程に対応する場合は，Kolmogorov–Feller の方程式は定数係数の方程式になり，その解より無限分解可能分布の Lévy–Khinchin 標準形を得ることが出来る．

時間的に一様な $\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程に対する Kolmogorov 方程式は $\mathbb{R}^d$ のルベーグ測度 dy に関する推移確率密度 $p(t,x,y) = P(t,x,dy)/dy$ に関する次のような放物型偏微分方程式である:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t,x,y) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y) \tag{3}$$

$\cdots$ Kolmogorov の後退方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a(y)p(t,x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(y)p(t,x,y)\right) \tag{4}$$

$\cdots$ Kolmogorov の前進方程式

ここで $a(x) = (a^{ij}(x))$ は $\mathbb{R}^d$ 上の対称正定値行列関数，$b(x) = (b^i(x))$ は d 次元ベクトル関数，

$$a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}{}^{6)}, \quad b(x)\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^{d} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a(y)\cdots) = \sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}(a^{ij}(y)\cdots), \quad \frac{\partial}{\partial y}(b(y)\cdots) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial y^i}(b^i(y)\cdots)$$

と理解する．与えられた $a(x)$ と $b(x)$ に対し $\mathbb{R}^d$ 上の 2 階楕円型微分作用素 $Lf = \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial f}{\partial x}$ を定めると $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t,x,dy)f(y) \left(= \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y)f(y)dy\right)$ は初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad u\Big|_{t=0} = f$$

の解であり, この初期値問題を解くことで $P(t,x,dy)$ が定まり, 従って拡散過程 $X = (X(t))$ が定まる．そういう意味で X を <u>L-拡散過程</u> という．このようにして十分一般的な $\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程のクラスが適当に与えられた $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ より L-拡散過程として定まることが判った.

このようなマルコフ過程に対する解析的な方法に対し，Lévy や Wiener はマルコフ

---

6) $x = (x^1,\ldots,x^d)$, $y = (y^1,\ldots,y^d)$.

過程の見本関数をより直接的に構成する確率論的方法を創始した．Lévy は，$\mathbb{R}^d$ 上の無限分解可能な分布の標準形を決定し，それは Lévy–Khinchin の標準形としてよく知られているが，彼はその結果を Lévy 過程の見本関数の言葉で言い換えた．それは Wiener 過程の見本関数と Poisson 点過程による積分の和で表現出来，それに関する平均をとれば Lévy–Khinchin 標準形が得られる．伊藤先生はこの Lévy の仕事に大変興味を持たれた．しかし，それは深い内容を持ったアイデアに満ちたものであったが，厳密な数学として確立されているとは言い難く，それを Kolmogorov の土台の上に正確な数学として展開することに研究の目標をおかれた．そしてそれに成功されたのが先生の学位論文 On stochastic processes (infinitely divisible laws of probability), Japan. Jour. Math. XVIII (1942) である．更に先生はこの論文のアイデアを Kolmogorov–Feller 方程式で解析的に記述される Markov 過程へも応用し，その見本関数を Wiener 過程の見本関数と Poisson 点過程を用いて直接的に構成するという確率論的方法を追及され，それに成功されたのであった．それはまず日本語の文献で発表されたが[7)]，戦時中のことでもあり世界的に知られることは少なかった．戦後になって先生はその結果をより拡充して英文の論文にまとめられ，J. L. Doob にその世界的なジャーナルでの発表を依頼された．Doob は快くそれを引き受け，この論文はアメリカ数学会のメモワール・シリーズにおいて発表された[8)]．この伊藤先生の Markov 過程における確率論的方法は，Wiener 過程の見本関数による確率積分の概念を基礎においており，それに基づいて拡散過程の見本関数の微積分学が展開される．これは今日，伊藤の確率解析(Itô calculus) として世界で高い評価を受けている．

まず伊藤解析の基礎になる Wiener 過程について Wiener や Lévy の仕事を紹介する．Wiener 過程は英国の植物学者 R. Brown(1773–1858) が発見したとされるブラウン運動，即ち顕微鏡で観測される，水に浮かんだ花粉が弾けて飛び出した微粒子 (懸濁粒子) が水の分子運動の衝撃をうけて行う非常にジグザグした運動，の数学モデルである．ブラウン運動についての重要な物理学的研究が 20 世紀の始め A. Einstein や J. Perrin[9)]等によってなされ，それは分子のアヴォガドロ数の決定にも応用された．Perrin の著作「原子論」(Les Atomes) について Wiener は後述の自伝の中で次のように述べている[10)]．

