

頂点作用素代数のオービフォルド

山田裕理

一橋大学大学院経済学研究科

1 はじめに

頂点作用素代数 (VOA) において、その自己同型による固定点全体は部分代数になる。この部分代数はオービフォルドと呼ばれ、かなり前から考えられてきた。実際、Frenkel-Lepowsky-Meurman [25] によるムーンシャイン VOA V^\natural も、Leech lattice Λ から定義される VOA V_Λ の位数 2 の自己同型によるオービフォルド V_Λ^+ をもとに構成されている。このように、オービフォルドは頂点作用素代数の研究の初期の段階から考察されてきたが、現象が複雑なため、具体的に調べられている例は多くない。一方、最近では一般論が整備されてきており、具体例を詳しく調べる時期に来ていると思われる。

本稿では、格子から定義される頂点作用素代数のオービフォルドについて、最近の結果を紹介する。第 2 節で頂点作用素代数の定義を復習し、第 3 節では頂点作用素代数の自己同型に関する話題を取り上げる。第 4 節でオービフォルドの一般論を解説し、最後の第 5 節で Dong, Lam、田辺顕一郎、横山和弘との共同研究をはじめ、オービフォルドの具体例について最近の研究を紹介する。

2 頂点作用素代数とその加群

この節では、頂点作用素代数およびその加群の定義と基本的な性質をまとめておく。詳しいことは Frenkel-Lepowsky-Meurman [25]、Lepowsky-Li [37] を参照してください。

頂点作用素代数 (vertex operator algebra, VOA) とは、 \mathbb{Z} -graded な \mathbb{C} 上の無限次元ベクトル空間 $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ で、各 $v \in V$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し、 $v_n \in \text{End } V$ が定義されていていくつかの条件を満たし、さらに Virasoro 代数を含むものである。線形作用素 v_n の満たすべき条件は、その母関数 (field)

$$Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}, \quad v_n \in \text{End } V$$

を用いて記述すると見やすい。ここで、 z は複素変数ではなく形式的な変数である。形式的変数 z に対しては、formal calculus と呼ばれる代数的な扱いをする。一方、 z を複素数変数とする場合もある。形式的な変数として代数的に扱う方法と、複素変数として解析的に扱う方法との対応は、[25, Appendix] および [37, Chapter 3] に説明されている。

formal calculus では、各項の係数が有限和となるような計算はしてよいが、無限和になるような計算をしてはいけない。係数があるベクトル空間の作用素の場合、各 z^n の係

数は、任意に固定したベクトルへの作用が作用素の有限和になるとき (locally finite であるもの) しか計算できない。代数的に扱うので、級数の収束のようなことは考えないが、各項の係数が何らかの意味で有限和として確定することを、計算の各段階で常に確認する必要がある。

delta function $\delta(z)$ を、

$$\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n \quad (2.1)$$

により定義する。delta function は大切な働きをするが、[25, 37] と [30] で定義が若干異なるので、注意してほしい。

z, w を 2 つの形式的な変数とすると、 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $(z - w)^\lambda$ は

$$(z - w)^\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\lambda}{i} z^{\lambda-i} (-w)^i$$

と 2 番目の変数の非負べきに展開するものと約束する。この約束によれば、VOA の定義において大切な Jacobi identity (2.6) に現れる

$$\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right), \quad \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right)$$

は、それぞれ

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z_0^{-n} (z_1 - z_2)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} z_0^{-n} z_1^{n-i} z_2^i, \\ \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-z_0)^{-n} (z_2 - z_1)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{n+i} \binom{n}{i} z_0^{-n} z_2^{n-i} z_1^i, \end{aligned}$$

と展開される。

頂点作用素代数 (vertex operator algebra, VOA) から \mathbb{Z} -grading と Virasoro 代数を除いたものとして、頂点代数 (vertex algebra, VA) がある。VA の概念は Borchers [6] により導入されたが、ここでは Lepowsky-Li [37] の定義を採用する。[37, Section 3.6] で、Borchers による定義と Lepowsky-Li による定義が同値であることが示されている。

定義 (vertex algebra, VA) ([6, 37]) \mathbb{C} 上のベクトル空間 V に真空ベクトル (the vacuum vector) と呼ばれる特別なベクトル $\mathbf{1}$ が存在し、また線形写像

$$\begin{aligned} Y(\cdot, z) : V &\rightarrow (\text{End } V)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

が定義されていて次の条件を満たすとき、 $(V, Y, \mathbf{1})$ を頂点代数という。

1. (truncation condition)

$$u_n v = 0 \quad \text{for } n \gg 0. \quad (2.3)$$

2. (vacuum property)

$$Y(\mathbf{1}, z) = 1; \text{ the identity operator on } V. \quad (2.4)$$

3. (creation property)

$$v_n \mathbf{1} = 0 \quad \text{for } n \geq 0 \quad \text{and} \quad v_{-1} \mathbf{1} = v. \quad (2.5)$$

4. (Jacobi identity)

$$\begin{aligned} z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1) Y(v, z_2) - z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v, z_2) Y(u, z_1) \\ = z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u, z_0)v, z_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

$Y(v, z) \in (\text{End } V)[[z, z^{-1}]]$ を、 v に付随する頂点作用素 (vertex operator) という。

Jacobi identity (2.6) の両辺の $z_0^{-k-1} z_1^{-m-1} z_2^{-n-1}$ の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} u_{m+k-i} v_{n+i} - (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} v_{n+k-i} u_{m+i} \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (u_{k+i} v)_{m+n-i} \end{aligned} \quad (2.7)$$

が得られる。これを Borcherds identity と呼ぶ。この等式の両辺は、 $\text{End } V$ の元の無限和の形であるが、 $w \in V$ を任意にひとつ固定すると、条件 (2.3) により、 w への作用としては有限和になる。

定義 (vertex operator algebra, VOA) ([25]) 頂点代数 $(V, Y, \mathbf{1})$ が Virasoro 元 (the Virasoro element) と呼ばれる特別なベクトル ω を持ち、次の条件を満たすとき $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ を頂点作用素代数という。

