

渡辺信三

伊藤清先生が平成15年度の文化功労者に選ばれたことは、数学界にとって、特に先生と同じ確率論の分野で学び研究している者にとって、大変喜ばしいニュースである。先生は1998年、京都賞を御受賞になった年に体調を崩されたが、その後快方に向かわれ、今は京都の病院でリハビリに励んでおられる。今回の文化功労者の顕彰式には、久しぶりに上京して列席され、無事顕彰をお受けになったとお聞きしている。また12月14日には京都大学数理解析研究所において、お祝いの記念講演会が行われ、先生も車椅子でご出席になり、全部の講演をお聞きになると共に、多くの参加者からのお祝いを受けられた。私も当日、先生の業績についての解説を京大での思い出と共に語るという幸運に恵まれたが、更に数学通信において、より広範な読者を対象に同様の機会を与えられたので、重複を恐れず先生の紹介をさせて頂く。

先生は1915年に三重県でお生まれになり、1938年に東京帝国大学理学部数学科を御卒業になった。数学科の同級生に小平邦彦先生や河田敬義先生がおられたことは有名である。その後、大蔵省や内閣統計局などの役所に勤めながら数学の研究に励まれ、1943年に名古屋大学理学部助教授、1952年に京都大学理学部教授とられた。京大へ移られてすぐ、1954年から2年間、Fellerのもと、Princeton 大学 Institute for Advanced Study での研究生活を送られ、この時に、その後の確率過程論の発展に大きな意味をもつ H. P. McKean との共同研究が始まった。京都大学では、Aarhus 大学と Cornell 大学に海外流出された1967年から1975年の間を除いて、1979年に定年退職なさるまで、理学部数学教室と数理解析研究所で数学の研究と教育に従事され、特に退職までの3年間は数理解析研究所所長の要職にあった。京大退職後は、1985年まで学習院大学にお勤めになり、この間日本数学会理事長や岩波数学辞典第3版の編集委員長の要職を勤めて我国数学の発展に大きく貢献された。さらに1990年京都で開催された国際数学会議では、Vice President として、ご出席になれなかった President の小平先生の役を代わってお勤めになられたことは記憶に新しい。

先生の数学、特に確率論における業績は多岐に涉り、この分野の発展に決定的な貢献をされたのであるが、今回の文化功労者選出の報道においても見られる通り、その第一にまず挙げられるのは、確率解析学という数学を確立された業績である。特に確率積分や確率微分方程式の理論を中心とする先生の方法は、伊藤解析 (Itô calculus) の名で呼ばれることも多い。先生の確率解析の業績についての標準的な説明は、普通、次のように述べられる。「ニュートン以来、自然界の現象は微分方程式によって、

その変化の仕組みが解明されてきた。しかし、自然界には、例えば、ブラウン運動、即ち顕微鏡で観測される花粉内粒子の不規則運動のように、微分方程式では、解明出来ない偶然的な現象が多く存在する。それを捉えるのが伊藤の確率解析の方法である。刻一刻ノイズが加わって変化していく確率現象を解明する為、伊藤はノイズを含む常微分方程式として確率微分方程式を導入し、その理論を確立した。そのため導入された確率積分の概念はこの理論の根幹をなし、それによって確率過程の見本関数を解析する微積分の体系が出来、これは今日、伊藤解析、Itô calculus, と呼ばれている。この伊藤によって創始された理論は、整備、改良によって更に使い易いものになり、数学内では、解析学や微分幾何学、多様体論等、種々の分野の問題で有効な確率論的方法を与えると共に、物理学、化学、生物学や工学、経済学等の分野でもさかんに用いられ、その有用性は一段と認識されるようになった。特に近年では、金融工学乃至数理ファイナンスの分野で不可欠な方法となっている。」

