

巡回ヘッケ環，古典型有限群から Cherednik 代数まで

有木 進（京都大学数理解析研究所）

1 quasi-hereditary 代数と cellular 代数

我々の興味は代数群から派生した種々の環を研究することにあるが，affine Hecke 代数等，無限次元の代数も多い．その場合，有限次元代数の表現論に帰着して調べるのはひとつの重要な手法である．本節では，過去から現在に至る研究の流れについて復習する．まず，有限次元化の例として以下の例 1 例 3 は基本的である．

例 1. この有限次元化代数は J.A.Green により導入された．

k を標数 p の代数閉体， $G = GL_n$ の関数環を $k[G]$ とする．また， \mathcal{C} を有限次元 $k[G]$ -余加群のなす圏とする． A を変数 $\{X_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ で生成される多項式環とすると， $k[G]$ は A を行列 $X = (X_{ij})$ の行列式で局所化した環であり， A は

$$A = \bigoplus_{r \geq 0} A(n, r) \subset k[G]$$

と多項式の次数を用いて直和分解される． $V \in \mathcal{C}$ とする．余加群構造射

$$V \longrightarrow V \otimes k[G]$$

が $V \otimes A(n, r)$ を経由するとき V を次数 r の多項式表現とよぶ．

Δ を $k[G]$ の余積とすると $\Delta(A(n, r)) \subset A(n, r) \otimes A(n, r)$ だから， $A(n, r)$ の双対空間

$$\mathcal{S}(n, r) = \text{Hom}_k(A(n, r), k)$$

は有限次元代数である． $\mathcal{S}(n, r)$ を Schur 環とよぶ．次の性質が成り立つ．

命題 2. $\mathcal{C}(r)$ を次数 r の多項式表現のなす \mathcal{C} の充満部分圏， V を $G(k)$ の定義表現とする．

(1) 圏同値 $\mathcal{C}(r) \simeq \mathcal{S}(n, r)\text{-mod}$ が成り立つ．

(2) $V^{\otimes r}$ は $(\mathcal{S}(n, r), k\mathfrak{S}_r)$ -両側加群であり，

$$\mathcal{S}(n, r) \simeq \text{End}_{k\mathfrak{S}_r}(V^{\otimes r}).$$

(3) $r \leq n$ ならば $\mathcal{S}(n, r)$ のベキ等元 ξ が存在して

$$k\mathfrak{S}_r \simeq \xi \mathcal{S}(n, r) \xi.$$

(2) を Schur-Weyl 相互律とよぶ。有限次元代数 $S(n, r)$ を考えることにより \mathcal{C} のかなりの情報が復元される。 $G = Sp_{2n}$ に対しても同じ理論がある。

例 3. この例は上記の例の q -analogue であり, Dipper-James により導入された。 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の非等標数モジュラー表現論, いわゆる Dipper-James 理論が背景にある。

F を標数 $\ell \neq p$ の代数閉体, $G = GL_n$, q を p ベキとする。上記の例の A , $k[G]$ はそれぞれ $A_q, F_q[G]$ に q -変形され,

$$A_q = \bigoplus_{r \geq 0} A_q(n, r) \subset F_q[G]$$

と書くとき,

$$\mathcal{S}_q(n, r) = \text{Hom}_F(A_q(n, r), F)$$

を q -Schur 環とよぶ。 q -Schur 環は $FG(\mathbb{F}_q)$ -加群の直和の自己同型環としての記述も持ち, これにより $FG(\mathbb{F}_q)$ の既約表現の分類や分解係数の計算が $\mathcal{S}_q(n, r)$ の既約表現や分解係数の計算に帰着される。

また, Schur-Weyl 相互律は今の場合, A 型 Hecke 環 $\mathcal{H}_r(q)$ とのあいだの Dipper-James-Jimbo 相互律に q -変形される。すなわち,

