

# $\ell$ 進層の特性類と分岐について

東京大学数理科学研究科 齋藤 毅

## 概要

$\ell$  進層に対し、特性類が定義される．特性類は  $\ell$ -進層の暴分岐と結びついている．暴分岐を Galois 被覆で消すことで、特性類を Swan 類で表わせる．また、暴分岐を直積内の対角内の分岐因子でブローアップして消すことで、特性類の精密化として、特性サイクルが得られる．これは、分岐群の理論を用いて定義され、 $D$  加群の超局所解析の類似である．

## 目次

1	特性類	1
2	Swan 類	3
3	分岐群	4
4	特性サイクル、超局所解析との類似	7

## 1 特性類

この節では、 $\ell$  進層に対し、特性類を定義し、その基本的な性質を記述する． $\ell$  進層の特性類は、名前こそそのように呼ばれていないものの、実質的には [4] で定義されている．詳しくは、[3] で調べられている．

$k$  を標数  $p > 0$  の体とし、 $X$  を  $k$  上有限型な分離スキームとする． $\ell \neq p$  を素数とし、 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の  $\ell$  進層とする． $a: X \rightarrow k$  を構造射とし、 $K_X = a^! \mathbb{Q}_\ell$  とおく． $\mathcal{F}$  の特性類

$$C(\mathcal{F}) \in H^0(X, K_X)$$

を下のように定義する． $X$  が  $k$  上スムーズかつ  $d$  次元なら、 $H^0(X, K_X) = H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(d))$  であり、 $C(\mathcal{F})$  は  $H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(d))$  の元として定義される．

$\mathcal{F}$  の恒等写像  $1 \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  を考える．標準的な同一視

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) &= H_X^0(X \times X, R\text{Hom}(p_2^* \mathcal{F}, Rp_1^! \mathcal{F})) \\ &= H_X^0(X \times X, R\text{Hom}(p_1^* \mathcal{F}, Rp_2^! \mathcal{F})) \end{aligned}$$

と、自然なペアリング  $RHom(p_2^*\mathcal{F}, Rp_1^!\mathcal{F}) \otimes RHom(p_1^*\mathcal{F}, Rp_2^!\mathcal{F}) \rightarrow K_{X \times X}$  によって定まるカップ積

$$\langle 1, 1 \rangle \in H_X^0(X \times X, K_{X \times X})$$

を考える．ここで， $X$  は対角射  $X \rightarrow X \times X$  により， $X \times X$  の閉部分スキームと考える． $p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$  は，射影を表わす．台つきコホモロジー  $H_X^0(X \times X, K_{X \times X})$  は  $H^0(X, K_X)$  と標準的に同一視されるので，次のように定義する．

定義 1 (cf. [4]) 特性類

$$C(\mathcal{F}) \in H^0(X, K_X)$$

を，カップ積  $\langle 1, 1 \rangle$  として定義する．

スキーム  $X$  がスムーズかつ  $d$  次元で，層  $\mathcal{F}$  がスムーズかつ階数  $r$  なら，

$$C(\mathcal{F}) = r \cdot (X, X)_{X \times X} = r \cdot (-1)^d c_d(\Omega_{X/k}^1)$$

である．まん中の式は， $X \times X$  の中で対角  $X$  の自己交点積を表わす． $c_d$  は  $d$  次の Chern 類である．

$X$  が固有なら，Lefschetz 跡公式 ([4])

$$\text{Tr } C(\mathcal{F}) = \chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$$

により，Euler 数  $\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2 \dim X} (-1)^q \dim H^q(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$  が，特性類のトレース射  $\text{Tr}: H^0(X, K_X) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$  による像として計算できる．

devisage により，特性類の計算は，スムーズ開部分スキーム  $j: U \rightarrow X$  上のスムーズ  $\ell$  進層  $\mathcal{F}$  に対する，差

$$C(j_!\mathcal{F}) - \text{rank } \mathcal{F} \cdot C(j_!\mathbb{Q}_\ell)$$

の計算に帰着される． $\mathcal{F}$  の境界  $X \setminus U$  に沿っての分岐が穏なら，差は 0 である．したがって，問題は暴分岐の扱いである．

