リアルな代数幾何 — メビウスの帯からトロピカル曲線まで —

首都大学東京理工学研究科数理情報科学専攻
小林　正典

1　メビウスの帯

1.1　今回の問題

紙テープで輪を作るときに，ねじって裏と表をくっつけると，**メビウスの帯**になります．普通の（輪状の）帯を中央で切ると２つの輪に分かれますが，メビウスの帯の方は，中央にはさみを入れると１つにつながったままになります．切ったものをよく見ると，ねじれながら２周する帯になっています（図１）．２周すると表だったものは再び表とつながり，その意味では普通の帯と同じなので（3 次元空間で考えると入り方は違いますが），今回は区別しないことにします．

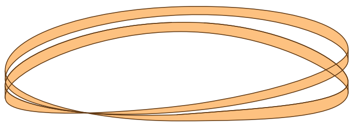

図 1: メビウスの帯を切るとねじれながら 2 周する帯になる

それでは，帯を増やしてみましょう．普通の帯を２つ，紙テープのリースのようにつなげて，糊付けします（図２）．のりしろは正方形になっています． ２つの帯の両方とも，

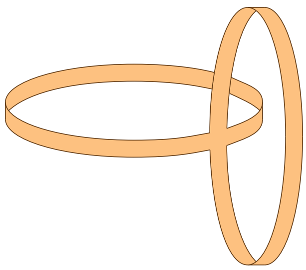

図 2: 2 つつなげた帯

中央で切り離すとどのような形になるでしょうか？

2017 年度年会市民講演会（2017 年 3 月 26 日）

やったことがない方は，実験していただくとよいのですが，丸い形だったものが，大きな穴のあいた正方形になります．のりしろを十字に切り離すことになりますが，そこが切ったあとの四隅になっています．メビウスの帯２つの場合など，広島大学での市民講演会：木村俊一氏の数学実験の中で面白い内容が扱われています．

さらに帯の数を増やしてみましょう．

問題： 図３のようにつなげた帯（簡単のため，すべて普通の帯にしてあります）を，すべて中央で切り離したら，どのような形になるでしょうか？例えば，何個の部分に分かれるでしょうか？

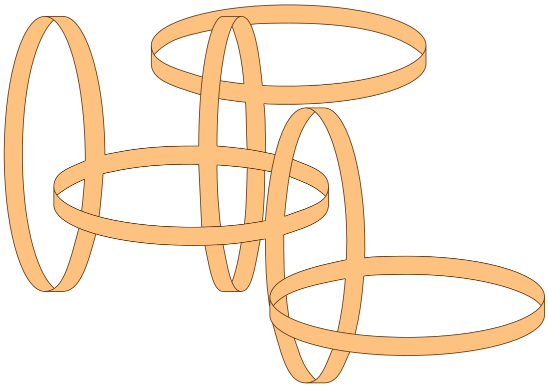

図 3: 今回の問題：すべて中央で切り離すと何個に分かれるか？

目で見るだけではこんがらがりそうです．こういう複雑なものをどう数えていくか，今日は３つの方法をご説明していきます．

1.2　扱いやすいものに置き換える

秀吉の有名な逸話にこういうものがあります．信長がある山のそばを通りかかったときに，その山に木が何本生えているか家来たちに尋ねました．見ただけで正確な答えがわかるはずもありません．そのとき秀吉は，千本の縄を用意させると，一本ずつ木に結び付けさせました．すべて結び終わったときに，元の縄の本数から，残った縄の本数を引くことで，木の本数を求めました．

数えにくい木を，数えやすい縄に**一対一対応**させました．縄をまだ結んでいない木があるかどうかは見ればわかりますし，同じ木に複数の縄を結ぶこともありませんから，漏れなく・重複なく，数え上げることができたわけです．さらに補集合を用いて計算することまでしたわけで，やはり秀吉は相当な知恵者です．この一対一対応の考え方を，今回の問題に応用してみましょう．