命題 4. $V^{\otimes r}$ は $(\mathcal{S}_q(n, r), \mathcal{H}_r(q))$ -両側加群の構造をもち,

$$\mathcal{S}_q(n, r) \simeq \text{End}_{\mathcal{H}_r(q)}(V^{\otimes r}).$$

$r \leq n$ ならばベキ単元 ξ が存在して

$$\mathcal{H}_r(q) \simeq \xi \mathcal{S}_q(n, r) \xi.$$

さて, 代数群や量子群に由来する圏 (BGG 圏 \mathcal{O}) から上記のようにして作る有限次元代数化部分圏は最高ウェイト圏の代表例である。そして, これらの相互律はあとで述べる quasi-hereditary/cellular 代数の枠組みのもっとも基本的な例になっている。定義を復習しよう。

定義 5. A を有限次元代数とする。 $A\text{-mod}$ が半順序集合 P を最高ウェイト集合とする最高ウェイト圏とは, $\{L(\lambda)\}_{\lambda \in P}$ が既約 A -加群の完全代表系であって, 余標準加群と呼ばれる A -加群 $\{\nabla(\lambda)\}_{\lambda \in P}$ が存在して次をみたすときをいう。

- (1) $[\nabla(\lambda)] = [L(\lambda)] + \sum_{\mu < \lambda} m_{\lambda\mu} [L(\mu)],$
- (2) $L(\lambda) = \text{Soc } \nabla(\lambda),$
- (3) $L(\lambda)$ の入射包絡 $I(\lambda)$ は ∇ -filtration をもち $I(\lambda)/\nabla(\lambda)$ には $\nabla(\mu)$ ($\mu > \lambda$) しか現れない。

加群圏が最高ウェイト圏になる有限次元代数には有名な特徴づけがある。

定理 6. (Cline-Parshall-Scott)

$A\text{-mod}$ が最高ウェイト圏になることと A が quasi-hereditary 代数になることは同値である。

quasi-hereditary 代数であることがわかれば，抽象 Kazhdan-Lusztig 理論を展開する，という研究の方向もある．

念のため quasi-hereditary 代数の定義を復習しておく．

定義 7. 有限次元代数 A が quasi-hereditary 代数とは，両側イデアルの列

$$A = \mathcal{I}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{I}_N = 0$$

が存在して，各 i に対し $\mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i+1}$ が A/\mathcal{I}_{i+1} の遺伝イデアルになることである．ここで，両側イデアル \mathcal{I} が A の遺伝イデアルとは，左 A -加群として \mathcal{I} が射影 A -加群であって，次が成り立つときをいう．

$$\mathrm{Hom}_A(\mathcal{I}, A/\mathcal{I}) = 0, \quad \mathcal{I}(\mathrm{Rad} A)\mathcal{I} = 0.$$

quasi-hereditary 代数と似た概念に cellular 代数という概念がある． A 型 Hecke 環や q -Schur 環は cellular 代数である．また，Brauer 代数や Birman-Murakami-Wenzl 代数も cellular 代数である．cellular 代数の導入により，これらの代数を systematic に扱うことができるようになった．

定義 8. F の標数は奇素数とする．有限次元 F -代数 A が cellular 代数とは，反自己同型 ι をもち， ι で不変な両側イデアルの列

$$A = \mathcal{I}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{I}_N = 0$$

が存在して，各 i に対し $\mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i+1}$ が A/\mathcal{I}_{i+1} のセルイデアルになることである．ここで， \mathcal{I} が A のセルイデアルとは， \mathcal{I} が ι -不変かつ左イデアル $\Delta \subset \mathcal{I}$ が存在して， (A, A) -両側加群として

$$\mathcal{I} \simeq \Delta \otimes \iota(\Delta)$$

となり，左辺の ι が右辺では $x \otimes y \mapsto \iota(y) \otimes \iota(x)$ に対応するときをいう．

Δ を標準加群という．標準加群には自然に不変内積が入り，その根基による商の中で，非零なものが既約 A -加群の完全代表系をなす．また， A の分解行列が三角性をもつ．

quasi-hereditary 代数にせよ，cellular 代数にせよ，両側イデアルが全順序で並んでいる必要はなく，両側イデアル $\{\mathcal{I}^{\geq \lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，標準加群 $\Delta(\lambda)$ が

$$\Delta(\lambda) \otimes \iota(\Delta(\lambda)) \simeq \mathcal{I}^{\geq \lambda} / \mathcal{I}^{> \lambda}$$

