

On the crystal of Lakshmibai–Seshadri paths of a level-zero weight shape

内藤 聡 (Satoshi NAITO)

筑波大学 数学系

Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

naito@math.tsukuba.ac.jp

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)

筑波大学 数学系

Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

sagaki@math.tsukuba.ac.jp

1 Lakshmibai-Seshadri パスの成すクリスタル.

先ず, Lakshmibai-Seshadri パス (LS パス) と, それらの成すクリスタルについて復習する. 詳細については, [L1]–[L3] 等を参照されたい. なお, [L1] や [L2] では \mathfrak{g} が (一般の) Kac-Moody リー環の場合に LS パスの概念を導入しているが, ここでは簡単の為 \mathfrak{g} が simply-laced な (複素) 有限次元単純リー環の場合に説明する.¹

1.1 記号. このセクションで使用する基本的な記号をまとめておく (詳細については, [T, 第3章及び第5章] 等を参照).

\mathfrak{g} : simply-laced, finite-dimensional simple Lie algebra/ \mathbb{C} ,

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: Cartan subalgebra,

$\Pi^\vee = \{h_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}$: simple coroots, $\Pi = \{\alpha_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^*$: simple roots,

Δ : root system of \mathfrak{g} , $\Delta_+ \subset \Delta$: positive roots

$\{\Lambda_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^*$: fundamental weights (i.e., $\Lambda_j(h_k) = \delta_{jk}$ for $k \in I$),

$P := \bigoplus_{j \in I} \mathbb{Z}\Lambda_j$: integral weight lattice,

$P_+ := \sum_{j \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_j$: dominant integral weights,

$r_j \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$: simple reflection with respect to α_j ,

$W = \langle r_j \mid j \in I \rangle \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$: Weyl group of \mathfrak{g} ,

$U_q(\mathfrak{g})$: quantized universal enveloping algebra/ $\mathbb{C}(q)$ associated to \mathfrak{g} .

1.2 Lakshmibai-Seshadri パス. Integral weight $\lambda \in P$ を fix する.

Definition 1.2.1. $\mu, \nu \in W\lambda$ に対して, 以下の条件を満たす $W\lambda$ の元の列 $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ ($\mu_0 = \mu, \mu_k = \nu$) と positive root の列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \Delta_+$ が存在するとき, $\mu > \nu$ と定める: $k \geq 1$ であり, $l = 1, 2, \dots, k$ に対して, $\mu_l = r_{\xi_l}\mu_{l-1}$ かつ $\mu_{l-1}(\xi_l^\vee) < 0$ が成立する. ここで, positive root $\xi \in \Delta_+$ に対して, $r_\xi \in W$ は ξ に関する reflection を表し, ξ^\vee は ξ の dual root を表す. $\mu > \nu$ であるとき, 上の条件を満たす列のうち最長のものの長さ k を $\mathrm{dist}(\mu, \nu)$ で表すことにする.

¹一般の Kac-Moody リー環の場合でも, LS パスや root operator (§1.3 参照) の定義は, ここで述べるものとほぼ同様である. また, このセクションで述べる LS パスに関する事実・定理は, \mathfrak{g} が一般の Kac-Moody リー環の場合でも成立する. (アフィン・リー環の場合については §2.2 参照.)

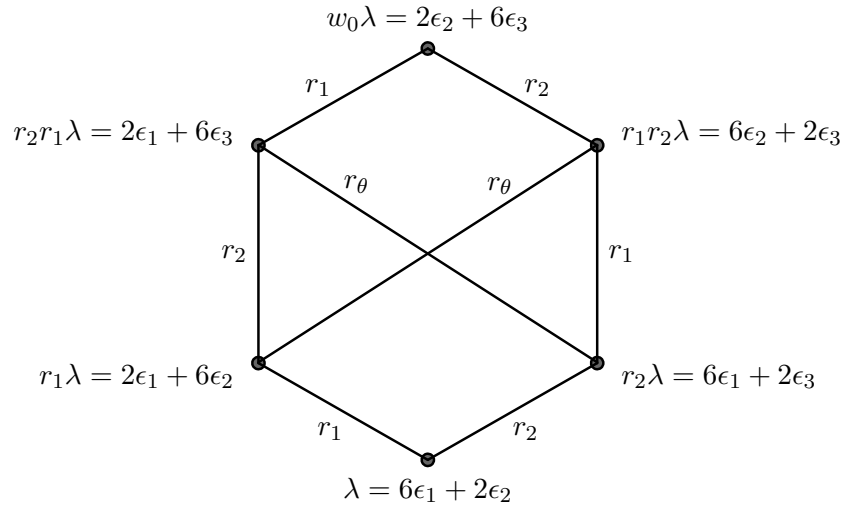
Example 1.2.2. \mathfrak{g} を A_2 型とし (即ち, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$), $\theta := \alpha_1 + \alpha_2 \in \Delta_+$ と置く (highest root; $\theta^\vee = h_1 + h_2$ に注意). また, $w_0 = r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2 \in W$ と置く (longest element).