暴分岐の寄与は，暴分岐を消し，その消え方をみることによって，調べることができる．暴分岐の消し方には，次の 2 通りがある．

1. 有限 Galois 被覆．
2. 直積内の対角での blow-up

第 1 の方法は，古くからとられているものである．これによれば，特性類を Swan 類で表わせる．第 2 の方法は新しいもので，これにより，特性類を分岐群と結びつけて計算できる．第 2 の方法には， $\mathcal{D}$  加群の理論における超局所解析との類似がみられる．

## 2 Swan 類

この節では、 $\ell$  進層の Swan 類の定義 [7] を紹介し、特性類との関係 [3] を与える。

$j: U \rightarrow X$  を開埋め込みとし、 $\mathcal{F}$  を  $U$  上のスムーズ  $\ell$  進層とする。Swan 類  $\text{Sw } \mathcal{F} \in CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}$  を、境界に台をもつ 0 輪体類として定義する。

簡単のため、有限エタール Galois 被覆  $V \rightarrow U$  で、 $\mathcal{F}$  のひきもどしが定数層となるものが存在すると仮定する。  $M$  を、 $\mathcal{F}$  に対応する Galois 群  $G$  の表現とする。一般の場合の定義には、Brauer 跡を用いる。さらに簡単のため、曲線の場合を考える。高次元では、オルタレーションをとる必要がある。

$X \supset U$  と  $Y \supset V$  をスムーズなコンパクト化とする。境界の各点  $y \in Y \setminus V$  に対し、 $(y, y)$  での  $Y \times Y$  のブローアップ  $(Y \times Y)' \rightarrow Y \times Y$  を、log ブローアップとよぶ。対角射  $T \rightarrow Y \times Y$  は、log 対角射  $Y \rightarrow (Y \times Y)'$  をひきおこす。log 対角射  $Y \rightarrow (Y \times Y)'$  の像を、 $\Delta_Y^{\log}$  で表わす。

$G$  の元  $\sigma \neq 1$  をとる。 $(Y \times Y)'$  での、グラフ  $\Gamma_{\sigma} \subset V \times V$  の閉包  $\tilde{\Gamma}_{\sigma}$  は、図のようになる。図の右上のように、 $\tilde{\Gamma}_{\sigma}$  と log 対角  $\Delta_Y^{\log}$  が交わらない点での  $\sigma$  の分岐は穏であり、

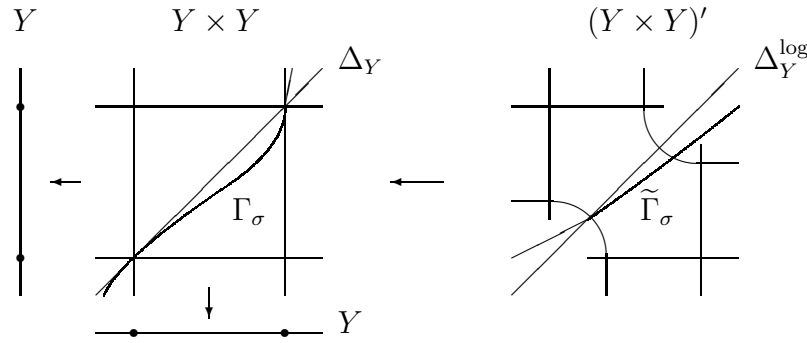


図 1: log ブローアップ

左下のように、 $\tilde{\Gamma}_{\sigma}$  と  $\Delta_Y^{\log}$  の像が交わる点での、 $\sigma$  の分岐は暴である。

Swan 指標類  $s_{V/U}(\sigma) \in CH_0(Y \setminus V)$  を、

$$s_{V/U}(\sigma) = \begin{cases} -(\Gamma_{\sigma}, \Delta_Y^{\log})_{(Y \times Y)'} & \text{if } \sigma \neq 1 \\ -\sum_{\tau \neq \sigma} s_{V/U}(\tau) & \text{if } \sigma = 1 \end{cases}$$