切った後の帯は，両側を切り口と元の境界（縁の部分）とで挟まれています．そこで，切る前に境界が n 個の連結な部分（「連結成分」）からなっていれば，切り離したあとは n 個の帯になることがわかります.（切り口はどこまで行っても切り口ですから，切り離した各部分は普通の帯になっていることもわかります.）

例えば，メビウスの帯の場合を考えてみましょう．境界は一周すると上下が逆さまになって戻ってきますから，境界は 1 つにつながっています．したがって切っても 1 本の帯になるというわけです．次に例に挙げた 2 つの帯をつなげた場合も，のりしろの正方形の頂点から境界をたどってみると，隣の頂点に戻ってきて，結局 1 つにつながっています．したがってこの場合も切ると（角張ってはいますが）1 本の帯になることがわかります．

このように，切ったあとの本数は，もとの境界の連結成分の個数を数えればそれに等しいということになりました.

1.3　単純な場合に帰着する

今回の問題では，6 個の帯をつなげていて複雑です．なんとか簡単に境界の個数を求められないでしょうか.

ここで，境界の個数を変えずに，メビウスの帯をつけたり消したりする,「爆発」と呼ばれる操作があります.

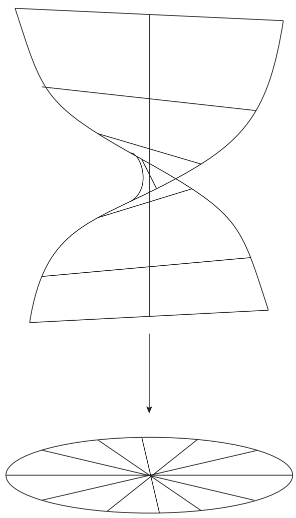

図 4: 爆発

円板において，中心の点にはいろいろな方向から近づくことができます．近づく方向（傾き）ごとに中心の点を異なる点とみなし，点を増やすと，どのような図形になるで

しょうか.

平面で原点を中心とする円板を考えます．原点を通る直線 $y = kx$ を考えて，傾き k を高さとして 3 次元に表してみます．ただし，y 軸の傾きは $-\infty$ とも ∞ ともとれますから，上下の彼方でつなげておくことにします．すると，傾き $-\infty$ の直線から，円を半周して，傾き ∞ の直線になるので，ねじった帯つまりメビウスの帯になっています．この，円板をメビウスの帯に取り替える操作を中心における**爆発**と呼びます.

円板の中心であった一点は，この操作で，傾きごとに違う点になったので，垂直な直線の上下をくっつけたもの，つまり円に変わりました．それ以外の点はどれも増えたり減ったりしていません．逆に，メビウスの帯があれば，中心にある円周を一点につぶして円板にできることもわかります．このとき境界は変わらないので，境界の数が同じで帯の数が 1 つ少ない図形に取り替えることができるわけです.

1 つ注意があります．円板自体はねじられてつながりメビウスの帯に変わるのですが，もし円板が帯の上に乗っかっていると，その帯もねじれます．円板の右側では下から上に傾きが増加するため，爆発のあとで上向きになりますが，左側では下から上に傾きが減少するため，爆発のあとで下向きになります．円板をまっすぐ通っていた帯は，爆発の前後で一回ねじれるのです.

1.4 わかりやすく表す

さて，輪の本数を減らせることがあるといっても，どこを爆発させたり戻したりすればよいのでしょう．ここで，事物の関係を視覚的に表す，**グラフ**を利用してみます．ここで扱うグラフは，関数 $y = f(x)$ のグラフとはちょっと見掛けが異なり，いくつかの点を辺で結んでできる図形です.

メビウスの帯を白丸，ふつうの帯を黒丸で表し，交わるときに辺で結んで表すことにします．すると，2 個の帯をつなげた図形は 2 個の黒丸を辺で結んだグラフになり，今回の問題の図形からは 6 個の黒丸を結んでできるグラフができます（図 5）.