\mathfrak{g} の Weyl 群 $W \cong S_3$ は, \mathbb{R}^3 の標準 (正規直交) 基底の集合 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ 上に次の様に置換として作用する (e は W の単位元である):

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$r_1 r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad w_0 = r_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

このことを踏まえて, $\lambda = 4\Lambda_1 + 2\Lambda_2 = 6\epsilon_1 + 2\epsilon_2$ のときに, $W\lambda$ 上の (Bruhat) order $>$ についての Hasse 図を描くと次の様になる.



従って, 例えば $\text{dist}(r_1 r_2 r_1 \lambda, \lambda) = 3$ となる.

Definition 1.2.3. $0 < \sigma < 1$ を有理数とし, $\mu, \nu \in W\lambda$, $\mu > \nu$ とする. (μ, ν) に対する σ -chain とは, 以下を満たす $W\lambda$ の元の列 $\mu = \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_k = \nu$ のことである: $k \geq 1$ であり, $l = 1, 2, \dots, k$ に対して, $\text{dist}(\mu_{l-1}, \mu_l) = 1$ かつ $\mu_{l-1}(\xi_l^\vee) \in \sigma^{-1}\mathbb{Z}_{<0}$ が成立する. ここで, $\xi_l \in \Delta_+$ は $\mu_l = r_{\xi_l} \mu_{l-1}$ を満たす唯一つの positive root である ($\mu_{l-1} > \mu_l$, 及び, $\text{dist}(\mu_{l-1}, \mu_l) = 1$ に注意).

Example 1.2.4. Example 1.2.2 の場合を考える.

(1) $(r_1 \lambda)(h_1) = -4$ なので, $(r_1 \lambda, \lambda)$ には, $\frac{1}{4}$ -chain, $\frac{1}{2}$ -chain, $\frac{3}{4}$ -chain が存在する ($\mu_0 = r_1 \lambda$, $\mu_1 = \lambda$, $\xi_1 = \alpha_1$).

(2) $(w_0 \lambda)(h_2) = -4$, $(r_1 r_2 \lambda)(\theta^\vee) = -2$ なので, $(w_0 \lambda, r_1 \lambda)$ には $\frac{1}{2}$ -chain が存在する ($\nu_0 = w_0 \lambda$, $\mu_1 = r_1 r_2 \lambda$, $\mu_2 = r_1 \lambda$, $\xi_1 = \alpha_2$, $\xi_2 = \theta$).

Definition 1.2.5. $W\lambda$ の元の列 $\underline{\nu} : \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s = 1$ の組 $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ が以下の条件 (LS) を満たすとき, π を shape λ の Lakshmibai–Seshadri パス (略して LS パス) と呼ぶ.

(LS) $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_s$ であり, 全ての $u = 1, 2, \dots, s-1$ について, (ν_u, ν_{u+1}) に対する σ_u -chain が存在する.

$\mathbb{B}(\lambda)$ で shape λ の LS パス全体の集合を表す.

Example 1.2.6. Example 1.2.2 の場合を考える. Example 1.2.4 における計算結果により, 以下は shape λ の LS パスである (ウエイトの定義は (1.2.1) と §1.3 参照):

$$\begin{aligned} \left(w_0\lambda, r_1\lambda; 0, \frac{1}{2}, 1 \right) & \quad (\text{ウエイトは } \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3); \\ \left(r_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{4}, 1 \right) & \quad (\text{ウエイトは } 5\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2); \\ \left(r_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{2}, 1 \right) & \quad (\text{ウエイトは } 4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2); \\ \left(r_1\lambda, \lambda; 0, \frac{3}{4}, 1 \right) & \quad (\text{ウエイトは } 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2); \\ \left(w_0\lambda, r_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right) & \quad (\text{ウエイトは } 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3). \end{aligned}$$

この様にして shape λ の LS パスを全て求めると, $\#\mathbb{B}(\lambda) = 60$ であることが分かる. これは, 例えば Weyl の次元公式から分かる様に, 最高ウエイト λ の有限次元既約最高ウエイト \mathfrak{g} -加群の次元に等しい (Theorem 1.4.2 参照).

以下では, LS パスを, 次のルールにより $[0, 1]$ から $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ への区分的に線形で連続な写像 (即ち, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ における折れ線) とみなす. Example 1.2.6 で与えた例

$$\pi = \left(w_0\lambda, r_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right) \in \mathbb{B}(\lambda)$$

を使って説明する.