で定める。右辺は、log ブローアップ  $(Y \times Y)'$  の中での log 対角  $Y = \Delta_Y^{\log}$  との交点積を、 $Y$  上のサイクル類とみたものを表わす。

Swan 類  $\text{Sw } \mathcal{F} \in CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}$  は、

$$\text{Sw } \mathcal{F} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} f_{*} s_{V/U}(\sigma) \text{Tr}(\sigma : M)$$

で定義される． $f_*$  は，射  $f : Y \rightarrow X$  による像を表わす．曲線の場合には，Swan 類の定義は，Swan 導手の古典的な定義を幾何的に言いかえただけである．

$\text{cl} : CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^0(X, K_X)$  をサイクル写像とすると，次がなりたつと考えられる．

予想 2

$$C(j_i \mathcal{F}) = \text{rank } \mathcal{F} \cdot C(j_i \mathbb{Q}_\ell) - \text{cl Sw } \mathcal{F}.$$

この予想は，簡単な技術的仮定のもとで示されている [3]．この仮定は特異点の解消がなりたつかあるいは， $U$  の有限エタール被覆で  $\mathcal{F}$  のひきもどしが定数層となるものがあれば，みたされている．

予想の証明されている場合より，Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の高次元化が仮定なしにしたがう．

系 3 [7]

$$\chi_c(U_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \text{rank } \mathcal{F} \cdot \chi_c(U_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) - \text{deg Sw } \mathcal{F}$$

がなりたつ．

予想の証明の過程で，次の，開多様体に対する Lefschetz 跡公式が示される．記号を変えて， $X$  を  $k$  上の固有スムーズ多様体とし， $U \subset X$  を単純正規因子  $D$  の補開部分多様体とする． $\Gamma$  を  $U \times U$  の閉部分スキームとする． $\tilde{\Gamma} \subset (X \times X)'$  を log ブローアップの中での閉包とし， $(D \times X)'$  と  $(X \times D)'$  をそれぞれ  $D \times X$  と  $X \times D$  の固有変換とする．

定理 4 [7]  $\tilde{\Gamma} \cap (D \times X)' \subset \tilde{\Gamma} \cap (X \times D)'$  と仮定する．このとき， $H_c^*(U_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$  の自己準同形  $\Gamma^*$  が定義され，

$$\text{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)) = (\tilde{\Gamma}, \Delta)_{(X \times X)'}$$

がなりたつ．

右辺は log ブローアップ  $(X \times X)'$  の中での交点数を表わす．左辺は跡の交代和である．

### 3 分岐群

剰余体が一般の局所体の絶対 Galois 群の分岐群によるフィルトレーションが，[1], [2] で定義され調べられている．これまでにわかっていることを，簡単にまとめておく．分岐群について，いろいろなことを証明するには，リジッド幾何が必要になることが多いが，結果を述べるだけなら，代数幾何のことばで十分なことが多い．

$X$  を  $k$  上のスムーズ多様体とし,  $D$  をスムーズな既約因子とする.  $\xi$  を  $D$  の生成点とし,  $S = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$  とおき,  $K$  を  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$  の分数体,  $\eta = \text{Spec } K$  とする.  $K$  は完備離散付値体であり,  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$  はその付値環である. 絶対 Galois 群  $G_K = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$  の,  $\log$  分岐群による減少フィルトレーション  $G_K^{r,\log}$ , ( $r \in \mathbb{Q}, r \geq 0$ ) は次の性質をもつ. 有理数  $r \geq 0$  に対し,  $G_K^{r,\log} = \overline{\bigcup_{s>r} G_K^{s,\log}}$  とおく.  $G_K^{0,\log}$  は惰性群  $I$  であり,  $G_K^{0+,\log}$  は暴惰性群, つまり  $I$  の pro- $p$  惰性群  $P$  である.