で与えられる，というのが通例である．

cellular 代数が quasi-hereditary 代数になるための条件は Graham-Lehrer によって与えられている．

定理 9. (Graham-Lehrer)

標準加群の根基による商がすべて非零になることと A が quasi-hereditary 代数になることは同値である．

たとえば, q -Schur 環が例である. 標準加群は Weyl 加群 $\Delta(\lambda)$ であり, Weyl 加群の根基による商 $L(\lambda)$ がすべて非零になっている.

さて, 有限次元代数の研究といえはまず森田同値な basic algebra に移って path algebra の商として研究するのが通例である. この観点からは以下の定理は基本的である.

定理 10. (König-Xi)

F の標数が奇素数とする. A が cellular 代数なら A の basic algebra も cellular 代数である.

現在のところ, この方向で発展させた研究はないがどれくらい quiver の形に制限がつくのか興味のあるところである.

上でも述べたように, Hecke 環に限らず, Brauer 代数など量子群や代数群に由来する有限次元代数は cellular 代数である. そこで, これらの代数を上で述べた

「quasi-hereditary/cellular 代数の枠組み」

で研究することが近年盛んになってきた. 研究は意外なひろがりを見せている. たとえば, 最初の例ではまず圏 \mathcal{O} からはじめて quasi-hereditary 代数である q -Schur 環, そして cellular 代数である Hecke 環が現れたが, 実は有理 Cherednik 代数からも同じものが現れるのである.

定義 11. 対称群に付随する有理 Cherednik 代数とは,

$$\mathcal{H}_{t,c} = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n] \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

であって, 交換関係を $wx_i = x_{w(i)}w, w\xi_i = \xi_{w(i)}w$,

$$\xi_i x_j - x_j \xi_i = \begin{cases} c(i, j) & (i \neq j) \\ t - c \sum_{k \neq i} (i, k) & (i = j) \end{cases}$$

で定めた \mathbb{C} -代数である. ただし, (i, j) は互換である.

$\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ が局所ベキ零に作用する有限生成 $\mathcal{H}_{1,c}$ -加群のなす $\mathcal{H}_{1,c}\text{-mod}$ の充満部分圏を圏 \mathcal{O} という. $M \in \mathcal{O}$ を $M_{reg} = M \otimes_{\mathbb{C}[V]} \mathbb{C}[V_{reg}]$ と局所化して, Dunkl 作用素

$$T_\xi = \partial_\xi + \sum_{s \in S} \frac{\langle \xi, \alpha_s \rangle}{\alpha_s} c(s-1)$$

を用いて平坦接続を定義することにより KZ 関手を定義することができる.

定理 12. (Ginzburg-Guay-Opdam-Rouquier)

KZ 関手は完全関手であり, $\mathcal{O}_{tor} = \{M | M_{reg} = 0\}$ に対し,

$$\mathcal{O}/\mathcal{O}_{tor} \simeq \mathcal{H}_n(q)\text{-mod}$$

が成り立つ. ただし, $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}c)$ である.

定理 13. (Guay) \mathcal{O} は最高ウエイト圏である.

定理 14. (Rouquier)

$O \simeq S_q(n, n)\text{-mod}$ であり, この圏同値で KZ 関手は Schur 関手に対応する.

以上の研究を一般化していくことも興味深いことであるが, 我々は, A 型 affine Hecke 環の BC 型への拡張として affine BMW 代数をとりあげ, もうひとつの有限次元代数化である巡回商を用いて, affine BMW 代数の退化版である affine Wenzl 代数の有限次元既約表現の構成を実行した. 次節ではこのアプローチで得られた結果について述べる.

2 A 型から BC 型へ

$G(F_q[[t]])$ や $G(\mathbb{Q}_p)$ を考えると, よく知られているように (拡大) affine Hecke 環が重要な役割を果たす. affine Hecke 環の表現論はまだわかっていないことが多い. しかも, cell の理論や Lie 環のモジュラー表現との関係などなど, Lusztig による深い研究があり, 価値ある研究対象である. affine Hecke 環に対しても affine q -Schur 環があるがここでは触れない.

