手紙より)

### 3.8 解析幾何の創始者フェルマー

現代的な解析幾何学はフェルマーによって創始されたと言えるが, その独創になる点は以下である (Fermat, “*Ad logos planos et solidos isagoge*”による):

- 一定角 (主として直角) をなす座標軸を設定すること.
- 軌跡と方程式を対応させること.
- 座標変換 (平行移動, 回転) によって簡単な式に還元させること.

2次曲線と円錐曲線の対応は, 部分的ではあるが, 上記2., 3. を用いてフェルマーが得た結果である. デカルトの場合は, 直線と1次式との対応も考察していない.



## 4 パスカル

### 4.1 無定義概念の認識

それ以上は簡単な言葉で説明しようのない始原的概念を無定義用語として捉えようという思想はパスカルに始まる。これは現代的公理主義の魁である。パスカルはそのような概念の例として「時間」、「存在」、「人間」などを挙げている。

私がすべての人に知られているというのは、これらの事柄の本性的なことではない。それは単に名称と事物との間の関係のことに過ぎない。そこで、「時間」という表現に出会うと、すべての人は同じ対象に思いを向けるのである。それだけで、この用語は定義する必要がない。しかし、後で時間とは何かということを吟味する段になると、いったんそこに思いを向けた人が異なる意見を持つようになるのである。なぜなら、定義が作られるのは、命名される事柄を指示するためであって、その本性を示すためではないからである。（『幾何学的精神について』より）

### 4.2 推論の確実性に関する議論

すべての用語を定義し、すべての命題を証明するという・・・方法は（遡及が有限では終わらないために）絶対に不可能である。それゆえに、もはや定義することの出来ない始原的な用語と、それ以上明白なものを見出し得ない原理（公準）とに必然的に到達する。したがって、人間は、どんな学問でも、それを絶対的に完結した秩序によって処理することは、自然的にも恒久的にも不可能であるように思われる。

しかし、そこからあらゆる種類の秩序を放棄すべきであるという結論は出て来ない。

なぜなら、ここに一つの、それは幾何学の秩序であるが、説得力の足りない点では劣っているが、確実性の足りない点では劣っていない秩序がある。それは一切の用語を定義することも、一切の命題を証明することもしない。その点において、それは完結した秩序には劣っている。だが、それは自然の光に照らして明白で不変な事柄しか仮設しない。であるから、それは完全に真実であり、自然が論述に代わってそれを支えるのである。

この秩序は、すべてを定義し、すべてを論証する所にも、また何も定義せず、何も論証しない所にも存在しない。すべての人に明白な用語を定義せず、その他の一切を定義し、またすべての人に知られている一切の命題を証明せず、その他のすべてを証明するという、人間の世界で最も完全なこの秩序に対して、全ての用語を定義し、すべての命題を証明しようとする人も、また自明でない用語や命題において定義や証明を怠る人も、等しく誤っているのである。（『幾何学的精神について』より）

幾何学の例を挙げて考えると、平行線公準は証明できないが、その正しさは「自然」が保証してくれるという主張である。どうして自然が確実性を保証してくれるのかについての議論はなさそうに思われるが、「精神は黙って、自然に、技巧を用いずに、推理を行うのである。（『パンセ』）」といった言葉から察すると、幾何学の基礎の正しさを知るには繊細な精神が必要だと考えているのではなかろうか？ なお、「自然の光」というのは当時の「共通理解用語」だったようである。

### 4.3 無限についての考察

われわれは無限が存在するということを知っているが、その本質を知らない。例えば、数は有限であるというのが誤りであるということを知っている。それゆえ数の無限が存在するということは真である。しかし、われわれはそれが何であるかを知らない。それは偶数であるというのも誤りであるし、それは奇数であるというのも誤りである。なぜなら、それに1を加えても、その本質に変わりはないからである。にもかかわらず、それは数であり、あらゆる数は偶数か奇数かである。

それゆえ、われわれは神が何であるかを知らないまでも、神が存在するということは知ることができる。（『パンセ』より）

1. 英語で言うと「数」も「個数」もともに number である。つまり印欧語では元来、数とは個数に他ならないということである。「数は無限である」とは「自然数の個数は無限である」という意味であろう。しかしだからといって、「自然数の全体」が「数」であるということにはならない。
2. 無限に対する考察に関してはガリレオ（1564—1642）の方が数学的観点から観れば優れている（足立恒雄『無限のパラドクス』、『 $\sqrt{2}$ の不思議』参照）。

### 4.4 負数についての考察

私は、ゼロから4を引けばゼロであることを理解し得ない人がいるのを知っている。（『パンセ』より）

負数はヨーロッパ世界では東洋世界からはるかに遅れて発達した。負数を個数を使って説明することができないからである。したがって、上のような幼稚な考察はパスカルに固有のものではない。そもそもヨーロッパでは、ギリシア以来の「数＝個数」という固定観念に縛られていて、数とは何かという認識がそれ以上発展しなかったのである。