1. (\mathbb{Z} -gradation)

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n \quad \text{with } \dim V_n < \infty \text{ and } V_n = 0 \text{ for } n \ll 0. \quad (2.8)$$

2. (Virasoro element) $Y(\omega, z)$ の z^{-n-2} の係数を $L(n) = \omega_{n+1} \in \text{End } V$ とおくと、

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}c \quad (2.9)$$

が成り立つ。ここで、 c は定数で ω の中心電荷 (central charge) または V の階数 (rank) と呼ばれ、 $c = \text{rank } V$ で表す。

3. ($L(0)$ -eigenspace decomposition)

$$L(0)v = nv \quad \text{for } v \in V_n. \quad (2.10)$$

4. ($L(-1)$ -derivative property)

$$Y(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz}Y(v, z). \quad (2.11)$$

VOA $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ を、簡単に V または (V, Y) とも書く .

$v \in V_n$ のとき、 v をウエイト n の元であるといい、 $\text{wt } v = n$ と書く . 零ベクトル 0 のウエイトは任意とする . V_n を、ウエイト n のウエイト空間という . $v \in V_n$ のとき、 v_m の作用素としてのウエイトは $\text{wt } v_m = n - m - 1$ 、すなわち $v_m V_k \subset V_{k+n-m-1}$ である .

VOA の定義から、任意の $v \in V$ に対し、

$$Y(v, z)\mathbf{1} = e^{zL(-1)}v, \quad \text{特に } v_{-2}\mathbf{1} = L(-1)v$$

が成り立つことがわかる . また、

$$[L(-1), Y(v, z)] = \frac{d}{dz}Y(v, z) \quad (2.12)$$

も成立する . 次の公式は大切である .

(skew symmetry)

$$Y(u, z)v = e^{zL(-1)}Y(v, -z)u. \quad (2.13)$$

Jacobi identity は、いくつかの大切な公式を含んでいる . (2.6) の両辺の $z_0^{-1}z_1^{-m-1}z_2^{-n-1}$ の係数を比較すると、

(commutator formula)

$$[u_m, v_n] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (u_i v)_{m+n-i} \quad (2.14)$$

となる . 右辺の和に現れる $u_i v$ の i は、 $i \geq 0$ の範囲であることに注意する .

Jacobi identity の両辺の $z_0^{-m-1}z_1^{-1}z_2^{-n-1}$ の係数を比較すると、

(iterate formula)

$$(u_m v)_n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} (u_{m-i} v_{n+i} - (-1)^m v_{m+n-i} u_i) \quad (2.15)$$

となる . また、

(commutativity) $u, v \in V$ に対し、非負整数 k が存在して

$$(z_1 - z_2)^k [Y(u, z_1), Y(v, z_2)] = 0 \quad (2.16)$$

が成り立つ . 実際、 $u_n v = 0$ for $n \geq N$ をみたす非負整数 N をひとつ定め、(2.6) の両辺の z_0^{-N-1} の係数を比較すると、 $k = N$ の場合の式が得られる .

(associativity) $u, w \in V$ に対し非負整数 l が存在して、任意の $v \in V$ について次が成立する .

$$(z_0 + z_2)^l Y(Y(u, z_0)v, z_2)w = (z_0 + z_2)^l Y(u, z_0 + z_2)Y(v, z_2)w \quad (2.17)$$

このように、VOA の定義から skew symmetry、commutativity、associativity が導かれるが、これらは実は Jacobi identity と密接な関係がある (cf. [37]) .

定理 VOA の定義において、Jacobi identity は次の (1)、(2)、(3) のいずれとも置き換えることができる .

- (1) commutativity と associativity
- (2) commutativity と (2.12)
- (3) associativity と skew symmetry

V の部分空間 U で、 $v_n U \subset U$ for all $v \in V, n \in \mathbb{Z}$ をみたすものを VOA V のイデアルという . 0 と V 以外のイデアルが存在しないとき、 V を simple VOA と呼ぶ . VOA $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ の部分空間 U で、 $(U, Y, \mathbf{1}, \omega')$ が VOA になるものを、 V の部分代数 (sub VOA) と呼ぶ . V の Virasoro 元 ω と U の Virasoro 元 ω' とは、一致するとは限らない .

V を VOA とする . \mathbb{C} -graded ベクトル空間 $W = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} W_\lambda$ と線形写像

$$Y_W(\cdot, z) : V \rightarrow (\text{End } W)[[z, z^{-1}]]$$

$$v \mapsto Y_W(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n^W z^{-n-1} \quad (2.18)$$

が定義されていて、VOA と同様の条件を満たすとき、 (W, Y_W) を V の加群という . ただし、Jacobi identity は次のものに置き換える .

$$z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y_W(u, z_1) Y_W(v, z_2) - z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y_W(v, z_2) Y_W(u, z_1)$$

$$= z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y_W(Y(u, z_0)v, z_2). \quad (2.19)$$

$w \in W_\lambda$ のとき、 w をウエイト λ の元であるといい、 $\text{wt } w = \lambda$ と書く . 零ベクトル 0 のウエイトは任意とする . W_λ は $L(0) = \omega_1^W$ の固有値 λ の固有空間である .

VOA の加群には、weak module、admissible module、(ordinary) module の 3 種類があるが、ここではそれらの区別は省略する .

3 VOA の自己同型

VOA V の自己同型 g とは、 $g \in GL(V)$ で

$$gY(v, z)g^{-1} = Y(gv, z) \quad \text{for } v \in V \quad (3.1)$$

$$g\mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad g\omega = \omega \quad (3.2)$$

の 2 条件をみたすものをいう . (3.1) は

$$g(v_n u) = (gv)_n(gu) \quad \text{for } u, v \in V, n \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

と同値である . また、条件 (3.2) より $g(V_n) = V_n$ である . V の自己同型全体 $\text{Aut } V$ は群になる . VOA の自己同型群については、多数の研究がなされているが、有限群論の立場から興味深いものも多い .

