

書 評

ゲルファント やさしい数学入門 座標法

I.M.ゲルファント, E.G.グラゴレヴァ, A.A.キリロフ 著, 坂本 實 訳
ちくま学芸文庫, 2016 年

宇都宮大学教育学部
北川 義久

20 世紀最高の数学者の一人である I.M.ゲルファント (1913~2009) は, 旧ソビエト通信制数学学校の生徒のための教科書として 2 冊の本を書きました. 本書「座標法」はその第 1 冊であり, 初版は 1964 年に刊行されています. この日本語版 (ちくま学芸文庫) は 2007 年に刊行されたロシア語第 7 版からの翻訳です. たくさんの例題と練習問題があり, 本文中の特に注意を要する箇所には道路標識のマーク (停車, 急斜面, 急カーブなど) が配置されています. 通信制学校の生徒 (12 歳~17 歳) が独力で読み進めていくことができ, 努力すれば確実な理解が得られるように配慮して書かれた本であることが分かります.

ゲルファントは, 何故, 貴重な研究の時間を割いてまで, このような本を書いたのでしょうか. 本書のはじめにある「読者のみなさんへ」によると, 旧ソビエトでは, 1960 年代の中頃, モスクワ, レニングラードその他いくつかの大都市の寄宿学校に, 数学を専門とする初めての学級と学科が開設されたのですが, これらは, おもに大都市に住む若者だけが学べる所であり, 大都市と地方での機会格差は著しかったようです. ゲルファントは, 僻地に住んでいるために質の高い指導を受けることができない若者の助けになりたいとの考えから, 通信制数学学校の創設を提案したようです. 通信制数学学校とはどのようなものか, 通信制学校の教員や活動協力者を前にしてゲルファントが行った講演の抜粋が「読者のみなさんへ」に載っていますので, その一部を紹介します.

有能で数学に興味をもっているのに, 僻地に住んでいるために質の高い指導を受けることができないという若者の助けになりたいと, 私はいつも考えていました. 私自身, 数学を学びはじめた頃には辺境の地において, 2, 3 冊の本と先生とのよい関係だけが助けでした. 数学の唯一の本は先生から頂いたもので, ととてもありがたいことでした. 今でも感謝しています. このような環境で勉強することがどんなに大変であるか, また, そのために本当の才能に恵まれた人材をどれほど失っているか, 私はわかっています. 私の理解では, まじめで数学に関心のある学生は大都市でないところにもいて, 多くの能力ある指導者が

必要とされていますが、寄宿学校だけではその数をまかないきれいていません。そこで1963年に、親友であるモスクワ大学総長のペトロフスキー教授に、彼の力で通信制の数学学校を創設するように提案しました。この通信制学校の活動は次のようなものでした。国内のいろいろな地域、なかには大変な遠距離からも、数学に関心のある生徒を見つけだし、まじめに勉強するように指導し、学力水準を高めるよう援助しました。通信制学校に採用された生徒には、彼らのための特別に書かれた本と課題とが送られました。生徒たちは、問題を解いて解答を学校に送ります。問題を解けなかったり間違えたりした生徒には個人的に指導を行い、正解を書いて教えるだけでなく、生徒が自分の答えを自分自身で修正できるように「ヒント」を与えることにしました。こうして、通信制学校で学ぶ大多数の生徒は課題との取り組み方を身につけます。(中略)通信制学校の非常に重要な活動の1つは、優れた本を書くことです。その最初の本は、かつての私の学生と同僚との協力のもとで、私みずからが書きました。今、皆さんが手にしている本はその一冊です。(中略)私たちは、通信制学校の修了生の誰もが、将来数学者として活動したいと考えておられるとは思っていません。将来どの道に進むにしても、ここで学んだことは生かされることでしょう。何はともあれ、ここでの学習において、内容はともかく、全くの独力でことを成し遂げる初めての経験となることでしょう。(以下略)