$\mathcal{F}$  を  $U = X \setminus D$  上のスムーズ  $\ell$  進層とする.  $G_K^{0+,\log}$  が pro- $p$  群なので,  $G_K$  の  $\ell$  進表現  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  の直和分解

$$\mathcal{F}_{\bar{\eta}} = \bigoplus_{r \geq 0, r \in \mathbb{Q}} \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(r)}$$

で, 固定部分  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{G_K^{r+,\log}}$  が  $\bigoplus_{s \leq r} \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(s)}$  となるものが定まる. さらに,  $r > 0$  ならば, 各直和成分  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(r)}$  は,  $G_K^{r,\log}/G_K^{r+,\log}$  の指標による直和分解

$$\mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(r)} = \bigoplus_{\chi \in (G_K^{r,\log}/G_K^{r+,\log})^*} \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(r,\chi)}$$

をもつ.

以下, 簡単のため,  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(r)}$  とする. たとえば,  $\mathcal{F}$  が既約なら, これはなりたつ. 条件  $r = 0$  は,  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  の分岐が穏なことと同値なので, 以下  $r > 0$  の場合を考える.  $\log$  smooth 局所的には,  $r$  は整数としてよい. 以下  $r > 0$  を正の整数と仮定する.

$X \times_k S$  の閉部分スキーム  $D \times_k \xi$  でのブローアップから,  $D \times S$  と  $X \times \xi$  の固有変換を除いたものを  $\log$  積とよび,  $(X \times_k S)^\sim$  で表わす.  $S \rightarrow (X \times_k S)^\sim$  を  $\log$  対角射とする. 第 2 射影  $(X \times_k S)^\sim \rightarrow S$  に関する閉ファイバーは, 対数接束  $TX^{\log} = \mathbf{V}(\Omega_{X/k}^1(\log D)) = \text{Spec } S^\bullet(\Omega_{X/k}^1(\log D)) \rightarrow X$  の  $\xi$  上のファイバーである.

$D_{w,S}$  を  $S$  の因子  $r\xi$  とする. これを  $\log$  対角射により,  $(X \times_k S)^\sim$  の閉部分スキームとみて,  $(X \times_k S)^\sim$  を  $D_{w,S}$  でブローアップする. このブローアップから, 閉ファイバーの

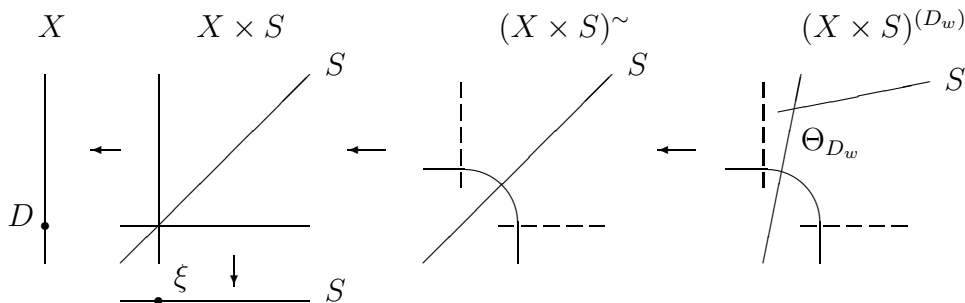


図 2: 暴ブローアップ

固有変換を除いたものを,  $(X \times_k S)^{(D_w)}$  で表わす. 第2射影  $(X \times_k S)^{(D_w)} \rightarrow S$  に関する閉ファイバー  $\Theta_{D_w}$  は, ひねった対数接束  $TX^{\log}(-rD) = \mathbf{V}(\Omega_{X/k}^1(\log D)(rD)) \rightarrow X$  の  $\xi$  上のファイバーである.

定理 5  $r > 0$  を正の整数とする.

1.  $\chi$  を部分商  $G_K^{r,\log}/G_K^{r+,\log}$  の指標とする.

(1) 指標  $\chi$  は,  $\Theta_{D_w}$  上の階数 1 の非自明なスムーズ層  $\mathcal{L}_\chi$  を定める.