1. Virasoro VOA $L(c, 0)$ は、Virasoro 元 ω だけで生成されるので、その自己同型は自明なものに限る: $\text{Aut } L(c, 0) = 1$.
2. lattice VOA V_L の自己同型群は、 $\text{Aut } V_L \cong \langle \exp(v_0) \mid v \in (V_L)_1 \rangle O(\hat{L})$ である (Dong-Nagatomo [21]) .
3. Frenkel-Lepowsky-Meurman [25] により構成されたムーンシャイン VOA V^h の自己同型群は、モンスター単純群 \mathbb{M} に同型である .
4. Höhn [29] および Yamauchi [48] により、 $\text{Aut } V$ がベイビーモンスター単純群となるスーパー頂点作用素代数 (vertex operator superalgebra) V が構成されている .
5. $\text{Aut } V \cong S_n$ となる simple VOA V が Lam-Sakuma により構成されている .

VOA の自己同型群については、このほかにも Kitazume-Miyamoto [32]、Griess [27]、Matsuo [38]、Matsuo-Matsuo [39] などの研究がある .

ウエイト 1 の元 $v \in V_1$ に対し、 $\exp(v_0)$ は V の自己同型になる . $v \neq 0$ でも $\exp(v_0) = 1$ の場合があるが、いずれにしても $V_1 \neq 0$ なら $\text{Aut } V$ は無限群の可能性があり、 $\exp(v_0)$, $v \in V_1$ 全体で生成される部分群は、 $\text{Aut } V$ の正規部分群になる .

H が $\text{Aut } V$ の部分群のとき、 H により固定される V の元全体

$$V^H = \{v \in V \mid gv = v \text{ for all } g \in H\}$$

は、 V の部分代数になる . これを H によるオービフォールド (orbifold) と呼ぶ .

$\text{Aut } V$ の有限部分群 G をひとつとると、 G の部分群の集合と V^G を含む V の部分代数の集合とは、 $H \leftrightarrow V^H$ により 1 対 1 に対応するという、量子ガロア理論と呼ばれるものが知られている (Dong-Li-Mason [14], Dong-Mason [18], Hanaki-Miyamoto-Tambara [28]) .

量子ガロア理論 ([14, 18, 28]) V を simple VOA、 G を $\text{Aut } V$ の有限部分群とする .

(1) G の部分群と V^G を含む V の部分代数とは、次のように 1 対 1 に対応する .

$$\begin{array}{ccc} \{H; \text{部分群} \subset G\} & \xleftrightarrow{1 \text{ 対 } 1} & \{W; \text{sub VOA s.t. } V^G \subset W \subset V\} \\ H & \longleftrightarrow & V^H \end{array}$$

(2) G の既約指標全部の集合を $\text{Irr}(G)$ とおく . $\chi \in \text{Irr}(G)$ について、 V の中に現れる既約 G -加群で χ と対応するもの全部の和を V^χ で表すと、

$$V = \bigoplus_{\chi \in \text{Irr}(G)} V^\chi, \quad V^\chi = M_\chi \otimes V_\chi$$

となる . ここで、 M_χ は χ と対応する既約 G -加群、 V_χ は既約 V^G -加群で、 V^χ は既約 $\mathbb{C}G \otimes V^G$ -加群である .

(3) 任意の $\chi \in \text{Irr}(G)$ について、 $V^\chi \neq 0$ である .

物理では、同様のことが 1980 年代から考察されていたが、数学的には、[18] で G が可解群の場合に証明され、一般の場合は [28] により証明が完成した .

量子ガロア理論は美しい理論であるが、オービフォールドを具体的な例で調べることは一般に容易ではない。たとえば、ムーンシャイン VOA V^{\natural} のモンスター単純群 \mathbb{M} による固定点全部の集合 $(V^{\natural})^{\mathbb{M}}$ が、どのような VOA なのかもわかっていない。 $V^{\natural} = \sum_{n=0}^{\infty} (V^{\natural})_n = (V^{\natural})_0 \oplus (V^{\natural})_1 \oplus (V^{\natural})_2 \oplus \dots$ において、各 $(V^{\natural})_n$ は \mathbb{M} の加群である。それらの既約 \mathbb{M} -加群の直和への分解は、 $n \leq 51$ の範囲について、McKay-Strauss [40] が計算している。既約表現の次数だけ見ると、最初のいくつかは

$$\begin{aligned} \dim(V^{\natural})_0 &= 1, \\ \dim(V^{\natural})_1 &= 0, \\ \dim(V^{\natural})_2 &= 196884 = 1 + 196883, \\ \dim(V^{\natural})_3 &= 21493760 = 1 + 196883 + 21296876, \\ \dim(V^{\natural})_4 &= 864299970 = 2 \times 1 + 2 \times 196883 + 21296876 + 842609326, \\ &\vdots \end{aligned}$$

となっている。1、196883、21296876、842609326 は、 \mathbb{M} の既約表現の次数のうち、小さい方の最初の4個である。

$g \in \text{Aut } V^{\natural} = \mathbb{M}$ に対し、 g の $(V^{\natural})_n$ における表現の指標 $\text{ch}_{(V^{\natural})_n}(g)$ の母関数

$$T_g(\tau) = q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\text{ch}_{(V^{\natural})_n}(g)) q^n$$

を、 g に付随する Thompson series という。ここで、 $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ で、 τ は複素上半平面を動く。 q^{-1} をかけることで、次数を1だけずらしていることに注意する。 $\text{ch}_{(V^{\natural})_n}(g)$ は、 $g = 1$ のときは $(V^{\natural})_n$ の次元に一致し、したがって $T_g(\tau)$ は

$$q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\dim(V^{\natural})_n) q^n$$

となる。これがモジュラー関数

$$J(\tau) = j(\tau) - 744 = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

にほかならないことを最初に見出したのは、McKay であった。その後、 $g = 1$ に限らず、モンスター単純群の任意の元 g について、Thompson series $T_g(\tau)$ がモジュラー不変性を持つのではないかという予想 (moonshine conjecture) が、Conway-Norton [10] により提出された。この予想は、Borcherds [7] により証明されるが、そのためには頂点代数の概念が必要であった。なお、モンスター単純群は194個の共役類を持つが、 g がそれぞれの共役類に属する場合の $\text{ch}_{(V^{\natural})_n}(g)$ の値 ($n \leq 51$) が、[40] に書いてある。

4 orbifold の表現論

一般に VOA の表現論では、既約加群を分類することおよびフュージョンルールを決定することが目標になる。VOA の既約加群の分類を考える際に、大切なものとして Zhu 代

数がある .