Example 1.2.7. 先ず, $t = 0$ から $t = \frac{1}{2}$ までは $w_0\lambda$ を方向ベクトルとして進む:

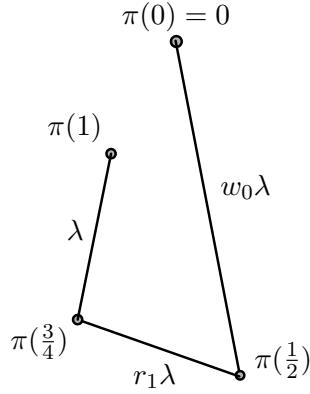
$$\pi(t) = t(w_0\lambda), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

次に, $t = \frac{1}{2}$ の所で方向転換し, ($t = \frac{1}{2}$ から) $t = \frac{3}{4}$ までは $r_1\lambda$ を方向ベクトルとして進む:

$$\pi(t) = \frac{1}{2}w_0\lambda + \left(t - \frac{1}{2} \right) r_1\lambda, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}.$$

最後に, $t = \frac{3}{4}$ の所で方向転換し, ($t = \frac{3}{4}$ から) $t = 1$ までは λ を方向ベクトルとして進む:

$$\pi(t) = \frac{1}{2}w_0\lambda + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) r_1\lambda + \left(t - \frac{3}{4} \right) \lambda, \quad \frac{3}{4} \leq t \leq 1.$$



一般の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対応する区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ は、以下の (1.2.1) で与えられる:

$$\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma}) \in \mathbb{B}(\lambda), \quad \begin{cases} \underline{\nu} : \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s, \\ \underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s = 1, \end{cases}$$

に対して,

$$\pi(t) = \sum_{u'=1}^{u-1} (\sigma_{u'} - \sigma_{u'-1}) \nu_{u'} + (t - \sigma_{u-1}) \nu_u \quad (1.2.1)$$

$$(\sigma_{u-1} \leq t \leq \sigma_u, 1 \leq u \leq s).$$

1.3 $\mathbb{B}(\lambda)$ 上のクリスタル構造. 先ず、クリスタルの公理を復習する。詳細については、[HK, §4.5] 等を参照されたい。

Definition 1.3.1. 集合 \mathcal{B} が (P を weight lattice とする) クリスタル (crystal) であるとは、以下の条件を満たす写像 $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow P$, $e_j, f_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{\mathbf{0}\}$ ($j \in I$), $\varepsilon_j, \varphi_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ($j \in I$) が与えられていることである。ここで、 $\mathbf{0}$ は \mathcal{B} に含まれないある形式的な元であり、 $-\infty$ は $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ ($a \in \mathbb{Z}$) を満たす $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ の最小元である:

- (1) 全ての $b \in \mathcal{B}$ と $j \in I$ について、 $\varepsilon_j(b) = \varepsilon_j(b) + (\text{wt}(b))(h_j)$ が成り立つ。
- (2) $b \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする。もし、 $e_j b \in \mathcal{B}$ であれば、 $\text{wt}(e_j b) = \text{wt}(b) + \alpha_j$ が成り立つ。又、もし $f_j b \in \mathcal{B}$ であれば、 $\text{wt}(f_j b) = \text{wt}(b) - \alpha_j$ が成り立つ。
- (3) $b \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする。もし、 $e_j b \in \mathcal{B}$ であれば、 $\varepsilon_j(e_j b) = \varepsilon_j(b) - 1$, $\varphi_j(e_j b) = \varphi_j(b) + 1$ が成り立つ。
- (4) $b \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする。もし、 $f_j b \in \mathcal{B}$ であれば、 $\varepsilon_j(f_j b) = \varepsilon_j(b) + 1$, $\varphi_j(f_j b) = \varphi_j(b) - 1$ が成り立つ。
- (5) $b, b' \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする。このとき、 $f_j b = b'$ であることと、 $b = e_j b'$ であることは同値である。
- (6) $b \in \mathcal{B}$, $j \in I$ とする。もし $\varepsilon_j(b) = -\infty$ であれば、 $e_j b = f_j b = \mathbf{0}$ である。

\mathcal{B} がクリスタルであるとき、 $b \in \mathcal{B}$ に対して $\text{wt}(b) \in P$ を b の ウェイト (weight) と呼ぶ。又、 $e_j, f_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{\mathbf{0}\}$ ($j \in I$) を \mathcal{B} 上の Kashiwara operator と呼ぶ。

$\lambda \in P$ とする. Shape λ の LS パス全体の集合 $\mathbb{B}(\lambda)$ は, 次の様にしてクリスタルになることが知られている.

Weights. [L2, Lemma 4.5 a)] により, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ ならば $\pi(1) \in P$ である. そこで, $\text{wt} : \mathbb{B}(\lambda) \rightarrow P$ を $\text{wt}(\pi) := \pi(1)$, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$, により定める.

Kashiwara operators. Littelmann によって導入された root operator $e_j, f_j, j \in I$, が, クリスタルの公理における Kashiwara operator の役割を果たす: $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ を fix し,

$$H(t) := (\pi(t))(h_j) \quad (t \in [0, 1]), \quad m := \min\{H(t) \mid t \in [0, 1]\},$$

と置く.

Fact 1.3.2 ([L2, Lemma 4.5 d)]. 関数 $H(t)$ の極小値は全て整数である. 従って, m は 0 以下の整数であり, $H(1) - m$ は 0 以上の整数である.