> ... フランスの物理学者ペランがその著「原子論」で書いている鋭い論文がある．それは要するに，ブラウン運動中の粒子がとる非常に不規則な曲線から，われわれは数学者が想像する連続であって微係数をもたない曲線というものを想い起すというのである．彼によれば，この粒子はギャップを跳び越さないからその運動は連続であり，いかなる時にも運動がはっきり定まった方向をとらないと思われるので微係数をもたないというのであった．

[7)] 伊藤清: Markoff 過程ヲ定メル微分方程式, 全国誌上数学談話会 244 (1942) No. 1077
[8)] K. Itô, On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc. **49** (1951).
[9)] A. Einstein (1879–1955), J. Perrin (1870–1942)
[10)] 和訳 1983 年版，p.20 より引用.

このブラウン運動の数学モデルを確率過程として正確に構成したのが N. Wiener で，彼はその自伝，I am a mathematician, Doubleday, 1956 (鎮目恭夫訳，“サイバネティックスはいかにして生まれたか”, みすず書房，1956)，において，ブラウン運動をプッシュボールの球の運動に譬えている[11)].

> ブラウン運動を理解するために，運動場でプッシュボールをやっている人々のことを考えてみよう．たくさんの人々がボールにぶつかっていって，それをあちこちに動かしている．(中略) ボールはさきにのべた酔払いのように運動場をあちこちさまよい，結局，将来に起ることが過去に起ったことにほとんど係わりのないような一種の不規則運動をしているであろう．

d 次元の Wiener 過程は Kolmogorov 方程式による解析的記述では $L = \frac{1}{2}\Delta$ (Δ は d 次元ラプラシアン) としたときの L-拡散過程で推移確率密度が

$$p(t,x,y) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right), \quad t > 0,\ x, y \in \mathbb{R}^d$$ [12)]

の場合である．この立場で d 次元確率変数系 $X = (X(t), t \in [0,\infty))$ は定まるがその見本関数 $X : t \in [0,\infty) \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^d$ が確率 1 で連続であることをこの立場ではすぐに保証できない．Wiener は 1923 年に Daniell 積分という汎関数積分の方法を用いて d 次元実連続関数の空間[13)]

$$W_0^d = \{w : t \in [0,\infty) \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^d \text{ は連続で } w(0) = 0\}$$

の上に Borel 確率測度 P を $\{X(t,w) := w(t)\}$ が $\frac{1}{2}\Delta$-拡散過程になるように構成した[14)]. P を d 次元 <u>Wiener 測度</u>，$X(t,w) = w(t)$ で与えられる d 次元連続確率過程を (原点より出発する)d 次元 <u>Wiener 過程</u>(ブラウン運動[15)]) という．

Lévy は Wiener 過程の正確な構成において Wiener に一歩先を譲ってしまったが，そのことを残念に思っていたことが彼の自伝[16)]より窺われる．彼は Wiener 過程の見本関数について数多くの重要な研究を行い，偉大な成果を挙げたことは今日よく知られている．ここではその中から “Lévy による 1 次元 Wiener 過程の構成法” と，見本関数に関する “一様連続性の定理” について述べよう．

---

11) 和訳 1983 年版，p.19 より引用．
12) $|x-y| = (\sum_{i=1}^d (x^i - y^i)^2)^{1/2}$: x と y の d 次元ユークリッド距離．
13) 位相は有限区間上の広義一様収束位相を与える．
14) N. Wiener, Differential space, J. Math. and Phys. **2**, 1923.
15) ブラウン運動という語は色々な意味で用いられるので，Wiener 過程の方が数学的には誤解がない．
16) ポール・レヴィ: 一確率論研究者の回想 (飛田武幸・山本喜一訳) 岩波書店 1973.