VOA V について、 $u \in V_n$ 、 $v \in V$ に対し

$$u * v = \text{Res}_z \left(\frac{(1+z)^{\text{wt } u}}{z} Y(u, z)v \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\text{wt } u}{i} u_{i-1}v$$

$$u \circ v = \text{Res}_z \left(\frac{(1+z)^{\text{wt } u}}{z^2} Y(u, z)v \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\text{wt } u}{i} u_{i-2}v$$

とおく . $u * v$ 、 $u \circ v$ のどちらも、任意の $u \in V$ に対して線形に拡張する .

$$O(V) = \text{span}\{u \circ v \mid u, v \in V\}$$

とおくと、 $O(V)$ は演算 $*$ に関して両側イデアルになり、 $A(V) = V/O(V)$ には、 $*$ から引き起こされる演算が考えられる . その演算も、同じ $*$ で表すことにする . $A(V)$ は $*$ に関して associative algebra である . $A(V)$ を Zhu 代数と呼ぶ . 1 の $A(V)$ における像は $*$ に関して単位元で、Virasoro 元 ω の像は中心に含まれる .

Zhu 代数が VOA の表現論において重要な理由は、次の定理による .

定理 (Zhu [50]) 既約 V -加群の同型類と既約 $A(V)$ -加群の同型類は、1 対 1 に対応する . この対応は、次により与えられる . (既約 V -加群のウェイトが最小のウェイト空間を top level という)

$$\text{既約 } V\text{-加群の top level} \longleftrightarrow \text{既約 } A(V)\text{-加群}$$

VOA V と比較して、Zhu 代数 $A(V)$ はずっと小さく、また associative algebra であるので、 $A(V)$ の方が扱いやすい . しかし、Zhu 代数を決定することは、一般に容易ではない . $O(V)$ の定義からは、 $O(V)$ がどのようなものであるか直接にはわからないからである . 今までにいくつかの VOA の Zhu 代数が決定され、また VOA の既約加群が分類されているが、それらは次の方針に基づいている .

- (i) VOA V の既約加群で容易に構成できるものを、できるだけたくさん考える .
- (ii) $O(V)$ に含まれる元をできるだけたくさん調べて、 $A(V) = V/O(V)$ の大きさを上から押さえる .
- (iii) (i) で得られている V の既約加群の top level で、(ii) からわかる $A(V)$ の候補者の既約加群が尽くされていれば、上記の Zhu の定理により $A(V)$ が定まり、同時に既約 V -加群の分類も完成する .

VOA の表現論を考察する際は、“rational” および “ C_2 -finite” という良い性質を持つ VOA を扱うことが多い .

定義 (1) 任意の V -加群が完全可約のとき、VOA V は rational であるという .

(2) $\dim V/C_2(V) < \infty$ のとき、VOA V は C_2 -finite であるという . ここで、 $C_2(V) = \text{span}\{u_{-2}v \mid u, v \in V\}$ である .

次の 2 つの定理は基本的である .

定理 (Dong-Li-Mason [15]) VOA V が rational であれば、既約 V -加群の同型類は有限個である。

定理 (Dong-Li-Mason [16]) VOA V が rational かつ C_2 -finite とする。

- (1) V の階数は有理数である。
- (2) 既約 V -加群のウエイトはすべて有理数である。

rational かつ C_2 -finite な VOA は多数知られている。たとえば、positive definite even lattice L から定義される lattice VOA は、そのような例である。一方、rational でない VOA も多数ある。たとえば、中心電荷が $c = 1 - 6/(i+2)(i+3)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ 以外の Virasoro VOA $L(c, 0)$ は、rational ではない。affine VOA および Heisenberg VOA $M(1)$ も、rational ではない。

VOA V が simple かつ rational で、さらに既約 V -加群が唯一つ V 自身だけであるとき、 V は holomorphic であるという。ムーンシャイン VOA V^h は、最も大切な holomorphic VOA である。また、even unimodular lattice から定義される lattice VOA も、holomorphic である。

$g \in \text{Aut } V$ によるオービフォールド $V^g = \{v \in V \mid gv = v\}$ の既約加群を調べるために、次の g -twisted 加群を考える。

定義 (g -twisted module) V を VOA、 $g \in \text{Aut } V$ で、 g の位数 T は有限とする。 g の作用により、 V を g の固有空間

$$V^r = \{v \in V \mid gv = e^{-2\pi\sqrt{-1}r/T}v\}, \quad 0 \leq r \leq T-1$$

の直和に分解する: $V = \bigoplus_{r=0}^{T-1} V^r$ 。 \mathbb{C} -graded ベクトル空間 $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_\lambda$ と線形写像

$$\begin{aligned} Y_M(\cdot, z) : V &\rightarrow (\text{End } M)[[z^{1/T}, z^{-1/T}]] \\ v &\mapsto Y_M(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Q}} v_n^M z^{-n-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

が定義されていて、VOA の加群と同様の条件を満たすとき、 (M, Y_M) を g -twisted V -加群という。ただし、VOA の加群の Jacobi identity は、次の g -twisted Jacobi identity で置き換える。