(2)  $\mathcal{L}_\chi$  の Fourier-Deligne 変換は, 双対空間  $\Theta_{D_w}^*$  の  $\kappa(\xi)$  上純非分離な 0 でない閉点に台をもつ.

2.  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(r)}$  をみたす  $U = X \setminus D$  上のスムーズ  $\ell$  進層とする. 第2射影  $(X \times_k S)^{(D_w)} \rightarrow S$  に関する  $\Theta_{D_w}$  上の隣接輪体層  $\psi(pr_1^* \mathcal{F})$  は, 標準同形

$$\psi(pr_1^* \mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{\chi} \mathcal{L}_\chi \otimes pr_2^* \psi(\mathcal{F}^{(\chi)})$$

をもつ.

1(1) と 2 は [1] II で示されている. 2 の同形は次のように, 分岐がブローアップで消せることを表わしている. 定数変形  $X \times S$  への  $\mathcal{F}$  のひきもどし  $pr_1^* \mathcal{F}$  を考え, さらにその暴ブローアップ  $(X \times_k S)^{(D_w)}$  へのひきもどしを考える. これの  $\Theta_{D_w}$  に沿った分岐は隣接輪体層  $\psi(pr_1^* \mathcal{F})$  で測れる. 2 の同形によれば, これは,  $\mathcal{F}$  の階数と等しい階数をもつ. さらにこの分岐は,  $K$  の分離閉包までいけば自明になる. つまり, 分岐は,  $S$  の定数拡大によって消すことができる.

1(2) は新しい結果であり,  $\Theta_{D_w}$  上の階数 1 の層  $\mathcal{L}_\chi$  が,  $\Theta_{D_w}$  上の加法的多項式が定める Artin-Schreier 層であるということである. このことから, 部分商  $G_K^{r,\log}/G_K^{r+,\log}$  が  $p$  倍で消える Abel 群であり, 指標群からの単射

$$(1) \quad \text{Hom}(G_K^{r,\log}/G_K^{r+,\log}, \mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Hom}_{\kappa(\xi)}(m_K^r/m_K^{r+1}, \Omega_{X/k}^1(\log D) \otimes \overline{\kappa(\xi)})$$

が定まることが従う. 1(2) の証明は, 2 の同形を使ってなされる. 詳しくは論文を準備中である.

単射 (1) を用いて, Hasse-Arf の定理を, 弱めた形で一般化することができる.

系 6  $\text{Sw}_\eta(\mathcal{F}) = \sum_r r \dim \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(r)}$  と定義すると,  $\text{Sw}_\eta(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$  である.

定理の証明と同じ考えに基づいて, 正標数の局所体の絶対 Galois 群の Abel 商について, 加藤氏が定義した分岐群のフィルトレーション [6] と, Abbes-斎藤氏が定義した log 分岐群のフィルトレーションが一致することが示される [2].

## 4 特性サイクル、超局所解析との類似

この節では、適当な仮定のもとに  $\ell$  進層の特性サイクルが対数余接層上のサイクルとして定義でき、それを使って特性類を表わせることをみる。さらに、 $\mathbb{C}$  上の多様体上の  $D$  加群の特異台との類似について考える。

$X$  が  $k$  上スムーズとし、 $D = \sum_i D_i$  を  $X$  の単純正規因子、 $U = X \setminus D$  とする。 $\mathcal{F}$  を  $U$  上のスムーズ  $\ell$  進層とする。次の仮定をおく。

各既約成分  $D_i$  に対し、 $\mathcal{F}_{\bar{\eta}_i} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}_i}^{(r_i)}$ 、 $r_i \in \mathbb{N}$  である。 $r_i > 0$  ならば、 $G_{\eta_i}^{r_i, \log} / G_{\eta_i}^{r_i+1, \log}$  の指標  $\chi_i$  で、 $\mathcal{F}_{\bar{\eta}_i} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}_i}^{(\chi_i)}$  をみたすものがある。 $D_w = \sum_i r_i D_i$ 、 $D_w^0 = \sum_{i, r_i > 0} D_i$  とおく。さらに、 $O_{D_w^0}$  加群の、いたるところ 0 でない射

$$(2) \quad O_{D_w^0}(-D_w) \rightarrow \Omega_{X/k}(\log D) \otimes_{O_X} O_{D_w^0}$$