この標準的な説明に若干の解説を加えよう。偶然現象の数学的解明を目的とする確率論では、現象をモデル化した確率過程という数学的対象を設定して研究を行うが、前世紀の始めごろまでは、確率過程から派生する確率分布や種々の平均的量を、微分方程式やフーリエ解析等を用いて研究していた。いわば、モデルの外側から眺めたような研究方法であった。しかし100年程前から、モデルの内側に入った直接的な研究、即ち確率過程の標本路そのものを考察する研究方法が始まり次第に盛んになっていく。Bachelier は、1900年の始めにパリの証券取引所での株式価格の変動を考察するため、Einstein より先にブラウン運動の数学理論を論じ、Einstein や Perrin 等のブラウン運動の物理学的研究を基に、Lévy や Wiener のブラウン運動の数学理論が発展していく。伊藤先生が確率論の研究を始められたのはこのような時期であった。確率過程のなかで最も重要なマルコフ過程について、その正確な数学的記述の方法が Kolmogorov によって与えられ、それを記述し決定する基本方程式が Kolmogorov、ついで Feller によって求められた。伊藤先生が確率微分方程式をお考えになったのは、この Kolmogorov の Markov 過程を定めるという問題を解く為である。最近 D. W. Stroock は、アメリカ数学会の Annals of Mathematics Studies のシリーズで、"Markov Processes from K. Itô's Perspective" という本を著し、マルコフ過程や確率微分方程式等における先生の業績を、先生の考え方、先生のものの見方、に中心をおいて解説しているが、興味深くまた教えられる点が多いので、それを参考にしながら先生の考えを述べよう。

今、状態空間は \mathbb{R}^n として、その上の確率測度全体の空間 $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ を考えると、マルコフ過程はその上の滑らかな曲線 $t \in [0, \infty) \mapsto \mu_t \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ と見なされる。そして Kolmogorov-Feller の方程式はこの曲線を定める微分方程式と理解されるが、その接ベクトルは、無限分解可能分布で与えられる。このことを確率過程の標本路のレベルで考えると、接線は Lévy 過程となるから、マルコフ過程の標本路は、瞬間、瞬間に Lévy 過程を繋いでいって得られる。このような考えから、先生は確率微分方程式を導入し、Kolmogorov-Feller の問題を解かれたのであった。こうしてみると、先生の確率微分方程式に関するお仕事は、先生の学位論文となった最初のお仕事である Lévy 過程に関する Lévy-Itô 分解定理と本質的に結びついていることが良

く判る。先生は、確率微分方程式を正確に定式化するため確率積分の概念を導入され、それによって確率過程の標本路に関する微積分学が確立された。今日では、この確率過程の標本路に関する微積分学は、セミマルチンゲールという確率過程のクラスにおいて一般的に整備され、確率過程研究の重要な方法となっている。

この標本路に関する微積分の基本公式が、有名な「伊藤の公式」で、それは接ベクトルに沿った一次の近似のみならず、その周りの広がりをもった二次近似、即ちベクトル場に沿う運動が揺らいでいる、そういう fluctuation まで表現する微分公式である。それは、平均をとれば Hille 吉田の半群理論における発展方程式となり、stopping time で止めて平均をとれば、Dynkin の公式というマルコフ過程とポテンシャルにおける一つの基本公式を与えるものがあるが、伊藤公式のキーポイントは、平均を取れば消えてしまう部分を残した、言い換えると平均を取る前のランダムな世界での公式であり、その部分がマルチンゲールとして重要な役割をする。先生は 1987年にイスラエルの Wolf 賞を、我国の数学で小平先生についてご受賞になられたが、そのときの授賞説明文に、この伊藤公式のキーポイントが、次のように記されている。“伊藤は、見本関数の無限小変化に関する完全な理解を与えた。このことは確率の領域におけるニュートンの法則と見なされるもので、法則を支配する偏微分方程式とその基礎にある確率構造の間の直接的翻訳を可能にした。これは要するにブラウン運動の関数についての微積分学である。このような理論は近代の純粹及び応用確率論における一つの土台となった。”

近年、数学理論としては珍しいことであるが、伊藤の理論は、確率論の専門家の域をはるかに越えて、広い範囲の人々に知られるようになった。それは、この理論が金融工学、即ち、数理ファイナンス、の分野で基本的道具として用いられるようになったことに起因している。1997年に、アメリカの Myron Scholes と Robert Merton がこの分野の業績でノーベル経済学賞を受賞して話題になり、そうした話題が NHK スペシャルというテレビ番組でも取り上げられた。その授賞理由の主なものは 1973年に Scholes がその共同研究者の Fischer Black と共に得た、stock option の価格公式で、それは Black-Scholes の公式と呼ばれているが、その理論展開において伊藤の理論が基本的に用いられたのである。それで NHK のテレビ番組においても伊藤先生が登場し、株価変動のモデルの基となるブラウン運動やそれを解析する伊藤の公式などを番組のディレクターに説明なさる場面が放映された。番組放送後、NHK に寄せられたこの番組の反響では、「伊藤先生」と「伊藤定理」(番組では「伊藤公式」を「伊藤定理」とよんで放送された)の問い合わせが群を抜いていたということである。私自身、京大理学部数学教室の方にもいくつかの問い合わせがあったことを記憶している。