以前の研究では, 加群圏の有限次元化部分圏を考えることにより affine Hecke 環の表現を研究した. そこで我々のとったアプローチは「巡回商による有限次元化」である.

例 15. A 型 affine Hecke 環は $F[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \otimes \mathcal{H}_n(q)$ に交換関係を定義したものであった. $v_1, \dots, v_m \in F$ とし,

$$f(X_1) = (X_1 - v_1) \dots (X_1 - v_m)$$

の生成する両側イデアル \mathcal{I}_f による商を考える. これを affine Hecke 環の巡回商という.

A 型 affine Hecke 環の巡回商には, 既約表現が柏原の結晶基底で記述される, Lusztig の標準基底で分解係数が計算できるなどの結果があって, 第 4 1 回代数シンポジウムで報告した.

さて, affine Hecke 環が Lie 群とすれば, Lie 環にあたるのが退化 affine Hecke 環である. A 型の場合, Drinfeld により導入されたものである.

定義 16. $\mathcal{H}_n = F[x_1, \dots, x_n] \otimes F \otimes_n$ に交換関係を $s_i x_i = x_{i+1} s_i - 1$, $s_i x_j = x_j s_i$ ($j \neq i, i+1$) で定めた F -代数を退化 affine Hecke 環という.

Kleshchev は退化 affine Hecke 環の巡回商を考え, 既約表現が私の結果と同じ柏原クリスタルによって分類されることを示した.

我々はこれらの結果を A 型から BC 型に拡張したいと考えた. Schur-Weyl 相互律で考えれば A 型 Hecke 環に当たるのは Birman-Murakami-Wenzl 代数である. affine Hecke 環に当たる代数は BMW 代数を affine 化した affine BMW 代数であり, Ram により導入された.

ここでは, 退化版を考える. これが Nazarov によって導入された affine Wenzl 代数である. affine Wenzl 代数は BMW 代数の退化した Brauer 代数を部分代数として含む. 以下, F の標数は奇素数とする.

定義 17. F の部分集合 $\Omega = \{\omega_a\}_{a \geq 0}$ をパラメータにもつ affine Wenzl 代数 $\mathcal{W}_n(\Omega)$ とは, 生成元

$$\{s_i, e_i\}_{1 \leq i < n} \cup \{x_j\}_{1 \leq j \leq n}$$

と, 次の基本関係式で定義される F -代数をいう.

基本関係式

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1, & e_i^2 &= \omega_0 e_i, \\ e_i s_i &= e_i = s_i e_i, \\ s_i s_j &= s_j s_i \quad (|i - j| \geq 2), \\ s_i e_j &= e_j s_i, & e_i e_j &= e_j e_i \quad (|i - j| \geq 2) \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i x_j &= x_j s_i, & e_i x_j &= x_j e_i \quad (j \neq i, i+1) \\ x_i x_j &= x_j x_i, \\ s_i x_i - x_{i+1} s_i &= e_i - 1, \\ x_i s_i - s_i x_{i+1} &= e_i - 1, \\ e_{i+1} e_i e_{i+1} &= e_{i+1}, & e_i e_{i+1} e_i &= e_i, \\ s_i e_{i+1} e_i &= s_{i+1} e_i, & e_{i+1} e_i s_{i+1} &= e_{i+1} s_i, \\ e_i(x_i + x_{i+1}) &= 0 = (x_i + x_{i+1})e_i, \\ e_1 x_1^a e_1 &= \omega_a e_1. \end{aligned}$$

$\{s_i, e_i\}_{1 \leq i < n}$ は Brauer 代数を生成し, $\{x_j\}_{1 \leq j \leq n}$ は多項式環を生成するが, affine Wenzl 代数は Brauer 代数と多項式環のテンソル積にはならない. また, $e_1 = 0$ とおくことにより退化 affine Hecke 環は $\mathcal{W}_n(\Omega)$ の商代数である.