で、各生成点  $\xi_i \in D_i$  での stalk が、 $\mathcal{L}_{\chi_i}$  の Fourier-Deligne 変換の台を与えるものがある。

このとき、次がなりたつ。

定理 7  $d = \dim X$  とすると

$$C(j_! \mathcal{F}) = \text{rank} \mathcal{F} \cdot (-1)^d c_d(\Omega_{X/k}^1(\log D)(D_w)).$$

これは、階数 1 の場合の加藤氏による結果の一般化である。

証明の概略は次のとおりである。 $(X \times X)'$  を log ブローアップとし、 $X \subset (X \times X)'$  を log 対角とする。 $(X \times X)^{(D_w)} \rightarrow (X \times X)'$  を、log 対角の中の Swan 因子  $D_w$  でのブローアップとする。ブローアップ  $(X \times X)^{(D_w)} \rightarrow (X \times X)'$  の例外因子  $E$  は、ひねった対数接束  $T_X^{\log}(-D_w) = \mathbf{V}(\Omega_{X/k}(\log D)(D_w))$  の  $D_w^0$  への制限である。 $U \times U$  上の層  $\mathcal{H}$  を  $\mathcal{H} = \text{Hom}(p_2^* \mathcal{F}, p_1^* \mathcal{F})$  で定め、 $j : U \times U \rightarrow (X \times X)^{(D_w)}$  を開埋め込みとする。 $j_* \mathcal{H}$  の  $E$  への制限は、 $\mathcal{L}_X$  の直和と同形である。このことを使って、 $1 \in H_X^0((X \times X)^{(D_w)}, j_* \mathcal{H}(d)[2d])$  が定義される。さらに、

$$C(j_! \mathcal{F}) = \text{Tr} \langle 1, 1 \rangle = \text{rank} \mathcal{F} \cdot (X, X)_{(X \times X)^{(D_w)}}$$

が示せる。真ん中の式はカップ積であり、右の式は交点積である。 $(X, X)_{(X \times X)^{(D_w)}} = (-1)^d c_d(\Omega_{X/k}^1(\log D)(D_w))$  より、定理の式がしたがう。これも、詳しくは論文を準備中である。

定理 7 の仮定のもとで、 $\mathcal{F}$  の特性サイクルを、対数余接束  $T^* X^{\log} = \mathbf{V}_X(\Omega_{X/k}(\log D)^*)$  の  $d$  次元サイクルとして、次のように定義することができる。 $O_{D_w^0}$  加群の射 (2) は、 $D_w^0$  上の直線束の対数余接束への閉埋め込み

$$\mathbf{V}_{D_w^0}(O_{D_w^0}(D_w)) \rightarrow T^* X^{\log}$$

を定める． $T^*X^{\log}$  の  $d$  次元サイクルを

$$Ch(\mathcal{F}) = \text{rank } \mathcal{F} \cdot [\mathbf{V}_{D_w^0}(O_{D_w^0}(D_w))]$$

で定めると，定理の式は，

$$C(j_i \mathcal{F}) - \text{rank } \mathcal{F} \cdot C(j_i \mathbb{Q}_\ell) = -([Ch(\mathcal{F})], 0)_{T^*X^{\log}}$$

と書き直すことができる．左辺は，ベクトル束  $T^*X^{\log}$  内での 0 切断との交点積である．特性サイクル  $Ch(\mathcal{F})$  は， $\mathcal{H} = \text{Hom}(p_2^* \mathcal{F}, p_1^* \mathcal{F})$  の，隣接輪体層をとり，さらにこれに Fourier-Deligne 変換を適用することによって定義されていることに注意しておく．