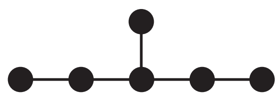

図 5: 今回の問題に対応するグラフ

爆発との関係をみてみましょう．ある帯（ねじれていてもいなくてもよい）の（境界以外の）どこかに円板を指定して爆発したとします．すると，円板は新たにメビウスの帯を作りますから新しく白丸が 1 つできて，もとの帯に対応する丸から結ばれます．もとの帯に対応する丸は 1 回ねじれるので，白黒が反転します．逆操作を考えてみると，も

しグラフのどこかの端に白丸があれば，それを消して，隣の頂点の白黒を反転したグラフが，メビウスの帯を円板につぶした図形に対応するわけです．

もし 2 つの帯の交わるところで爆発させると，両方の白黒が逆転します．爆発を複数回行うとどうなるか，いろいろ実験して慣れてみてください．例えば，任意の場所に連続する 3 個の白丸を挟むことが可能です．

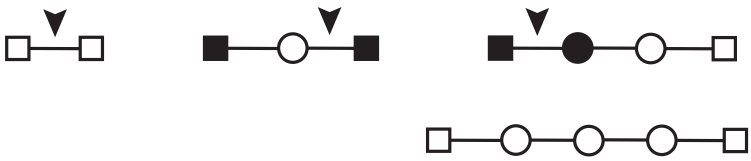

図 6: 白丸 3 個の挿入（□は任意のグラフ．空でもよい）

1.5　史上最悪の難問

以上の設定は，1998 年の東大後期の入試問題に登場しています．ある入試問題集には「史上最悪の難問」と書かれていました．

問題の要点は，白丸が n 個一列につながったグラフに対し，頂点がなにもないグラフから上の爆発操作で作り出せるための n の必要十分条件を求めよ，というものです．

図 7: 史上最悪の難問に対応するグラフ（白丸が n 個）

爆発操作の背景を理解した上で，この問題の解答を考えてみましょう．

3 個連続した白丸は他の部分を変えずにつぶせるので，n を 3 で割った余りによって答えが異なります．余りが 0 のときはつぶせて，1 のときも白丸 1 個になりますからつぶせます．余りが 2 のときはどう変形してもつぶせないことを示すのが大変な部分ですが，ここでグラフはつながった帯からくることを思い出します．グラフから対応するある帯を作り，その境界の個数を考えることができます（帯のつなげる位置によらないことも言えますが，ここでは関係ないので気にしなくてよいです）．問題に与えられた操作で，境界の個数は不変に保たれます．2 つの白丸つまりメビウスの帯をつなげたものは，1 つつぶすと 1 個の黒丸つまり普通の帯になります．この境界は 2 個の連結成分からなるので，円板（境界は 1 個）からは爆発操作やその逆操作を繰り返すことでは絶対に作れません．したがって答えは 3 で割った余りが 0 または 1，ということになります．

もちろん，入試問題の解答としては，グラフに対する不変量を具体的に与えることになるでしょう．不変量を帰納的に与えることもできます．白丸を 1，黒丸を 0 に対応させ，グラフを列 $s = a_1a_2\cdots a_n$ で表します．関数 $g(s) \in \{0,1\}$ を漸化式

$$g(s) \equiv a_n g(a_1\cdots a_{n-1}) + g(a_1\cdots a_{n-2}) \mod 2,$$
$$g() = 1, \quad g(a) = a \ (a = 0,1)$$

で定めると，$g(s)$ は各操作で不変であることが確かめられます．$g(s)$ は複雑に見えますが，実は大学初年次で習う行列式を知っていると簡単に書き下せます．漸化式はその余因子展開（行列式のところで習います）に過ぎません．

1.6　問題の解答

以上を踏まえて，問題の解答を与えましょう．

図形に対応するグラフにおいて，黒丸を 2 つずつ，3 対に分けます．それぞれの辺は帯の交わりに対応しています．交わった点を中心にしてそれぞれ爆発すると，白丸 3 個の組が 3 つできます．これらはすべて爆発の逆操作でつぶせるので，結局グラフは空になり，対応する図形は円板になりました．したがって，切ると 1 つの帯になります．もともと 5 箇所で交わっており，それぞれが 4 つの隅を作るので，全体としては $5 \times 4 = 20$ 個の角をもちます．