(g -twisted Jacobi identity) $u \in V^r$, $v \in V$ に対し

$$\begin{aligned} z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y_M(u, z_1) Y_M(v, z_2) - z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y_M(v, z_2) Y_M(u, z_1) \\ = z_2^{-1} \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right)^{-r/T} \delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y_M(Y(u, z_0)v, z_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

g -twisted V -加群に対しては、 V -加群のときの Zhu 代数 $A(V)$ と同様の働きをするものとして、 g -twisted Zhu 代数 $A_g(V)$ がある。 $u \in V^r \cap V_n$, $v \in V$ に対し

$$u *_g v = \begin{cases} \text{Res}_z \left(\frac{(1+z)^{\text{wt } u}}{z} Y(u, z)v \right) & \text{if } r = 0, \\ 0 & \text{if } r \neq 0, \end{cases}$$

$$u \circ_g v = \text{Res}_z \left(\frac{(1+z)^{\text{wt } u-1+\delta_r+r/T}}{z^{1+\delta_r}} Y(u, z)v \right),$$

とおく．ただし、

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & \text{if } r = 0, \\ 0 & \text{if } r \neq 0, \end{cases}$$

である．

$$O_g(V) = \text{span}\{u \circ_g v \mid u, v \in V\}$$

は演算 $*_g$ に関して両側イデアルになる．また、 $r \neq 0$ なら、 $V^r \subset O_g(V)$ となる． $A_g(V) = V/O_g(V)$ には、 $*_g$ から引き起こされる演算が定義されるが、この演算に関して $A_g(V)$ は associative algebra になる．これを g -twisted Zhu 代数という． $A(V)$ と異なり、 $A_g(V) = 0$ の可能性がある．

Zhu による既約 V -加群と既約 $A(V)$ -加群の 1 対 1 の対応と同様のことが、既約 g -twisted V -加群と既約 $A_g(V)$ -加群に対しても Dong-Li-Mason により証明されている．

定理 (Dong-Li-Mason [15]) 既約 g -twisted V -加群の同型類と既約 $A_g(V)$ -加群の同型類は、1 対 1 に対応する．

既約 V -加群がすべてわかっている場合、 g によるオービフォールド V^g の既約加群の分類は、次のような方針で議論する (cf. Dong-Yamshkulna [23]) ．

Step 1. V -加群 (U, Y_U) に対し、 V -加群 $(U \circ_g, Y_{U \circ_g})$ を、ベクトル空間としては $U = U \circ_g$ で、 $v \in V$ に対して $Y_{U \circ_g}(v, z) = Y_U(gv, z)$ として定義する． $(U \circ_g, Y_{U \circ_g}) \cong (U, Y_U)$ のとき、 U は g -stable であるという． $S = \{U^1, U^2, \dots, U^k\}$ を、既約 V -加群の同型類の代表系とする． $U^i \circ_g$ は既約 V -加群だから、 $U^i \mapsto U^i \circ_g$ は S 上の置換になる．

定理 (Dong-Li-Mason [16]) V を rational かつ C_2 -finite な VOA とする．

(1) 既約 g -twisted V -加群の同型類の個数は、 g -stable な既約 V -加群の同型類の個数以下である．

(2) さらに V が simple VOA なら、 $A_g(V) \neq 0$ である．

この定理により、既約 V -加群が分類されていて、 g -stable な既約 V -加群がわかっているれば、既約 g -twisted V -加群の個数は、ある程度見当がつくことになる．既約 g -twisted V -加群と既約 $A_g(V)$ -加群とが 1 対 1 に対応し、既約 V -加群と既約 $A(V)$ -加群とが 1 対 1 に対応するので、定理の (1) より、感覚的には $A_g(V)$ の方が $A(V)$ より小さいといえる．いずれにしても、この定理は、 g -twisted Zhu 代数 $A_g(V)$ を決定するのに大切な情報を与えてくれる．

Step 2. $U^i \in S$ が g -stable なら、 $U^{i,r} = \{u \in U^i \mid gu = e^{-2\pi\sqrt{-1}r/T}u\}$, $0 \leq r \leq T-1$ は、互いに同型でない既約 V^g -加群である．

Step 3. $U^1 \circ_g \cong U^2$, $U^2 \circ_g \cong U^3$, ... のように、 $U^i \mapsto U^i \circ_g$ が S 上の長さ T の巡回置換を引き起こす場合は、 U^1, U^2, \dots は互いに同型な既約 V^g -加群になる．

Step 4. ある既約 g -twisted V -加群 W が g 不変で、 g が W 上に位数 T の自己同型を引き起こす場合は、 $W^r = \{v \in W \mid gv = e^{-2\pi\sqrt{-1}r/T}v\}$, $0 \leq r \leq T-1$ は、互いに同型でない既約 V^g -加群である。

Step 5. Step 2 から Step 4 までで得られた既約 V^g -加群で、すべての既約 V^g -加群が尽くされているのであれば、これで既約 V^g -加群の分類が完成したことになる。

5 オービフォールドの例

オービフォールドは複雑で、具体的な例を調べることは一般に難しい。実際、lattice VOA の位数 2 の自己同型によるオービフォールド以外は、あまり知られていない。

$(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を positive definite even lattice で、 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ をその基底とする。 L から定義される lattice VOA V_L 、および L の -1 倍の自己同型 $L \rightarrow L; \alpha \mapsto -\alpha$ から引き起こされる V_L の位数 2 の自己同型 θ を考える。 θ によるオービフォールド $(V_L)^\theta$ を、 V_L^+ と表す： $V_L^+ = (V_L)^\theta = \{v \in V_L \mid \theta v = v\}$ 。 V_L^+ のウエイト 1 のウエイト空間 $(V_L^+)_1$ について、 $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ となる $\alpha \in L$ が存在しない場合には、 $(V_L^+)_1 = 0$ となり、 $\text{Aut } V_L^+$ が有限群になる可能性がある。 V_L^+ の部分代数として $M(1)^+$ も大切である。 $M(1)^+$ および V_L^+ の表現論 (既約加群の分類、フュージョンルールの決定など) は、Abe, Dong, Li, Nagatomo らにより完成している (cf. [1, 2, 3, 4, 5, 19, 20, 22])。