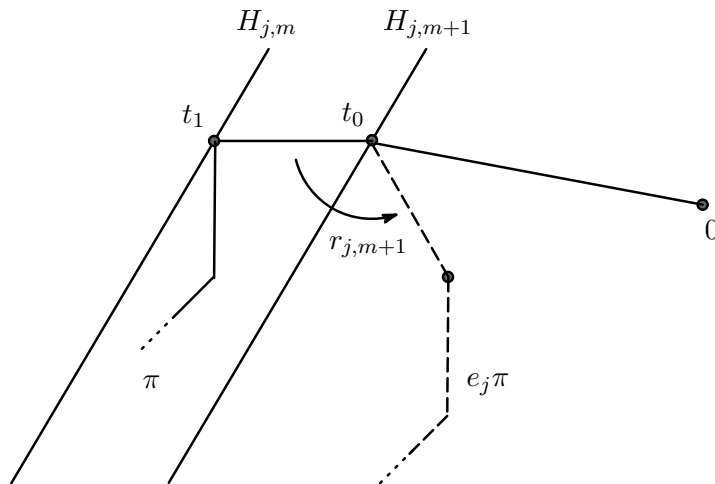
先ず, (raising) root operator $e_j, j \in I$, の定義を述べる. $m = 0$ の場合は, $e_j\pi := \mathbf{0}$ と定める. そして $m \leq -1$ の場合は,

$$(e_j\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & (0 \leq t \leq t_0 \text{ のとき}), \\ r_{j,m+1}(\pi(t)) & (t_0 \leq t \leq t_1 \text{ のとき}), \\ \pi(t) + \alpha_j & (t_1 \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$t_1 := \min\{t \in [0, 1] \mid H(t) = m\}, \quad t_0 := \max\{t \in [0, t_1] \mid H(t) = m + 1\},$$

であり, 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $r_{j,k}$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 内の超平面 $H_{j,k} := \{\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \mu(h_j) = k\}$ に関する reflection である:



Example 1.3.3. Example 1.2.2 の場合を考える.

$$\pi = \left(w_0\lambda, r_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right) \in \mathbb{B}(\lambda)$$

に e_2 を作用させる (Examples 1.2.6, 1.2.7 参照). Example 1.2.7 より

$$H(t) = (\pi(t))(h_2) = \begin{cases} -4t & (0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}), \\ -2 + 6t & (\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \text{ のとき}), \\ -\frac{1}{2} + 2t & (\frac{3}{4} \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

である. よって,

$$m = \min\{H(t) \mid t \in [0, 1]\} = -2,$$

$$t_1 = \min\{t \in [0, 1] \mid H(t) = m\} = \frac{1}{2},$$

$$t_0 = \max\{t \in [0, t_1] \mid H(t) = m + 1\} = \frac{1}{4},$$

となる. 従って,

$$e_2\pi = \left(w_0\lambda, r_2r_1\lambda, r_1\lambda, \lambda; 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right)$$

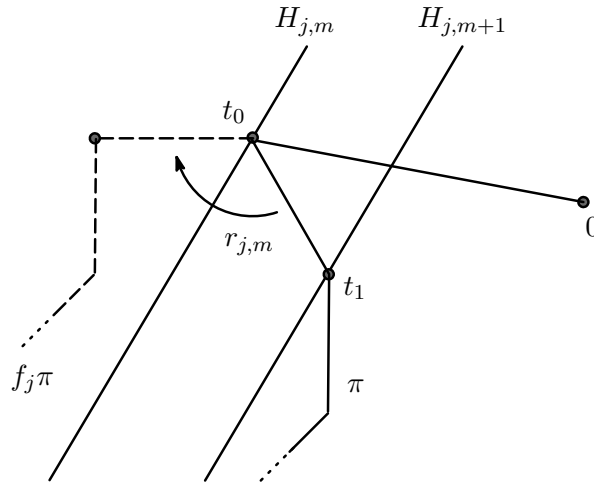
となる. さらに, $e_2\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ であることも分かる.

次に, (lowering) root operator f_j , $j \in I$, であるが, $H(1) - m = 0$ の場合は, $f_j\pi := 0$ と定め, $H(1) - m \geq 1$ の場合は,

$$(f_j\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & (0 \leq t \leq t_0 \text{ のとき}), \\ r_{j,m}(\pi(t)) & (t_0 \leq t \leq t_1 \text{ のとき}), \\ \pi(t) - \alpha_j & (t_1 \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$t_0 := \max\{t \in [0, 1] \mid H(t) = m\}, \quad t_1 := \min\{t \in [t_0, 1] \mid H(t) = m + 1\}.$$



Theorem 1.3.4 ([L2, §2 及び §4]). 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ に対して, $e_j\pi, f_j\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \cup \{0\}$ が成り立つ. さらに, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in I$ に対して

$$\varepsilon_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid e_j^n \pi \neq 0\}, \quad \varphi_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid f_j^n \pi \neq 0\},$$

と定めると, $(\mathbb{B}(\lambda), e_j, f_j (j \in I), \varepsilon_j, \varphi_j (j \in I), \text{wt})$ は, P を weight lattice とするクリスタルとなる.

1.4 クリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ に関する諸定理. 先ず, 次のことに注意する.