1.7　問題の背景

問題の背景にあるのは，曲面における曲線の**交点数**です．

ふつうの帯で，中央の円をすこしずらすと，もとの円と交わらないようにできます．この場合，交点数は 0 とします．円のずらし方によっては複数回交わりますが，中央の円の両側に 2 つの部分があり，一周すると同じ側に戻ってこないといけないので，偶数回交わります（ただし，中央の円の点を通るときは必ず別の側に通過するようにしておきます）．これを 2 で割った余りが 0 ということです．

メビウスの帯の場合は，例えば上に少しずらすと，一周して戻ってきたときには下側に来ますから，円に閉じようとすると中央の円を奇数回越えなければなりません．2 で割った余りを考えて交点数は 1 とします．

簡単のため，帯たちで帯を作るようにはつなげないこととしましょう．このとき，異なる帯の交点数は，中央の円が交わっていれば 1，離れていれば 0 とします．頂点に番号をつけて，i 番目と j 番目の交点数を (i,j) 成分とする行列を考え，**交点行列**と呼びます．成分の計算は常に 2 で割った余りに置き換えて考えます．

定理 1.1 (K–Kuo, K) 上の仮定のもとで次が成り立つ.

グラフが操作で空にできる必要十分条件は，交点行列が正則であることである．切ったあとの個数は，交点行列の余階数 +1 に等しい.

この交点数は便利なので次の節でもう少し考えてみます.

2　トロピカル曲線

2.1　平面曲線の交点数

まずは普通の交点数について考えてみましょう．平面において，2 つの曲線の交点数はどうなるでしょうか.

円と直線の位置関係は，2 点で交わる・1 点で接する・離れる，の 3 通りがあります．共有点の個数はそれぞれ 2・1・0 ということになります.

放物線と直線ならどうでしょうか．円と同様の 3 つの場合はあるのですが，他にもう 1 つあります．直線が軸と平行な場合で，1 点で交わります．2 つの交点が近づいて同じ点になったときが 1 点で接する場合であり，座標が虚数となるときが 0 点の場合です．そして最後は，2 つの交点のうちの一つが無限遠に逃げて行った場合です.

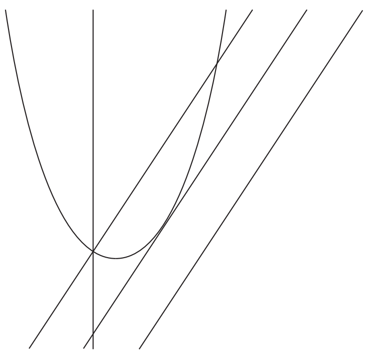

図 8: 放物線と直線の位置関係

2 次曲線と 2 次曲線なら，4 つの点で交わる例を作ることができ，2 次曲線と 3 次曲線なら，6 つの点で交わる例を作れます．一般に，共通成分のない実平面曲線に対しては，m 次曲線と n 次曲線は高々 mn 個の点を共有することが示されます.

ここで，ちょうど mn 個でないのは，共有点の座標が虚数になる，2 つの交点が近づいて接点になる，交点が遠くに飛んでいってしまう，ということが起こるからです．それ

ぞれ，複素数の範囲で考える・重複度の分だけ数える・無限遠点を追加すると，交点数はちょうど mn 個であることが示されます．これをベズー（Bézout）の定理といいます．

定理 2.1 (ベズーの定理) 共通成分のない複素射影平面曲線に対して，m 次曲線と n 次曲線の交点数はちょうど mn である．

2.2 トロピカル化

多項式 $f(x,y)$ から，方程式 $f(x,y)=0$ の解集合を考えてみます．実数では不足していた交点数が，複素はぴったり積になり良いのですが，失ったものもあります．複素数で考えると次元が倍になり，射影平面は実 4 次元，複素曲線は実 2 次元になります．人間が見てわかりやすいとは言えません．ここで登場するのがトロピカル化で，交点数はそのままに，次元が再び半分になるのです．