Lévy の 1 次元 Wiener 過程の見本関数の構成法

$L^2(0,1)$ の正規直交基底である Haar 関数系$\{h_0(t), h_{k,n}(t), {}_{n=1,2,\dots}^{k=1,3,\dots,2^n-1}\}$ を用いる．ここで

$$h_0(t) \equiv 1,\ t \in [0,1), \quad h_{k,n}(t) = 2^{\frac{n-1}{2}} \left\{ 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(t) - 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(t) \right\},\ {}_{n=1,2,\dots}^{k=1,3,\dots,2^n-1}, t \in [0,1).$$

ある確率空間上に 1 次元標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立確率変数系 $\{g_0, g_{k,n}\}_{\substack{k=1,3,\dots,2^n-1 \\ n=1,2,\dots}}$ を設定しておく．このとき確率 1 で級数

$$X(t) = g_0 \cdot t + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots,2^n-1} g_{k,n} \cdot \int_0^t h_{k,n}(s) ds, \quad t \in [0,1)$$

は t について $[0,1]$ 上で一様収束することが示せる[17]．従って，$X = (X(t))$ は区間 $[0,1]$ 上の連続確率過程を定めるが，これが $L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ に対する L-拡散過程，即ち 1 次元 Wiener 過程であることも判る．

Lévy の一様連続性定理[18]

$$P\left[\varlimsup_{\substack{0<t_1<t_2 \le 1 \\ t=t_2-t_1 \downarrow 0}} \frac{|X(t_2) - X(t_1)|}{\sqrt{2t \log \frac{1}{t}}} = 1 \right] = 1.$$

伊藤先生はマルコフ過程研究における Kolmogorov や Feller の解析的方法，即ち Kolmogorov–Feller 方程式によって推移確率を定める方法に対し，Wiener 過程および Poisson 点過程というよく構造や性質の判った確率過程を予め準備して，その上に求めるべきマルコフ過程の見本関数を構成するという確率論的方法を追及された．それは上述のように，最初のお仕事である Lévy 過程の見本関数に関する Lévy–Itô 分解定理における方法の自然な発展である．ここでは簡単のため拡散過程に限って述べるので Poisson 点過程の概念は必要ないが，この概念についても先生の重要なお仕事があることを注意しておく．特にマルコフ過程の境界問題において導入された excursion point process は関数空間に値をとる Poisson 点過程を重要な場合として含み，これ等に関する伊藤先生のお仕事は高い評価を受けている．

---

17) 例えば H. McKean: Stochastic Integrals, Academic Press 1969 の pp.5–8 を見よ．

18) 上述の McKean の本の pp.14–17 を見よ．

さて Kolmogorov 方程式が定数係数の微分作用素 $L = \frac{1}{2}a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ で与えられるときは対応する拡散過程の点 x より出発する見本関数は $W = (W(t))$ を Wiener 過程として

$$X(t) = x + \sigma W(t) + b \cdot t$$

として与えられる．ここで σ は $\sigma^2 = a$ を満す (d 次元のときは $\sigma^t\sigma = a$ を満す $d \times r$-定数行列，$W(t)$ は r 次元 Wiener 過程となる)[19)]．そこで伊藤先生の基本アイデアは，連続な軌道を持つ偶然運動 (即ち連続な見本関数をもつ確率過程) の重要なクラスはその見本関数 $X(t)$ が，微分形で

$$dX(t) = \alpha_t dW(t) + \beta_t dt \tag{5}$$

と与えられるというものであった．この微分形から軌道が再現されるためには積分

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha_s dW(s) + \int_0^t \beta_s ds \tag{6}$$

が意味を持たねばならない．従って，積分

$$\int_0^t \alpha_s dW(s) \tag{7}$$

の意味を正確に与える必要がある．積分 (7) を正確に意味付けたのが伊藤の確率積分と呼ばれる概念で，これは確率解析の中核をなす基本概念である．それは被積分確率過程 $\{\alpha_t\}$ が，(i) 任意の $s < t$ に対し，確率変数系 $\{\alpha_u, W(u)\}_{u \le s}$ と Wiener 過程の増分 $w(t) - w(s)$ が独立，(ii) 任意の $t > 0$ に対し，確率 1 で $\int_0^t |\alpha_s|^2 ds < \infty$，という条件を満すとき，区間 $[0, t]$ の分割: $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t$ に関する Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{s_{i-1}}(W(s_i) - W(s_{i-1}))$$