我々の目標は affine Wenzl 代数の有限次元表現の研究である. $\mathcal{W}_n(\Omega)$ が退化 affine Hecke 環の引き戻しでない有限次元表現をもつための必要条件を与えよう.

定義 18. $\Omega \subset F$ が有理的パラメータ集合とは $a_1, \dots, a_d \in F$ と k_0 が存在して, $k \geq k_0$ に対し

$$\omega_k + a_1 \omega_{k-1} + \dots + a_d \omega_{k-d} = 0$$

が成り立つときをいう.

補題 19. Ω が有理的パラメータ集合でなければ, $\mathcal{W}_n(\Omega)$ の有限次元表現は退化 affine Hecke 環の有限次元表現の引き戻しである.

Ω が有理的パラメータ集合としよう. $\mathcal{W}_n(\Omega)$ の有限次元既約表現を全部構成したい. そのため, $\mathcal{W}_n(\Omega)$ の巡回商を導入する.

定義 20. $v_1, \dots, v_m \in F$ とし, $f(x_1) = (x_1 - v_1) \cdots (x_1 - v_m)$ の生成する $\mathcal{W}_n(\Omega)$ の両側イデアルを \mathcal{I}_f とかき,

$$\mathcal{W}_n(\Omega, f) = \mathcal{W}_n(\Omega) / \mathcal{I}_f$$

を $\mathcal{W}_n(\Omega)$ の巡回商とよぶ.

affine Hecke 環のときと違い, この環の次元がつねに期待される $m^n(2n-1)!!$ になるとは限らない.

定義 21. Schur の q -関数 $q_a(\mathbf{v})$ とは次式で定まる多項式である.

$$\prod_{i=1}^m \frac{1 + v_i t}{1 - v_i t} = \sum_{a \geq 0} q_a(\mathbf{v}) t^a.$$

定理 22. Ω が次式で与えられるならば, $\mathcal{W}_n(\Omega, f)$ の次元は $m^n(2n-1)!!$ である.

$$\omega_a = q_{a+1}(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}(-1)^m q_a(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \delta_{a0}.$$

実際, 基礎体 F を任意の環 R にしたとき, ランクが $m^n(2n-1)!!$ の自由 R -加群になる.

以下, 定理 22 の条件を仮定し, 巡回商を巡回 Nazarov-Wenzl 代数と呼び, $\mathcal{W}_n(\mathbf{v})$ で表わそう. 我々の結果においてもっとも本質的なのは次の定理である.

定理 23. $\mathcal{W}_n(\mathbf{v})$ は cellular 代数である.

系として, 次も得られる. これは退化 affine Hecke 環の Kleshchev の結果の BC 型版である.

定理 24. $\omega_0 \neq 0$ とする. このとき $\mathcal{W}_n(\mathbf{v})$ の既約表現は, 整数 $0 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ と (\mathbf{v} から定まる) 結晶グラフの $n - 2f$ 次部分の頂点の対 (f, b) でパラメトライズされる.

affine Wenzl 代数の任意の有限次元表現が定理 22 の条件をみたす Nazarov-Wenzl 代数の表現になっていることを証明することができる. すなわち,

定理 25. $\mathcal{W}_n(\Omega)$ の有限次元既約表現はある $\mathcal{W}_n(\mathbf{v})$ の既約表現の引き戻しである.

この定理と上記の結果を合わせると, $\mathcal{W}_n(\Omega)$ のすべての有限次元既約表現を構成できたことになる.

ついでながら, $\mathcal{W}_n(\mathbf{v})$ が quasi-hereditary 代数になるための必要十分条件も得られた.

定理 26. $\mathcal{W}_n(\mathbf{v})$ が quasi-hereditary になるのは, F の標数 $\ell > n$ かつ $\{v_i\}_{1 \leq i \leq m}$ が次の条件をみたすときである: $d \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$v_i - v_j = d \cdot 1 \Rightarrow |d| \geq n.$$

affine Wenzl 代数のかわりに affine Sergeev 代数を考えたらどうなるか, BC 型鈴木関手の性質, Yangian と affine Wenzl 代数の関係などの問題が考えられるが, 現在のところわからない.