Remark 1.4.1. LS パスの定義から, 以下のことが容易に分かる:

「 $\lambda \in P, w \in W$ とする. このとき, 集合として $\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}(w\lambda)$ が成り立つ.」

従って, 特に \mathfrak{g} が (複素) 有限次元単純リー環の場合には, 任意の integral weight $\lambda \in P$ は dominant integral weight と W -conjugate なので, shape λ の LS パス全体の成すクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ の研究は, λ が dominant integral weight の場合に帰着される.

[L1], [L2] において, Littelmann は以下の定理を示した.

Theorem 1.4.2. $\lambda \in P_+$ とする. このとき,

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\lambda)} e(\text{wt}(\pi)) = \text{ch } L(\lambda)$$

が成立する. ここで, $L(\lambda)$ は最高ウエイト λ の有限次元既約最高ウエイト \mathfrak{g} -加群であり, $\text{ch } L(\lambda)$ は $L(\lambda)$ の character を表す.

次の定理は, Theorem 1.3.4 と Theorem 1.4.2 を根拠として Littelmann によって予想され, Kashiwara [Kas2, Theorem 4.1] と Joseph [J, Corollary 6.4.27] により独立に証明された (結晶基底に関しては [HK, Chapter 4] を参照されたい).

Theorem 1.4.3. $\lambda \in P_+$ とする. このとき, $\mathbb{B}(\lambda)$ は $U_q(\mathfrak{g})$ 上の有限次元既約最高ウエイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ と, クリスタルとして同型である.

2 量子アフィン代数の extremal weight module に対するパス模型.

このセクションと次のセクションで, 我々が [NS1]–[NS5] において得た結果を紹介する. 以下では, 簡単の為 \mathfrak{g} を simply-laced な (nontwisted) アフィン・リー環とする.

2.1 記号. このセクションと次のセクションで使用する基本的な記号をまとめておく. (詳細については [T, 第4章及び第5章], [Kac, §6 及び §7], [HK, §10.1] 等を参照されたい. ここでの simple roots の numbering は [T, 第4章及び第5章] に従っている. また, integral weight lattice の取り方は [HK, §10.1] に従っている.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &: \text{ simply-laced (nontwisted) affine Lie algebra}/\mathbb{C}, \\ \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} &: \text{ Cartan subalgebra,} \\ \Pi^\vee := \{h_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h} &: \text{ simple coroots,} \quad \Pi := \{\alpha_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^* : \text{ simple roots,} \end{aligned}$$

$c = \sum_{j \in I} a_j^\vee h_j \in \mathfrak{h}$: canonical central element, $\delta \in \mathfrak{h}^*$: null root,
 $\{\Lambda_j\}_{j \in I} \subset \mathfrak{h}^*$: fundamental weights,
 $P = \bigoplus_{j \in I} \mathbb{Z}\Lambda_j \oplus \mathbb{Z}\delta$: integral weight lattice,
 $P^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z}) \subset \mathfrak{h}$: dual lattice of P ,
 $P_+ = \sum_{j \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_j + \mathbb{Z}\delta$: dominant integral weights,
 $P_- = -P_+$: anti-dominant integral weights,
 $r_j \in \text{GL}(\mathfrak{h}^*)$: simple reflection with respect to α_j ,
 $W = \langle r_j \mid j \in I \rangle \subset \text{GL}(\mathfrak{h}^*)$: Weyl group of \mathfrak{g} ,
 Δ : root system of \mathfrak{g} , $\Delta_+ \subset \Delta$: positive roots,
 $\Delta^{\text{re}} := W\Pi$: real roots, $\Delta_+^{\text{re}} := \Delta^{\text{re}} \cap \Delta_+$: positive real roots,
 $U_q(\mathfrak{g}) = \langle x_j, y_j, q^h \mid j \in I, h \in P^\vee \rangle$:
quantum affine algebra/ $\mathbb{C}(q)$ associated to \mathfrak{g} ,
 $U'_q(\mathfrak{g}) = \langle x_j, y_j, q^h \mid j \in I, h \in \bigoplus_{j \in I} \mathbb{Z}h_j \rangle \subset U_q(\mathfrak{g})$:
quantum affine algebra/ $\mathbb{C}(q)$ associated to the derived algebra $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

2.2 Lakshmibai-Seshadri パス — アフィン・リー環の場合. アフィン・リー環の場合の (shape $\lambda \in P$ の) LS パスの定義は, 有限次元単純リー環の場合の LS パスの定義 (§1.2 参照) において, “positive root” とある所を “positive real root” に変更したものである (Definitions 1.2.1, 1.2.3, 1.2.5 で, Δ_+ を Δ_+^{re} に置き換える). $\lambda \in P$ に対して, shape λ の LS パス全体の集合を $\mathbb{B}(\lambda)$ で表す. §1 で述べた有限次元単純リー環の場合と同様に, アフィン・リー環の場合にも以下のことが成り立つ:

- (1) $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ を, (1.2.1) により, 区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ と同一視する. このとき, $\pi(1) \in P$ が成立する (§1.3 の Weights の項参照).
- (2) 各 $\lambda \in P$ に対して, $\mathbb{B}(\lambda)$ には, §1.3 と同様の方法でクリスタルの構造が入る; root operator $e_j, f_j, j \in I$, の定義は §1.3 と同様であり, $\text{wt}, \varepsilon_j, \varphi_j, j \in I$, も §1.3 と同様に定める.