数理ファイナンスにおいて、伊藤公式と並んで重要になる伊藤理論の一つに「伊藤の表現定理」と呼ばれるものがある。これはブラウン運動に関するマルチンゲールが、その確率積分によって表現されるという定理で、証券市場の完備性の問題と関わる。この定理は伊藤先生が確立された multiple Wiener integral の理論から導くことが出来、それで「伊藤の表現定理」といわれるようになったのである。Stroock は、上述の本の中で、伊藤公式と伊藤の表現定理が、金融工学においてとりわけ重

要な役割を果たしていることについて、”financial community においては、伊藤は economist であると誤って信じられていた、” というようなことを書いているがさもありませんと思われる。multiple Wiener integral の理論というのは、ブラウン運動の汎関数 (Brownian functional あるいは Wiener functional) で二乗可積分なものの全体をつくる L^2 -空間を Wiener chaos という直交部分空間へ分解する、ある種のスペクトル理論で、Norbert Wiener によって導入されたが、先生によって完全なものになった。この伊藤先生の理論より、任意の二乗可積分なブラウン運動の汎関数は multiple Wiener integral として表現され、それは伊藤の確率積分の意味の重複積分としても表現されるので、この汎関数の確率積分による表現が得られ、その条件付確率を考えれば、ブラウン運動に関するマルチンゲールが確率過程としての確率積分によって表現されることが判る。これが伊藤の表現定理の証明の粗筋であるが、これから例えばブラウン運動に関するマルチンゲールは必ず連続になるということも結論される。

私が学生の頃の 1950 年代の終わりから 60 年代の前半にかけては、先生の興味は主に 1 次元拡散過程の研究にあり、McKean との共同研究はその後の確率論の発展に大きな影響を与えた重要なものである。その当時、京大ではあまり確率積分や確率微分方程式の話題を聞くことはなかった。当時の研究の主流の一つであったマルコフ過程とポテンシャルの研究において、(特に Dynkin、本尾等を中心とするマルコフ過程の加法的、あるいは乗法的汎関数の研究の関連で、) P. A. Meyer の優マルチンゲールの分解定理が生まれ、セミマルチンゲールという確率過程のクラスでの標本路の解析が始まるきっかけが出来た。そして国田寛さんと私の論文に続いて、Meyer は、確率積分に関する壮大な論文を Springer Lecture Notes の Séminaire de Probabilités のシリーズに発表し、ストラスプール学派を立ち上げた。こうした研究は、先生の理論の一般化と、整備改良をもたらした。伊藤解析という言葉をよく聞くようになるのは 1970 年の始め頃からで、日本よりはむしろ外国で、特に、伊藤理論を stochastic control とか stochastic filtering に応用していた人達 (Kallianpur とか Kailath 等) がよく使っていた。こうして伊藤に始まる確率解析の理論は、再び興隆し始め、今日に続くのである。

私と先生の初めての出会いは 1956 年の 9 月、先生が Princeton 大学での研究生生活から京都大学にお戻りになられた直後、我々理学部数学科の 3 年生に、授けて頂いた「数学解析」の最初の講義の時間であった。私が学生時代に聞いた数多い講義のなかで一番忘れられない、最も惹きつけられた講義であり、その魅力で、当時は確率論はどんな学問か良く知らなかったが、将来を先生の指導のもとで進みたいと思ったのであった。その魅力が何なのか、うまく説明出来ないが、初めて新しいことを学ぶときに、判りたい、よく理解したいという切実な願望に最も良く応えた、こちらの気持ちに最もよく共鳴した、ということであろうか。先生の説明を聞いて、目から鱗が落ちる思いで理解出来たことが何度あったことか。先生は、数学の研究において物事の核心を深く考え、本質の解明に全身全霊を打ち込んでこられたが、教育においても本質が何かを教えて下さった。先生は優れた研究者にして始めて可能な真の数学教育者であると思う。