References

- [AMR] S. Ariki, A. Mathas and H. Rui, Cyclotomic Nazarov-Wenzl algebras, **math.QA/0506467**.
- [BLM] A. Beilinson, G. Lusztig and R. MacPherson, A geometric setting for the quantum deformation of GL_n , *Duke Math. J.* **61** (1990), 655–677.
- [CPS1] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Algebraic stratification in representation categories, *J. Algebra* **117** (1988), 504–521.
- [CPS2] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Finite-dimensional algebras and highest weight categories, *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), 85–99.
- [CPS3] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Duality in highest weight categories, in *Classical groups and related topics (Beijing, 1987)*, *Contemp. Math.* **82** (1989), 7–22.
- [CPS4] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Integral and graded quasi-hereditary algebras I, *J. Algebra* **131** (1990), 126–160.
- [CPS5] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Abstract Kazhdan-Lusztig theories, *Tohoku Math. J. (2)* **45** (1993), 511–534.
- [CPS6] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, The homological dual of a highest weight category, *Proc. London Math. Soc. (3)* **68** (1994), 294–316.
- [CPS7] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Integral and graded quasi-hereditary algebras I, *J. Algebra* **131** (1990), 126–160.
- [CPS8] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Graded and non-graded Kazhdan-Lusztig theories, in *Algebraic groups and Lie groups*, *Austral. Math. Soc. Lect. Ser.*, **9** (1997), 105–125.
- [DX] Bangming Deng and Changchang Xi, Quasi-hereditary algebras and Δ -good modules, in *Representations of algebra I, II*, Beijing Norm. Univ. Press (2002), 49–73.
- [DJ] R. Dipper and G. James, The q -Schur algebra, *Proc. London Math. Soc. (3)* **59** (1989), 23–50.
- [DJM] R. Dipper, G. James and A. Mathas, Cyclotomic q -Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385–416.
- [D] V. Dlab, Quasi-hereditary algebras, Appendix to Y. Drozd and V. Kirichenko, *Finite-dimensional algebras*, Springer-Verlag, 1994.
- [DR1] V. Dlab and C. Ringel, Quasi-hereditary algebras, *Illinois J. Math.* **33** (1989), 280–291.
- [DR2] V. Dlab and C. Ringel, A construction for quasi-hereditary algebras, *Compositio Math.* **70** (1989), 155–175.

- [DR3] V. Dlab and C. Ringel, Auslander algebras as quasi-hereditary algebras, *J. London Math. Soc.* (2) **39** (1989), 457–466.
- [DR4] V. Dlab and C. Ringel, The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras, in *Representations of algebras and related topics* (Kyoto, 1990), *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **168** (1992), 200–224.
- [D1] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras I, *J. Algebra* **104** (1986), 310–328.
- [D2] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras II, *J. Algebra* **111** (1987), 354–364.
- [D3] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras III Integral representations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **116** (1994), 37–55.
- [D4] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras IV The blocks of the Schur algebras, *J. Algebra* **168** (1994), 400–429.
- [Do] S. Donkin, *The q -Schur algebra*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **253**, CUP, 1998.
- [Er] K. Erdmann, Symmetric groups and quasi-hereditary algebras, in *Finite-dimensional algebras and related topics* (Ottawa, ON, 1992), *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* **424** (1994), 123–161.
- [KD] K. Erdmann and J. de la Pena, Relative Auslander-Reiten sequences for quasi-hereditary algebras, *Colloq. Math.* **91** (2002), 123–142.
- [GH] F. Goodman and H. Hauschild, Affine Birman-Wenzl-Murakami Algebras and Tangles in the Solid Torus, **math.QA/0411155**.
- [Gu] N. Guay, Projective modules in the category \mathcal{O} for the Cherednik algebra, *J. Pure Appl. Algebra* **182** (2003), 209–221.
- [GGOR] V. Ginzburg, N. Guay, E. Opdam and R. Rouquier, On the category \mathcal{O} for rational Cherednik algebras, *Invent. Math.* **154** (2003), 617–651.
- [GL] J. Graham and G. Lehrer, Cellular algebras, *Invent. Math.* **123** (1996), 1–34.
- [Gr] J. A. Green, *Polynomial representations of GL_n* , *Lecture Notes in Math.* **830**, Springer, 1980.
- [Kl] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, **163**, CUP, 2005.
- [K1] S. König, A guide to exact Borel subalgebras of quasi-hereditary algebras, in *Representations of algebras* (Ottawa, ON, 1992), *CMS Conf. Proc.* **14** (1993), 291–308.