の分割の最大幅を 0 としたときの極限として定義されるものである．また (6) における $\{\beta_t\}$ は上と同じ条件 (i) と可積分条件 (ii)$'$ 任意の $t > 0$ に対し確率 1 で $\int_0^t |\beta_s| ds < \infty$，を満すものとする．このとき (6) で与えられた確率過程 $\{X(t)\}$ を伊藤過程という．もっと一般的に r 次元 Wiener 過程 $W(t) = (W^1(t), \dots, W^r(t))$ と被積分過程 $\{\alpha_k^i(t), \beta^i(t)\}$ を与えて d 次元の伊藤過程 $X(t) = \{X^i(t)\}_{i=1,\dots,d}$ が定義される:

$$X^i(t) = X^i(0) + \sum_{k=1}^{r} \int_0^t \alpha_k^i(s) dW^k(s) + \int_0^t b^i(s) ds. \tag{8}$$

---

19) σ のとり方は任意性があるが，どう選んでも確率過程の法則は変らない．

伊藤先生は，こうした伊藤過程に関する微積分学を与え，その枠組において微分作用素 $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ に対応する L-拡散過程の見本関数 $X(t) = (X^1(t), \ldots, X^d(t))$ を 確率微分方程式

$$dX^i(t) = \sum_{k=1}^r \sigma_k^i(X(t))dW^k(t) + b^i(X(t))dt, \quad i = 1, \ldots, d$$

の解として与えられた．ここで $\{\sigma_k^i(x)\}$ は $a^{ij}(x) = \sum_{k=1}^r \sigma_k^i(x)\sigma_k^j(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, d$ を満す関数で，どう選んでも，$X(t)$ の法則は変らない．$\sigma_k^i(x)$ や $b^i(x)$ が Lipschitz 条件を満すような場合，確率微分方程式の解は一意的に存在し，それが L-拡散過程の見本関数となる．

伊藤の確率解析で重要なのは 伊藤の公式(Itô formula, あるいは Itô's lemma) と呼ばれる伊藤過程の変換公式である．$f(t,x)$ を時間変数 t と空間変数 x の滑らかな関数とするとき，伊藤過程 $X(t)$ に対し $Y(t) = f(t, X(t))$ で与えられる確率過程も又伊藤過程となることを示すことが出来，その伊藤過程としての分解，即ちそれを確率積分と通常の dt に関する積分に分解する公式である．もし $X(t)$ が $X(t) = X(0) + \int_0^t \beta_s ds$ の場合は古典的な Newton–Leibniz の公式で

$$Y(t) := f(t, X(t)) = Y(0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s)) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\beta_s\right] ds$$

となるが，これが一般の伊藤過程 $X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha_s dW(s) + \int_0^t \beta_s ds$ の場合には，$Y(t) = f(t, X(t))$ は

$$\begin{aligned} Y(t) = Y(0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\alpha_s dW(s) \\ &+ \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s)) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\beta_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(s, X(s))\alpha_s^2\right] ds \end{aligned}$$

となる．即ち，$X(t)$ の方に揺らぎ $\int_0^t \alpha_s dW(s)$ が加わることで $f(t, X(t))$ の方では揺らぎ $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\alpha_s dW(s)$ が加わる他に積分 $\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(s, X(s))\alpha_s^2 ds$ が加わるのである．このことは $f(t, X(t))$ の Taylor 展開

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) = &\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, X(t))(dt)^2\right. \\ &\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, X(t))dtdX(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))(dX(t))^2\right\} + \cdots \end{aligned}$$

において微分 dt 及び $dX(t) = \alpha_t dW(t) + \beta_t dt$ の積に次のルール

$$(dW(t))^2 = dt, \quad dW(t)\cdot dt = 0, \quad (dt)^2 = 0, \quad (dW(t))^2 dt = 0, \ldots$$