$\mathbb{C}$  上の多様体上の倒錯層あるいは  $\mathcal{D}_X$  加群の特性サイクルあるいは特異台との間には，次のような類似がある． $\mathbb{C}$  上の多様体については，Riemann-Hilbert 対応とよばれる圏の同値

$$(\text{確定特異点型ホロノミー } \mathcal{D}_X \text{ 加群}) \rightarrow (\mathbb{C}_X \text{ 加群の倒錯層})$$

がある． $\mathcal{D}_X$  加群  $\mathcal{M}$  の特性サイクル  $Ch(\mathcal{M})$  は， $\mathcal{O}_{T^*X} = gr^\bullet(\mathcal{D}_X)$  加群  $gr^\bullet(\mathcal{M})$  の類として定義される．これは，余接束  $T^*X$  上のサイクルである．

柏原-Schapira は，[5] で，特性サイクル  $CC(\mathcal{F})$  を，余接束  $T^*X$  上のサイクルとして，Riemann-Hilbert 対応を使わずに，次のように直接定義した． $X$  を  $d$  次元複素多様体とする．まず  $X \times X$  上の層の複体  $\mathcal{H} = R\text{Hom}(pr_2^* \mathcal{F}, pr_1^* \mathcal{F})$  を考える． $X \rightarrow X \times X$  の，接束  $X \rightarrow TX$  への変形を考え，隣接輪体関手を  $\mathcal{H}$  に適用することにより， $\nu\text{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  が接束  $TX$  上に定義される．さらに，Fourier-佐藤変換を適用して， $\mu\text{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  が  $T^*X$  上に定義される． $\mu\text{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  の台として，特異台  $SS(\mathcal{F})$  が  $T^*X$  の閉集合として定義される．さらに， $SS(\mathcal{F})$  に台をもつ  $\mu\text{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  の標準切断の像として，特性サイクル  $CC(\mathcal{F})$  が  $H_{SS(\mathcal{F})}^{2d}(T^*X, \mathbb{C}_{T^*X})$  の元として定義される (loc. cit. Definition 9.4.1)． $\dim_{\mathbb{C}} SS(\mathcal{F}) = d$  だから，特性サイクル  $CC(\mathcal{F})$  は  $T^*X$  の  $d$  次元サイクルと考えることができる． $CC(\mathcal{F})$  の  $H^{2d}(T^*X, \mathbb{C}_{T^*X}) = H^{2d}(X, \mathbb{C}_X)$  での像は，特性類  $C(\mathcal{F})$  と一致する (loc. cit. Proposition 9.5.1) ．

Verdier は  $\ell$  進層について、柏原-Schapira と同様の構成を考えた [8] が，その方法では，暴分岐をとらえることができない．この節の構成は，隣接輪体関手を  $\mathcal{H}$  に適用し，さらに，Fourier-Deligne 変換を適用するという点で，柏原-Schapira の構成と著しい類似がみられる．ただし， $\ell$  進層の暴分岐に対応する現象は， $\mathcal{D}_X$  加群の不確定特異点と考えられており，より正確な類似が何であるかは，まだよくわかっていない．

## 参考文献

- [1] A. ABBES, T. SAITO, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, Amer. J. of Math. **124** (2002), 879-920; *ibid. II*, Documenta Math., Extra Volume K. Kato (2003), 3-70.



- [2] —, *Analyse micro-locale  $\ell$ -adique en caractéristique  $p > 0$ : Le cas d'un trait*, (preprint) [math.AG/0602285](#)
- [3] —, *The characteristic class and ramification of an  $\ell$ -adic étale sheaf*, (preprint) [math.AG/0604121](#)
- [4] A. Grothendieck, rédigé par L. Illusie, *Formule de Lefschetz*, exposé III, SGA 5, Springer LNM **589** (1977) 73-137.
- [5] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag (1990).
- [6] K. Kato, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Algebraic  $K$ -theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), 101–131, Contemp. Math., 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [7] K. KATO, T. SAITO, *Ramification theory for varieties over a perfect field*, (preprint) [math.AG/0402010](#) to appear in Annales of Math.
- [8] J.-L. VERDIER, *Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée*, dans Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque **101-102** (1981), 333-364.