実数から複素数に直すとき，実数は複素数の実部とするのが一般的です．つまり，実数 x を複素数 $z=x+iy$（x,y は実数，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$）の虚部 y が 0 となるものとみなしています．これに対し，複素数 z の絶対値 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ を実数に対応させることを考えます．

正確には，複素数係数の多項式 $f(x,y)$ に対し，t を 1 より大きい実数として，

$$F(X,Y):=\lim_{t\to\infty}\log_t|f(x,y)|$$

を考えます．$|x|=t^X$，$|y|=t^Y$ とおいて計算すると次が確かめられます．

$f(x,y)=x+y$ のとき $F(X,Y)=\max\{X,Y\}$，$f(x,y)=xy$ のとき $F(X,Y)=X+Y$．

つまり，元の足し算と掛け算は，最大値と足し算に置き換わります．この操作は**トロピカル化**（超離散化，Maslov の脱量子化）と呼ばれます．単項式 kx^ay^b であれば $aX+bY+c$ になります（c は今の設定ではつまらない値しかとりませんが，k を t のべき級数にすると様々な値をとれます）．多項式はいくつかの整数係数 1 次式の最大値を与える式になります．

もともと，最大値と加法による代数は情報科学や制御理論などいくつかの分野で使われていました．この代数の研究者であるシモン（Imre Simon）がブラジル在住であったのに因み，フランスの研究者たちがトロピカル代数と呼び始めました．そして 2003 年ごろ，トロピカル代数に対応する代数幾何が考えられ，ミハルキン（Mikhalkin）・シュツルムフェルズ（Sturmfels）によりトロピカル幾何と名付けられました．

2.3 トロピカル曲線

曲線の場合に少し説明しましょう．曲線 $f(x,y)=0$ に対しても，点の座標をトロピカル化した図形がバーグマン（Bergman）扇として与えられていました．この図形は，多

項式 $f(x,y)$ のトロピカル化を $F(X,Y)$ とすると，$F(X,Y)$ の複数項が同時に最大となる点 (X,Y) の集合と一致することがカプラノフ（Kapranov）により示されました．これを平面**トロピカル曲線**と呼びます．

例えば $f(x,y)$ が 1 次式 $x+y+1$ のとき，$F(X,Y)=\max\{X,Y,0\}$ となります．$X,Y,0$ のうち複数個の項が同時に最大値を与えるような点 (X,Y) の集合は，原点から出る 3 本の半直線（それぞれ，$Y=X$，$X=0$，$Y=0$ の一部）を合わせた図形になります．一般に図 9 のように原点のような分岐点がたくさんある，区分的に線形な図形（折れ線グラフ）になります．

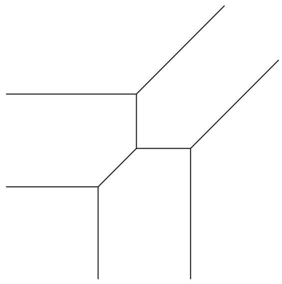

図 9: トロピカル平面 2 次曲線（$F(X,Y)=\max\{2X,1+X+Y,2Y,1+X,1+Y,0\}$）

折れ線グラフなら何でもよいというわけではなく，いくつかの特徴的な性質を満たしています．線の部分は，2 つの整数係数の 1 次式が等しい $aX+bY+c=a'X+b'Y=c'$ という条件から来るので，方向ベクトルとして整数成分のベクトルが取れます．このうちで成分の最大公約数が 1 となるものを原始方向ベクトルと呼びます．図形の各点 P においては，**釣合条件**が成り立ちます．すなわち，点 P から出る各々の半直線 e_j の原始方向ベクトルを $\vec{v_j}$ とすると，それらの和 $\sum_j \vec{v_j}$ がゼロベクトル $\vec{0}$ になる，というものです．これらの条件は十分条件でもあって，各辺が整数係数 1 次式で定まる直線の一部であり釣合条件を満たす折れ線グラフは，あるトロピカル多項式が定める平面トロピカル曲線であることがミハルキンにより示されています．