L として Leech lattice Λ をとる。これは 24 次元 even unimodular lattice で、 $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ となる $\alpha \in \Lambda$ は存在しない。 V_Λ の既約加群は唯一つ、自分自身のみである (cf. Dong [11])。また、 V_Λ の既約 θ -twisted 加群も唯一つで、それを V_Λ^T とおく。 V_Λ^T には θ が作用し、その固有値 ± 1 の固有空間 $(V_\Lambda^T)^\pm = \{v \in V_\Lambda^T \mid \theta v = \pm v\}$ はどちらも既約 V_Λ^+ -加群になる。ベクトル空間としての直和 $V^\natural = V_\Lambda^+ \oplus (V_\Lambda^T)^+$ には、 V_Λ^+ の拡大としての VOA の構造が定義できる。これが Frenkel-Lepowsky-Meurman [25] により構成されたムーンシャイン VOA である。この VOA の自己同型群 $\text{Aut } V^\natural$ は、モンスター単純群 \mathbb{M} に同型である。また、 $\text{Aut } V_\Lambda^+$ は $2^{24}.C_{01}$ に同型である。 \mathbb{M} の位数 2 の元の共役類は、 $2A$ 、 $2B$ の 2 つであるが、 θ は共役類 $2B$ に属する位数 2 の元に対応する。

t を \mathbb{M} の共役類 $2A$ に属する位数 2 の元とすると、 t の \mathbb{M} における中心化群は $C_{\mathbb{M}}(t) \cong 2\mathbb{B}$ である。ただし、 \mathbb{B} はベイビーモンスター単純群を表す。Höhn [29] および Yamauchi [48] は、 t によるオービフォールドを論じている。[48] では、自己同型群が \mathbb{B} を含むような super VOA が構成されている。

一般の lattice L の場合の $\text{Aut } V_L^+$ について、少数の例外を除いて $\text{Aut } V_L^+ \cong C_{\text{Aut } V_L}(\theta)/\langle \theta \rangle$ となることが、Shimakura [45, 46] により知られている。

次に、位数 3 の自己同型によるオービフォールドの例について、最近の結果を紹介する。lattice VOA V_L について、 g が lattice L の位数 3 の fixed-point-free な自己同型から引き起こされる V_L の位数 3 の自己同型の場合を考える。位数 2 の自己同型 θ に関しては、Dong-Nagatomo [21] により θ -twisted Zhu 代数 $A_\theta(V_L)$ が調べられているが、そこの手法を拡張することにより、Lam-Yamada [34] は g -twisted Zhu 代数 $A_g(V_L)$ を決定し

た．この結果により、既約 g -twisted V_L -加群は Dong-Lepowsky [13] により構成されたものに限ることがわかる．

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ を A_2 型の単純ルート系とする．すなわち、 $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2$ 、 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$ である． $\alpha_0 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ とおき、 $\tau : \alpha_1 \mapsto \alpha_2 \mapsto \alpha_0 \mapsto \alpha_1$ という位数 3 の置換を考える． τ は、 A_2 型ルート格子の位数 3 の fixed-point-free な自己同型に拡張される． A_2 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍した格子を L とおく． τ は、 L にも位数 3 の fixed-point-free な自己同型として作用する． τ から引き起こされる lattice VOA V_L の位数 3 の自己同型も、同じ記号 τ で表すことにする．実は、 L の 12 個の直交和 $L^{\oplus 12}$ を、Leech lattice Λ にうまく埋め込むことができ、 τ は Λ の位数 3 の fixed-point-free な自己同型に拡張できる．さらに τ は V_Λ の位数 3 自己同型を引き起こすが、その自己同型はモンスター単純群の共役類 $3B$ に属するのではないかと予想されている． τ に興味を持つのは、この理由による．

V_L の Virasoro 元 ω の中心電荷は 2 であるが、Dong-Li-Mason-Norton [17] により、 ω は互いに直交する 3 つの共形元 ω^i , $i = 1, 2, 3$ の和になる．ここで、 ω^1 、 ω^2 、 ω^3 の中心電荷はそれぞれ $1/2$ 、 $7/10$ 、 $4/5$ である． $\omega^1 + \omega^2$ および ω^3 は τ で固定されるが、 ω^1 と ω^2 はどちらも τ で固定されない． $\tilde{\omega}^1 = \omega^1 + \omega^2$ 、 $\tilde{\omega}^2 = \omega^3$ とおくと、 $\omega = \tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^2$ で、 $\tilde{\omega}^1$ と $\tilde{\omega}^2$ は互いに直交する共形元になる．なお、 $\tilde{\omega}^1$ の中心電荷は $6/5$ である．

τ によるオービフォールド $(V_L)^\tau = \{v \in V_L \mid \tau v = v\}$ は、まだ少し大きい VOA である．この部分代数を調べる．

$$M = \{v \in V_L \mid (\tilde{\omega}^2)_1 v = 0\}, \quad N = \{v \in V_L \mid (\tilde{\omega}^1)_1 v = 0\},$$

とおく．このように定義すると、

$$\begin{aligned} M &= \{v \in V_L \mid (\tilde{\omega}^2)_n v = 0 \text{ for all } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \\ N &= \{v \in V_L \mid (\tilde{\omega}^1)_n v = 0 \text{ for all } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \end{aligned}$$

が成り立つ． $\tilde{\omega}^i$ により生成される V_L の部分代数 $\text{Vir}(\tilde{\omega}^i)$ は、 $\tilde{\omega}^i$ を Virasoro 元とする Virasoro VOA であるが、 M は V_L における $\text{Vir}(\tilde{\omega}^2)$ の commutant subalgebra、また N は V_L における $\text{Vir}(\tilde{\omega}^1)$ の commutant subalgebra になる．この定義より、 M 、 N ともに τ 不変であるが、実は N の各元は τ で固定される． M における τ の固定点全体 M^τ を考えると、 M^τ と N のテンソル積 $M^\tau \otimes N$ が $(V_L)^\tau$ に含まれる．