### 4.5 数学的帰納法の定式化

数学的帰納法の implicit な使用はすでに『ストイケイア（原論）』にも見られることであるが、パスカルによって、初めて現在の形式に定式化された。このことはフロイデンタール（1953年）によって考証された。マウロリーコ（1494—1575）の業績を調べて、数学的帰納法の定式化はないことが確認されたのである。

最初の例は『数三角形論』「命題第12」であるが、これを現代記号法で書くと

$${}_nC_k : {}_nC_{k-1} = (n - k + 1) : k$$

の証明である。

原亨吉によると、パスカルが数学的帰納法を定式化したのは、1654年7月29日から8月29日の間だということである。

## 4.6 証明

この命題には無限に多くの場合があるが、私は二つの補題を仮定することによって極めて短い証明を与えよう。(『数三角形論』「命題第 12」)

補題 1 この命題は自明なことだが、第 2 段において成り立つ。

補題 2 もしこの命題が任意の段において成り立つならば、必然的に次の段においても成り立つ。

ここから、この比例関係は必然的にすべての段において成り立つことがわかる。なぜならば、補題 1 によってこの命題は第 2 段において成り立つ。故に、補題 2 によって、命題は第 3 段において成り立つ。故に、第 4 段においても成り立つ。以下限りなく同様である。

故に補題 2 のみ証明すればよい。それは次のようにすればよい。今この比例が任意の 1 段、たとえば第 4 段において成り立つとする。・・・故に、第 5 段においても成り立つ。証明終わり。

残るすべての場合についても、同様にして同じことが示される。というのもこの証明は、この命題が直前の段において成り立つということと、各細胞 ( ${}_nC_k$  のこと) が直上の二つの細胞の和に等しいということのみに基づいているが、このことは至る所において真なのであるからである。

こればかりではなく、『数三角形論』の全命題は、本来

$${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

を最初に証明しておけば自明な命題である。しかし当時の記号法では(とくに記号が嫌いだったパスカルには)これを証明するのは困難であろう。「準一般的方法」によって、たとえば  $n=5$  の場合に、一般性が見通せるように説明するのは容易ではない。

$n$  次方程式というように、自然数を動く変数という考え方は一般論を論じる場合重要な役割を果たすが、これを最初に導入した数学者は誰かはっきりとはしない。私が思うに、同時多発的かもしれないが、ラグランジュ (1736-1813) も最初期の一人であることは間違いない。1759 年の論文には自然数を変域とする記号が使われている。

## 4.7 パスカルの神秘六角形

**パスカルの定理**  $C$  を滑らかな円錐曲線とし、その上の 6 角形の頂点を  $P_1, \dots, P_6$  とする。この 6 角形の三つの対辺を延長してその交点を作る。たとえば、

$$\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_4P_5} = \{Q_1\}, \quad \overline{P_2P_3} \cap \overline{P_5P_6} = \{Q_2\}, \quad \overline{P_3P_4} \cap \overline{P_6P_1} = \{Q_3\}$$

と定める。このとき 3 点  $Q_1, Q_2, Q_3$  は 1 直線上にある。

パスカルの定理は、デザルグの創始した射影幾何学の適用の見事な 1 例である。初等幾何を使って証明されているが、現在では線型代数 (連立 1 次方程式の理論) を使って簡潔な証明を与えることができる。

## 証明

1. 補題 (重要) 二つの3次曲線  $C_1, C_2$  がちょうど9個の点  $P_1, \dots, P_9$  で交わっているとす。  $D$  をもう一つの3次曲線とし,  $P_1, \dots, P_8$  を通っているとすれば,  $D$  は  $P_9$  も通っている。

2. 補題の証明 3次曲線は10個の係数を持つ3次方程式で定義されるので, 8個の点  $P_1, \dots, P_8$  は8個の10元同次連立1次方程式を与える。  $C_1, C_2$  はその独立な解であるため,  $P_1, \dots, P_8$  を通る3次曲線  $D$  は

$$D : F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$$

という形に表される。ここに  $F_i$  は  $C_i$  の方程式である。  $F_1(P_9) = F_2(P_9) = 0$  であるため  $F(P_9) = 0$  である。 Q.E.D.

3. パスカルの定理の証明 二つの3次曲線

$$C_1 = \overline{P_1P_2} \cup \overline{P_3P_4} \cup \overline{P_5P_6}, \quad C_2 = \overline{P_2P_3} \cup \overline{P_4P_5} \cup \overline{P_6P_1}$$

を考える。9点  $P_1, \dots, P_6, Q_1, Q_2, Q_3$  はすべて  $C_1$  と  $C_2$  上にある。

4. そこで第3の3次曲線

$$D = C \cup \overline{Q_1Q_2}$$

を考えると, 8点  $P_1, \dots, P_6, Q_1, Q_2$  は  $D$  上にある。補題によって  $Q_3$  も  $D$  上にある。 Q.E.D.

5. なお, 上の補題を使うと, 楕円曲線  $C$  は演算  $+$  によって加法群を成すことが簡単に証明される。