重要なことは，トロピカル曲線に対してもベズーの定理が成り立つことです．ポイントの 1 つは，実数を複素数の実部として埋め込むのではなく，逆に複素数からその絶対値として実数を与えているので，もとの共有点 (x,y) はトロピカル化しても点 (X,Y) として現れてくるということです．無限遠点も込めてトロピカル化し，適切に交点数を与えると，トロピカル版ベズーの定理が成り立つことが示されます（Sturmfels, Richter=Gebert–Sturmfels, 梶原）．

2 つの平面曲線の交点数は，たとえば無限遠点でない辺の途中で交わっている場合は，交わる曲線それぞれの原始方向ベクトルで作られる平行四辺形の面積で与えられます．曲

線をずらしていくと，一方が他方の分岐点を通過することがありますが，通過の前後で交点数が変わらないことが釣合条件から容易に示されます.（X^d の項，Y^d の項，定数項のある）トロピカル d 次曲線は，遠くから眺めるとトロピカル直線が d 重に重なっている図形に近いので，2 本の曲線を十分ずらしておくと，m 本の直線と n 本の直線がそれぞれ 1 点ずつで交わる場合に帰着されて mn 個になる，というのが特殊なものを除いた証明の概略です.

平面トロピカル曲線においては，交点数と代数との相性の良さはそのままに，図形としても，実次元に戻り，区分的に線形という，曲がっていない見やすい図形になり可視性に優れています（曲がっていないので，かえって少し慣れが必要かもしれませんが）.

ミハルキンによって，平面曲線の難しい数え上げの問題が，折れ線グラフの数え上げに帰着されて比較的簡単に解かれたため，トロピカル幾何は一躍脚光を浴びることになりました．現在では，平面曲線とは限らないトロピカル曲線に対しても，幾何の深い定理であるリーマン（Riemann）•ロッホ（Roch）の定理がベイカー（Baker）•ノリン（Norine）らにより示され，トロピカル幾何それ自体の幾何学を追求する研究が盛んになっています.

2.4　離散事象との関わり

トロピカル代数はもともと工程計画問題などの工学分野で使われていましたので，トロピカル幾何も応用できないかと考えました.

トロピカル直線の原点はいわば相図（例えば，氷•水•水蒸気のどの状態をとるか，圧力と温度を軸として図示した図）の 3 重点のようなものです．単純化して，各状態のポテンシャル関数を比較して，最小を与える状態を取るとします．ポテンシャル関数が微分可能であるとすると各点で 1 次近似できますから，3 つの状態があれば，相転移が起こるのは複数の 1 次式が同時に最小値を取る場所なので，局所的にはトロピカル曲線になるわけです.

工程計画問題においては，依存関係にあるいくつかの作業を考えます．各作業は，直前の作業がすべて完了してから着手できるとします．作業 i の完了に必要な作業時間を T_i とすると，作業開始から作業 i の完了までの最短時間は，直前の作業の最短完了時間のうちの最大値に T_i を加えたものになるので，帰納的に T_i たちのトロピカル多項式で表されます．特に，全体の最短完了時間も T_i に関するトロピカル多項式で表されます.

トロピカル多項式はトロピカル単項式の最大値（トロピカル和）ですから，ある作業の列に対し T_i の和が全体の最短完了時間に一致します．この列はクリティカルパスと呼ばれています．クリティカルパスはトロピカル多項式のニュートン多面体の頂点になることを利用して，クリティカルパスの遷移の起こりやすさを可視化する方法を小田切真輔氏との共同研究で与えました．どのようなトロピカル多項式がある工程の最短完了時間になるかも伊藤孝明氏により最近解明されています.