N は、 $\text{Vir}(\tilde{\omega}^2)$ の加群として $L(4/5, 0) \oplus L(4/5, 3)$ に同型な VOA で、物理では 3-State Potts model と呼ばれている．この既約加群の分類とフュージョンルールの決定は、それぞれ Kitazume-Miyamoto-Yamada [33] および Miyamoto [41] でなされている．既約加群は同型を除いて 6 個あり、フュージョンルールは位数 3 の対称性を持つ．この位数 3 の対称性と、モンスター単純群の共役類 $3A$ に属する元との関係が Kitazume-Lam-Yamada [31]、Lam-Yamada-Yamauchi [36]、Miyamoto [42]、Sakuma-Yamauchi [44] などで調べられている．一方 M^τ は、Dong-Lam-Tanabe-Yamada-Yokoyama [12] により、既約加群が同型を除いて 20 個あることが知られている．また、フュージョンルールは Tanabe [47] により決定されている．

M^τ の Virasoro 元は $\tilde{\omega}^1$ 、 N の Virasoro 元は $\tilde{\omega}^2$ である。 M^τ も N も、Virasoro 元ともう一つウエイト 3 の元で生成される VOA で、 W_3 代数の既約加群になっている。このような VOA を W_3 VOA と呼ぶことにする。

W_3 代数とは、 $L(n), W(n), n \in \mathbb{Z}$ という 2 系列の作用素で生成される代数で、次の交換関係を満たすものである (cf. [8])。

$$\begin{aligned} [L(m), L(n)] &= (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}c, \\ [L(m), W(n)] &= (2m-n)W(m+n), \\ [W(m), W(n)] &= (m-n)\left(\frac{1}{15}(m+n+2)(m+n+3) - \frac{1}{6}(m+2)(n+2)\right)L(m+n) \\ &\quad + \frac{16}{22+5c}(m-n)\Lambda_{m+n} + \frac{1}{360}m(m^2-1)(m^2-4)\delta_{m+n,0}c. \end{aligned}$$

ここで、

$$\Lambda_n = \sum_{k \leq -2} L(k)L(n-k) + \sum_{k \geq -1} L(n-k)L(k) - \frac{3}{10}(n+2)(n+3)L(n)$$

である。 c は定数で、中心電荷と呼ばれる。

N には、 $\text{Vir}(\tilde{\omega}^2)$ に関するウエイト 3 の最高ウエイトベクトル K が存在し、 $\tilde{\omega}^2$ と K で N は生成される。また、 $L(n) = (\tilde{\omega}^2)_{n+1}$ 、 $W(n) = K_{n+2}$ とおくと、 $L(n)$ と $W(n)$ は $c = 4/5$ の場合の上記の交換関係を満たす。同様に、 M^τ では、 $\text{Vir}(\tilde{\omega}^1)$ に関するウエイト 3 の最高ウエイトベクトル J が存在し、 $\tilde{\omega}^1$ と J で M^τ が生成される。さらに、 $L(n) = (\tilde{\omega}^1)_{n+1}$ 、 $W(n) = J_{n+2}$ とおくと、 $L(n)$ と $W(n)$ は $c = 6/5$ の場合の上記の交換関係を満たす。すなわち、 N 、 M^τ は、それぞれ中心電荷が $4/5$ および $6/5$ の W_3 VOA である。

$(V_L)^\tau \supset M^\tau \otimes N$ であり、 $(V_L)^\tau$ は、 $M^\tau \otimes N$ -加群として $M^\tau \otimes N$ ともう一つの既約加群の直和になっている。この既約加群は、ウエイト 2 の最高ウエイトベクトルから生成される。 $(V_L)^\tau$ の表現論については、現在研究が進められている。

一般に、lattice VOA には positive definite invariant hermitian form (\cdot, \cdot) が存在する (cf. Miyamoto [43, Section 2.5])。lattice VOA V_L は \mathbb{C} 上で定義するが、その構成と同様のことを \mathbb{R} 上で考えることができる。そのようにして得られる \mathbb{R} 上のものを、 $V_{L,\mathbb{R}}$ と書くことにする。また、 $V_{L,\mathbb{R}}^\pm = \{v \in V_{L,\mathbb{R}} \mid \theta v = \pm v\}$ とおく。 (\cdot, \cdot) が invariant とは、任意の $u \in V_{L,\mathbb{R}}^+ + \sqrt{-1}V_{L,\mathbb{R}}^-$ と $v, w \in V_L$ について、

$$(Y(u, z)v, w) = (v, Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}u, z^{-1})w)$$

が成り立つことをいう。

上記の記号で、 $\omega^i, J \in V_{L,\mathbb{R}}^+, K \in V_{L,\mathbb{R}}^-$ である。lattice VOA V_L の中では、 (\cdot, \cdot) に関して unitary という性質の良いものを主として扱うことになる。 M^τ 、 N とともに W_3 代数の既約加群であることも、 (\cdot, \cdot) を用いて容易にわかる。

$L = \sqrt{2}A_2$ の場合の結果を説明してきたが、一般の階数 l の A 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍した格子 $\sqrt{2}A_l$ から定義される lattice VOA $V_{\sqrt{2}A_l}$ についても、同様の問題が考えられる。こ

のような一般の階数の場合に、 N に相当するものとしてパラフェルミオン代数 (cf. [49]) が現れることが知られている (Lam-Yamada [35]) . 一般の階数の場合に、 M^r に相当するものを調べることは、興味ある課題である .