以上がゲルフアントの講演です。教育に対する熱意が伝わってきます。

それでは、本書の内容を紹介しましょう。本文は、全部で4つの章からなります。各章のタイトルは、第1章「直線上の点の座標」、第2章「平面上の座標」、第3章「空間座標」、第4章「4次元空間」となっています。第1章～第3章では、座標法(解析幾何学)の基礎が丁寧に説明されます。ページ数にすると約160ページ、練習問題は全部で150題ほどあります。通常であれば、続く第4章で座標変換や2次曲線に関する内容が展開されるのですが、本書の第4章は「4次元空間」となっています。以下、第4章の内容を少し詳しく紹介します。この章は、第1章～第3章で学んだ座標法という考え方をを用いて4次元空間の「扉をちょっと開く」ことを目的としています。三つの節からなります。

最初の節では、4次元空間を考えなければならない理由が丁寧に述べられています。まず、幾何と代数の結びつきがあらためて強調されます。次に、「幾何学は計算を助ける」と題して、未知数が2または3個の方程式の整数解を求めるためにミンコフスキーが用いた幾何的方法がかなり詳しく紹介され、幾何的方法の重要性が具体的に示されます。そして、方程式を幾何的に扱うという観点から、4次元空間の幾何学を展開する必要性が述べられます。さらに「4次元空間の特殊性」と題して、通常の3次元空間と4次元空間との違いが述べられます。まず、平面と3次元空間の違いに興味深い例を挙げて確認し、その類推で3次元と4次元の違いを説明

しています。たいへん優れた説明です。そのおかげで、左手の手袋と右手の手袋は4次元空間の中では重ね合わせることができるという主張が、すんなり納得できてしまいます。最後に、物理学に対する高次元幾何学の有用性が述べられ、この節が締めくくられます。

次の節では、4次元空間の幾何学を展開するための基本概念が導入されます。平面や3次元空間の場合を振り返り、4次元空間の点、座標軸、座標平面、3次元座標平面などの基本図形が定義されます。さらに、2点間の距離や角の大きさが定義されます。

最後の節では、4次元立方体が詳しく考察されます。まず、3次元立方体を定義する3つの不等式からの類推により、4次元立方体を定義する4つの不等式が与えられます。そして、4次元立方体の図を描くために必要だからという魅力的な理由により、この立方体の境界の構造（境界がどのような図形からできているか、それらは何個あるか）についての考察が始まります。まず、線分、正方形、立方体について、それらの境界を構成する図形を数式で表現します。次に、これらの数式を手がかりにして4次元立方体の境界（頂点、辺、2次元面、3次元面）を表現する数式を類推していきます。そして、4次元立方体の境界の構造を表現する表を完成させ、4次元立方体の図を与えています。この節には14題の練習問題がありますが、興味深い問題がたくさん含まれています。例えば、最後の問題は、3次元立方体を主対角線に垂直な平面で切断したときの断面図についての考察を手がかりにして4次元立方体を主対角線に垂直な3次元平面で切断したときの断面がどのような多面体になるかを類推させるという問題です。かなりの難問ですが、生徒が独力で考えることのおもしろさを実感できる教材の一つだと思います。

それでは、この本を読んだ感想を書きます。本書の特徴は、通信制学校のテキストであるため独習に適していること、および現代数学のテーマが中学・高校生にも理解しやすいように丁寧に紹介されていることです。したがって、「訳者あとがき」にもありますが、中学・高校生には数学の入門書として、また、数学を学び直そうとする方々には再入門の書として役立つのではないかと思います。最近、SSH（スーパーサイエンスハイスクール）事業への協力依頼を受け、数学に興味を持つ高校生を指導する機会がありましたが、高校生に適切な研究テーマを見つけさせることの難しさを痛感しました。そのころ本書が出版されていれば、本書を活用してもっとよい指導ができたかもしれません。

最後になりますが、ゲルファントに関する参考文献として、日本評論社から最近出版された「多変数超幾何関数 ゲルファント講義 1989」を挙げておきます。京都における連続講義の記録とともに、ゲルファントの経歴と研究についての記事や来日したときの様子を伝える記事があり、興味深いエピソードが紹介されています。この書評を書くにあたり参考にさせていただきました。