ところで, アフィン・リー環の integral weight は中心元 $c \in \mathfrak{h}$ との pairing の値によって, positive level のもの, negative level のもの, そして, level-zero のものの 3 種類に分類される:

$$P = \underbrace{\{\lambda \in P \mid \lambda(c) > 0\}}_{(1) \text{ positive level}} \sqcup \underbrace{\{\lambda \in P \mid \lambda(c) = 0\}}_{(2) \text{ level-zero}} \sqcup \underbrace{\{\lambda \in P \mid \lambda(c) < 0\}}_{(3) \text{ negative level}}.$$

Fact 2.2.1. $\lambda \in P$ が positive level (resp., level-zero, negative level) なら, $W\lambda$ の元は全て positive level (resp., level-zero, negative level) である. さらに, $W\lambda$ は dominant integral weight (resp., level-zero dominant integral weight, anti-dominant integral weight) を唯 1 つ含む. ここで, $\lambda \in P$ が level-zero dominant であるとは,

$$\lambda(c) = 0, \quad \lambda(h_j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (j \in I_0 := I \setminus \{0\})$$

が成り立つことである.

アフィン・リー環の場合にも, 任意の $\lambda \in P$ と $w \in W$ に対して等式 $\mathbb{B}(w\lambda) = \mathbb{B}(\lambda)$ が成り立つことが容易に分かるので, Fact 2.2.1 により, shape $\lambda \in P$ の LS パス全体の成すクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ の研究は

- (1) λ が dominant integral weight の場合,
- (2) λ が level-zero dominant integral weight の場合,
- (3) λ が anti-dominant integral weight の場合,

の3つの場合に帰着される (Remark 1.4.1 で述べた有限次元単純リー環の場合と比較されたい!). このうち, λ が dominant (resp., anti-dominant) の場合については, LS パスの成すクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ は, 最高ウエイト (resp., 最低ウエイト) λ の可積分な既約最高ウエイト (resp., 最低ウエイト) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ と, クリスタルとして同型になることが知られている (Theorem 1.4.3 参照). そこで,

$\lambda \in P$ が level-zero dominant の場合

が問題になる!

各 $i \in I_0 = I \setminus \{0\}$ に対して,

$$\varpi_i := \Lambda_i - a_i \check{\Lambda}_0 \in P$$

と置く. このとき, 明らかに ϖ_i は level-zero であり, 任意の $i, j \in I_0$ に対して $\varpi_i(h_j) = \delta_{ij}$ が成立する. 又, 勝手な level-zero dominant integral weight は以下の形をしていることが分かる:

$$\sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i + n\delta \quad (m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i \in I_0; n \in \mathbb{Z}). \quad (2.2.1)$$

我々は, 論文 [NS1], [NS3] において, $\lambda = m\varpi_i$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i \in I_0$, である場合には, $\mathbb{B}(\lambda)$ は extremal weight module の結晶基底と同型であることを示した (Theorem 2.4.1 参照). 一方, λ が (2.2.1) の様な一般の level-zero dominant integral weight の場合には, $\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタルとしての構造は完全に分かっているのだが (論文 [NS4] の主結果), $\mathbb{B}(\lambda)$ に同型な結晶基底を持つ (可積分な) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群が存在するかどうかは今のところ分かっていない. ($m_i \neq 0$ となる $i \in I_0$ が2個以上ある場合は, $\mathbb{B}(\lambda)$ は extremal weight module の結晶基底と同型にはならないことが証明できる. 詳細は [NS4, Appendix] 参照.)

2.3 Extremal weight module. 論文 [NS1], [NS3] で得られた結果を述べる為に, (量子アフィン代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 上の) extremal weight module について復習する. 詳細については, [Kas1, §8], [Kas3, §3 及び §5], [N2] 等を参照されたい.

Definition 2.3.1. M を可積分な $U_q(\mathfrak{g})$ -加群, $v \in M$ をウエイト $\lambda \in P$ の weight vector とする. v が (ウエイト λ の) extremal weight vector であるとは, Weyl 群 W でパラメトライズされた M の weight vector からなる family $\{v_w\}_{w \in W}$ で, 以下の条件を満たすものが存在することである:

- (1) $w = 1$ であれば, $v_w = v$;
- (2) $n := (w\lambda)(h_j) \geq 0$ ならば, $x_j v_w = 0$, かつ $y_j^{(n)} v_w = v_{r_j w}$;
- (3) $n := (w\lambda)(h_j) \leq 0$ ならば, $y_j v_w = 0$, かつ $x_j^{(-n)} v_w = v_{r_j w}$.