- [K2] S. König, Exact Borel subalgebras of quasi-hereditary algebras I, With an appendix by Leonard Scott, *Math. Z.* **220** (1995), 399–426.
- [K3] S. König, Exact Borel subalgebras of quasi-hereditary algebras II, *Comm. Algebra* **23** (1995), 2331–2344.
- [K4] S. König, Strong exact Borel subalgebras of quasi-hereditary algebras and abstract Kazhdan-Lusztig theory, *Adv. Math.* **147** (1999), 110–137.
- [K5] S. König, Strong exact Borel subalgebras and global dimensions of quasi-hereditary algebras, in *Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994)*, *CMS Conf. Proc.* **18** (1996), 399–417.
- [KX1] S. König and Changchang Xi, On the structure of cellular algebras, in *Algebras and modules II (Geiranger, 1996)*, *CMS Conf. Proc.* **24** (1998), 365–386.
- [KX2] S. König and Changchang Xi, Cellular algebras and quasi-hereditary algebras: a comparison, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **5** (1999), 71–75.
- [KX3] S. König and Changchang Xi, On the number of cells of a cellular algebra, *Comm. Algebra* **27** (1999), 5463–5470.
- [KX4] S. König and Changchang Xi, When is a cellular algebra quasi-hereditary?, *Math. Ann.* **315** (1999), 281–293.
- [KX5] S. König and Changchang Xi, Cellular algebras: inflations and Morita equivalences, *J. London Math. Soc. (2)* **60** (1999), 700–722.
- [KX6] S. König and Changchang Xi, A self-injective cellular algebra is weakly symmetric, *J. Algebra* **228** (2000), 51–59.
- [LX] Weixia Li and Changchang Xi, The number of simple modules of a cellular algebra, *Sci. China Ser. A* **48** (2005), 735–745.
- [L1] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **67** (1988), 145–202.
- [L2] G. Lusztig, Affine Hecke algebras and their graded version, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 599–635.
- [L3] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras II, in *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, *CMS Conf. Proc.* **16** (1995), 217–275.
- [L4] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras III, *Represent. Theory* **6** (2002), 202–242.
- [Ma] S. Martin, *Schur algebras and representation theory*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, **112**, CUP, 1993.

- [Na] M. Nazarov, Young's orthogonal form for Brauer's centralizer algebra, *J. Algebra* **182** (1996), 664–693.
- [OR] R. Orellana and A. Ram, Affine braids, Markov traces and the category \mathcal{O} , **math.RT/0401317**.
- [P1] B. Parshall, The Ext algebra of a highest weight category, in *Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **424** (1994), 213–222.
- [P2] B. Parshall, Koszul algebras and duality, in *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, CMS Conf. Proc. **16** (1995), 277–285.
- [Ri] C. Ringel, The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, *Math. Z.* **208** (1991), 209–223.
- [Ro] R. Rouquier, q -Schur algebras and complex reflection groups I, **math.RT/0509252**.
- [XX] Changchang Xi and Dajing Xiang, Cellular algebras and Cartan matrices, in *Special issue on linear algebra methods in representation theory*, *Linear Algebra Appl.* **365** (2003), 369–388.
- [X1] Changchang Xi, Representation dimension and quasi-hereditary algebras, *Adv. Math.* **168** (2002), 193–212.
- [X2] Changchang Xi, Standardly stratified algebras and cellular algebras, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **133** (2002), 37–53.