を適用して得られる．即ち $dW(t)$ を $\sqrt{dt}$ のオーダーと考え，$\sqrt{dt}$ についてオーダー 3 以上のものをすべて 0 として得られるものである．このことは $dW(t)$ が平均 0，分散 dt の正規分布に従う無限小確率変数であることの反映であり，実際 Lévy は $dW(t) = \xi\sqrt{dt}$ (ξ は標準正規分布に従う確率変数) と表わしている．もっとも Lévy はその意味あるいは運用方法を述べていないので数学になっているとは言い難い．伊藤先生は後年 "Kolmogorov の仕事に比べて，Lévy のそれは夢のように思っていた" と語っておられる．

$X(t) = (X^1(t), \ldots, X^d(t))$ が d 次元伊藤過程の場合，この伊藤公式をより具体的に表示しておこう．$X^i(t) = X^i(0) + \sum_{k=1}^r \int_0^t \alpha_k^i(s)dW^k(s) + \int_0^t \beta^i(s)ds$, $i = 1, 2, \ldots, d$ とし，$f(t,x) = f(t, x^1, \ldots, x^d)$ は $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな関数とする．このとき $Y(t) = f(t, X(t))$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} Y(t) =& Y(0) + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^r \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, X(s))\alpha_k^i(s)dW^k(s) + \int_0^t \Bigg[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s)) \\ &+ \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, X(s))\beta^i(s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(s, X(s))\alpha_k^i(s)\alpha_k^j(s)\Bigg]ds. \end{aligned}$$

これは Taylor 展開において $dW^i(t) = O(\sqrt{dt})$ とし，ルール

$$dW^i(t)dW^j(t) = \delta_{ij}dt, \quad O((\sqrt{dt})^m) = 0,\ m \geq 3$$

を適用したものである．

S が多様体の場合も，その上の拡散過程は局所座標を用いた確率微分方程式によって構成出来るが，座標近傍が交わる部分で一般には Wiener 過程を取り換える必要があり面倒になる．しかしもし $L_k(x) = \sigma_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, $k = 1, 2, \ldots, r$ が S の大域的なベクトル場を定義する場合には，この難点は解消され，与えられた Wiener 過程の上に解が構成され，S 上の拡散過程が Wiener 汎関数 として定まる．そのような場合には，近年著しく発展した，Wiener 汎関数に関する Malliavin 解析の方法が適用されて確率微分方程式の解を多様体の解析や幾何の諸問題に応用する可能性が著しく増大する．S 上の 2 階楕円型微分作用素 L が非退化のときは，L の係数が定める S 上の Riemann 計量に関する S の正規直交枠バンドル $O(S)$ へ持ち上げて考えれば，大域的な確率微分方程式が導かれ，その解 (確率動標構(stochastic moving frame) と呼ばれる) を用いて多様体 S に関する解析や幾

何の問題が研究出来る．特に L-拡散過程は確率動標構を S へ射影して得られる[20)]．

確率動標構の概念は 1962 年，伊藤先生がストックホルムの国際数学者会議で講演された，Riemann 多様体上のブラウン運動の道に沿ったテンソル場の平行移動の概念に始まり，J. Eells, K. D. Elworthy, P. Malliavin 等によって伊藤解析を用いて完成された．これは伊藤の確率解析の応用の一例であるが，それは今日，数理ファイナンス等，経済学の分野まで含めて広く応用されている．伊藤先生は 1987 年にイスラエルのウルフ賞を我国で小平先生に続いて受賞されたが，その授賞説明文には伊藤解析に関する先生の功績が次のように述べられている[21)]．特に伊藤解析を確率論における Newton の法則と呼んでいるのが印象的である．

> Professor Kiyoshi Ito has given us a full understanding of the infinitesimal development of Markovian sample paths. This may be viewed as Newton's law in the stochastic realm, providing a direct translation between the governing partial differential equation and the underlying probabilistic mechanism. Its main ingredient is the differential and integral calculus of functions of Brownian motion. The resulting theory is a cornerstone of modern probability, both pure and applied. In addition, Prof. Ito has been the inspirer and teacher of a whole generation of Japanese probabilists.

[20)] 確率動標構に関することは例えば N. Ikeda–S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, Kodansha, 1989 の Chapter V に詳しい．

[21)] ウルフ財団ホームページ "Kiyoshi Ito Winner of Wolf Prize in Mathematics - 1987" より引用，`http://www.wolffund.org.il/index.php?dir=site&page=winners&cs=211`