ここで, $j \in I$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$x_j^{(n)} := \frac{x_j^n}{[n]!}, \quad y_j^{(n)} := \frac{y_j^n}{[n]!},$$

と定める (いわゆる, q -divided powers). 但し,

$$[n]! := \prod_{k=1}^n [k], \quad [k] := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

である.

Remark 2.3.2. Definition 2.3.1 の記号の下で, $v_w \in M$ はウエイト $w\lambda$ の weight vector であることが分かる.

Theorem 2.3.3 ([Kas1, §8]). $\lambda \in P$ とする.

(1) ウエイト λ の extremal weight vector で生成される可積分な $U_q(\mathfrak{g})$ -加群の中で universal なもの $V(\lambda)$ が存在する. この $V(\lambda)$ のことを extremal weight λ の extremal weight module と呼ぶ (λ が level-zero のときは, 以下の Fact 2.3.5 の様な特徴付けもある).

(2) $V(\lambda)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を持つ.

$V(\lambda)$ の生成元 (ウエイト λ の extremal weight vector) を v_λ で表す. また, v_λ に対応する $\mathcal{B}(\lambda)$ の元を u_λ で表す.

Fact 2.3.4 ([Kas1, §8]). (1) $\lambda \in P$, $w \in W$ とする. このとき, $V(\lambda)$ と $V(w\lambda)$ の間に $U_q(\mathfrak{g})$ -加群としての自然な同型が存在する. 又, 結晶基底についても, $\mathcal{B}(\lambda)$ と $\mathcal{B}(w\lambda)$ の間にクリスタルとしての自然な同型が存在する.

(2) λ が dominant (resp. anti-dominant) integral weight なら, extremal weight module $V(\lambda)$ は, 最高ウエイト (resp., 最低ウエイト) λ の可積分な既約最高ウエイト (resp., 最低ウエイト) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群と同型である. 又, このとき $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ は, 最高ウエイト (resp., 最低ウエイト) λ の可積分な既約最高ウエイト (resp., 最低ウエイト) $U_q(\mathfrak{g})$ -加群の結晶基底と, クリスタルとして同型である.

従って, LS パスのとき (§2.2) と同様に, level-zero dominant integral weight を extremal weight とする extremal weight module, 及びその結晶基底の構造を調べるのが重要になる. $\lambda \in P$ が level-zero の場合には, extremal weight module $V(\lambda)$ は次の様にも特徴付けられる.

Fact 2.3.5 ([Kas3, Theorem 5.3 の下のコメント]). $\lambda \in P$ を level-zero とする. このとき, extremal weight module $V(\lambda)$ は, ウエイト λ の weight vector v_λ で生成され, 以下の関係式で定義される $U_q(\mathfrak{g})$ -module と同型である:

$$\begin{cases} U_q(\mathfrak{g})_\beta v_\lambda = 0 & \text{for all } \beta \in \Delta^{\text{re}} \text{ such that } \lambda(\beta^\vee) \geq 0, \\ y_j^{1+\lambda(h_j)} v_\lambda = 0 & \text{for all } j \in I \text{ such that } \lambda(h_j) \geq 0, \\ x_j^{1-\lambda(h_j)} v_\lambda = 0 & \text{for all } j \in I \text{ such that } \lambda(h_j) \leq 0. \end{cases}$$

ここで, $U_q(\mathfrak{g})_\beta := \{x \in U_q(\mathfrak{g}) \mid q^h x q^{-h} = q^{\beta(h)} x \ (h \in P^\vee)\}$ である.

以下の定理は, Kashiwara [Kas3, §13] によって予想され, Beck と Nakajima [BN] により証明された. (\mathfrak{g} が simply-laced の場合には, [B] と [N1] で独立に証明された).

Theorem 2.3.6. (1) $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) のとき, クリスタルとしての同型

$$\mathcal{B}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I_0} \mathcal{B}(m_i \varpi_i)$$

が成立する (右辺はテンソル積を取る順番には依らない).

(2) $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i \in I_0$ とする. このとき, $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ の (クリスタルグラフの) 連結成分全体は, 長さが $m-1$ 以下の partition 全体でパラメトライズされる. さらに, $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ の連結成分同士は, I -colored oriented graph としては同型である.

Remark 2.3.7. Theorem 2.3.6 (2) より, $m \geq 2$ であれば, $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ のクリスタルグラフは連結ではないことが分かる (実際には無限個の連結成分を持つ).

2.4 Extremal weight module のパス模型. 以上の記号のもとで [NS1], [NS3] において得られた結果を述べる.

Theorem 2.4.1. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i \in I_0 = I \setminus \{0\}$ とする. このとき, shape $m\varpi_i$ の LS パス全体の成すクリスタル $\mathbb{B}(m\varpi_i)$ は, extremal weight module $V(m\varpi_i)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(m\varpi_i)$ と, クリスタルとして同型である. 即ち, クリスタルとしての同型

$$\mathbb{B}(m\varpi_i) \cong \mathcal{B}(m\varpi_i)$$

が成り立つ.

この結果と Theorem 2.3.6 (1) を合わせれば, 以下の Corollary が得られる.