参考文献

- [1] T. Abe, Fusion rules for the free bosonic orbifold vertex operator algebra, *J. Algebra* **229** (2000), 333–374.
- [2] T. Abe, Fusion rules for the charge conjugation orbifold, *J. Algebra* **242** (2001), 624–655.
- [3] T. Abe, Rationality of the vertex operator algebra V_L^+ for a positive definite even lattice L , math.QA/0311210
- [4] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+ : General case, math.QA/0210274.
- [5] T. Abe, C. Dong and H.-S Li, Fusion rules for the vertex operator algebras $M(1)^+$ and V_L^+ , math.QA/0310425.
- [6] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986), 3068–3071.
- [7] R. E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.
- [8] P. Bouwknegt, J. McCarthy and K. Pilch, *The W_3 Algebra*, Lecture Notes in Physics, **m42**, Springer, Berlin 1996.
- [9] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, *ATLAS of Finite Groups*, Oxford Univ. Press, 1985.
- [10] J. H. Conway and S. P. Norton, Monstrous moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.
- [11] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **161** (1993), 245–265.
- [12] C. Dong, C. Lam, K. Tanabe, H. Yamada and K. Yokoyama, \mathbb{Z}_3 symmetry and W_3 algebra in lattice vertex operator algebras, *Pacific J. Math.*, to appear.
- [13] C. Dong and J. Lepowsky, The algebraic structure of relative twisted vertex operators, *J. Pure and Applied Algebra* **110**(1996), 259–295.

- [14] C. Dong, H.-S Li and G. Mason, Compact automorphism groups of vertex operator algebras, *Internat. Math. Res. Notices* **1996**, 913–921.
- [15] C. Dong, H.-S Li and G. Mason, Twisted representations of vertex operator algebras, *Math. Ann.* **310** (1998), 571–600.
- [16] C. Dong, H.-S Li and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized moonshine, *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56.
- [17] C. Dong, H.-S. Li, G. Mason and S. P. Norton, Associative subalgebras of Griess algebra and related topics, in: *Proc. of the Conference on the Monster and Lie algebra at the Ohio State University*, May 1996, ed. by J. Ferrar and K. Harada, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1998, pp. 27–42.
- [18] C. Dong and G. Mason, On quantum Galois theory, *Duke Math. J.* **86** (1997), 305–321.
- [19] C. Dong and K. Nagatomo, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra $M(1)^+$, *J. Algebra* **216** (1999), 384–404.
- [20] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L , *Comm. Math. Phys* **202** (1999), 169–195.
- [21] C. Dong and K. Nagatomo, Automorphism groups and twisted modules for lattice vertex operator algebras, in: *Recent developments in quantum affine algebras and related topics*, ed. by N. Jing and K. C. Misra, Contemp. Math. **248** (1999), 117–133.
- [22] C. Dong and K. Nagatomo, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra $M(1)^+$ II. Higher rank, *J. Algebra* **240** (2001), 389–425.
- [23] C. Dong and G. Yamskulna, Vertex operator algebras, generalized doubles and dual pairs, *Math. Z.* **241** (2002), 397–423.
- [24] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Conformal quantum field theory models in two dimensions having \mathbb{Z}_3 symmetry, *Nuclear Physics* **B280** (1987), 644–660.
- [25] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, New York, 1988.
- [26] I. B. Frenkel and Y.-C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.
- [27] R. L. Griess, Jr., A vertex operator algebra related to E_8 with automorphism group $O + (10, 2)$, in: *Proc. of the Conference on the Monster and Lie algebra at the Ohio State University*, May 1996, ed. by J. Ferrar and K. Harada, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1998, pp. 43–58.

- [28] A. Hanaki, M. Miyamoto and D. Tambara, Quantum Galois theory for finite groups, *Duke Math. J.* **97** (1999), 541–544.
- [29] G. Höhn, The group of symmetries of the shorter moonshine module, math.QA/0210076.
- [30] V. G. Kac, *Vertex Algebras for Beginners* 2nd Ed., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [31] K. Kitazume, C. Lam and H. Yamada, 3-state Potts model, moonshine vertex operator algebra and $3A$ elements of the monster group, *Internat. Math. Res. Notices* **23** (2003), 1269–1303.
- [32] M. Kitazume and M. Miyamoto, 3-transposition automorphism group of VOA, in: *Advanced Studies in Pure Math.* **32**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001, 315–324.
- [33] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra*, **223** (2000), 379–395.
- [34] C. H. Lam and H. Yamada, \mathbb{Z}_3 -twisted representations of lattice vertex operator algebras, *Commun. Algebra* **31** (2003), 3001–3020.
- [35] C. H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the lattice vertex operator algebra $V_{\sqrt{2}A_1}$, *J. Algebra* **272** (2004), 614–624.
- [36] C. H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, Vertex operator algebras, extended E_8 diagram, and McKay’s observation on the Monster simple group, *preprint*, math.QA/0403010.
- [37] J. Lepowsky and H.-S Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [38] A. Matsuo, 3-transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras, math.QA/0311400.
- [39] A. Matsuo and M. Matsuo, The automorphism group of the Hamming code vertex operator algebra, *J. Algebra* **228** (2000), 523–548.
- [40] J. McKay and H. Strauss, The q -series of monstrous moonshine and the decomposition of the head characters, *Commun. Algebra* **18** (1990), 253–278.
- [41] M. Miyamoto, 3-State Potts model and automorphisms of vertex operator algebras of order 3, *J. Algebra* **239** (2001), 56–76.
- [42] M. Miyamoto, Vertex operator algebras generated by tow conformal vectors whose τ -involutions generate S_3 , *J. Algebra* **268** (2003), 653–671.

- [43] M. Miyamoto, A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math.* **159** (2004), 535–596.
- [44] S. Sakuma and H. Yamauchi, Vertex operator algebra with two Miyamoto involutions generating S_3 , *J. Algebra* **267** (2003), 272–297.
- [45] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.
- [46] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ and its applications, Ph.D. thesis, University of Tokyo, 2004.
- [47] K. Tanabe, On intertwining operators and finite automorphism groups of vertex operator algebras, preprint.
- [48] H. Yamauchi, $2A$ -orbifold construction and the baby-monster vertex operator superalgebra, math.QA/0312164
- [49] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Nonlocal (parafermion) currents in two dimensional conformal quantum field theory and self-dual critical points in \mathbb{Z}_N -symmetric statistical systems, *Sov. Phys. JETP* **62** (1985), 215–225.
- [50] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.