Corollary 2.4.2. $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) のとき, クリスタルとしての同型

$$\mathcal{B}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I_0} \mathbb{B}(m_i \varpi_i)$$

が成り立つ.

3 量子アフィン代数の有限次元表現に対するパス模型.

3.1 レベル・ゼロ基本表現. 先ず, Kashiwara [Kas3, p. 142] によって導入された, 量子アフィン代数 $U'_q(\mathfrak{g})$ のレベル・ゼロ基本表現について復習する. Extremal weight module $V(\varpi_i)$ ($i \in I_0$) において, その生成元 $v_{\varpi_i} \in V(\varpi_i)$ は (weight ϖ_i の) extremal weight vector であるから, v_{ϖ_i} に対して Definition 2.3.1 の条件を満たす family $\{v_w\}_{w \in W} \subset V(\varpi_i)$ が存在する. そこで, $v_{\varpi_i + \delta} := v_{t(h_i)}$ と置く. 但し, $t(h_i) \in W$ は simple coroot h_i に関する translation である ([Kac, §6.5] 参照). Remark 2.3.2 により, $v_{\varpi_i + \delta}$ はウエイト $\varpi_i + \delta$ の weight vector であることに注意する.

Fact 3.1.1. $V(\varpi_i)$ を, 制限によって $U'_q(\mathfrak{g})$ -加群とみなす. このとき, $U'_q(\mathfrak{g})$ -加群の自己同型 $z_i : V(\varpi_i) \xrightarrow{\sim} V(\varpi_i)$ で, $z_i(v_{\varpi_i}) = v_{\varpi_i + \delta}$ を満たすものが唯 1 つ存在する.

Definition 3.1.2. $W(\varpi_i) := V(\varpi_i)/(z_i - 1)V(\varpi_i)$ と置く. これを, $U'_q(\mathfrak{g})$ のレベル・ゼロ基本表現 と呼ぶ.

Theorem 3.1.3 ([Kas3, Theorem 5.17]). レベル・ゼロ基本表現 $W(\varpi_i)$ は $U'_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現である. さらに, $W(\varpi_i)$ は (extremal weight module $V(\varpi_i)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\varpi_i)$ から誘導される) 結晶基底を持つ.

3.2 レベル・ゼロ基本表現に対するパス模型とテンソル積分分解定理. 先ず, 次のことに注意する. 商空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ と $(\bigoplus_{j \in I} \mathbb{R}h_j)^*$ の間には, $\delta(h_j) = 0$ ($j \in I$) であることから自然な線形同型が存在する. 以下では, 商空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ の元を, この線形同型によって $(\bigoplus_{j \in I} \mathbb{R}h_j)^*$ の元と見なす. 又, $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} := \bigoplus_{j \in I_0} \mathbb{R}h_j$ と置くと, 線形同型

$$\{\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta \mid \mu(c) = 0\} \cong (\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})^* \quad (3.2.1)$$

が成り立つ. そこで, この線形同型により $(\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})^*$ を $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ の部分空間とすることにする.

Remark 3.2.1. $\mu \in (\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})^* \leftrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ とする. このとき, $\mu(c) = 0$ なので, $\mu(h_0) = \mu(-\theta^\vee)$ である. ここで θ は, $I_0 = I \setminus \{0\}$ に対応する (有限次元の) 部分リー代数の root system $\overset{\circ}{\Delta} \subset \Delta^{\text{re}}$ の highest root である ($\theta^\vee \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$ に注意).

$\lambda \in P$ を level-zero integral weight とする. $\text{cl} : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ を canonical projection とし, shape λ の LS パス $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して, $\text{cl}(\pi) : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ を

$$(\text{cl}(\pi))(t) := \text{cl}(\pi(t)) \quad (t \in [0, 1])$$

で定義する. このとき, (3.2.1) により, $(\text{cl}(\pi))(t) \in (\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})^* (t \in [0, 1])$ とみなせる. つまり, $\text{cl}(\pi)$ は $[0, 1]$ から $(\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})^*$ への区分的に線形で連続な写像 (即ち, $(\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})^*$ における折れ線) とみなせる. そこで,

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} := \text{cl}(\mathbb{B}(\lambda)) = \{\text{cl}(\pi) \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda)\}$$

と置く. このとき, $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ には, 次の様にして $\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタル構造から誘導される ($P_{\text{cl}} := \text{cl}(P)$ を weight lattice とする) クリスタルの構造が入る.

Weights. $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ に対して, $\text{wt}(\eta) := \eta(1) \in P_{\text{cl}}$ と定める.

Kashiwara operators. $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ と $j \in I$ に対して,

$$H(t) := (\pi(t))(h_j) \quad (t \in [0, 1]), \quad m := \min\{H(t) \mid t \in [0, 1]\},$$

と置く ($j = 0$ のときには, Remark 3.2.1 により, 以下において $\text{cl}(\alpha_0)$ を $-\theta$ に, h_0 を $-\theta^\vee$ に置き換えて考えても良い). この $H(t)$ と m を用いて, $e_j\eta$ と $f_j\eta$ を §1.3 と同様に定義する. 即ち, $m = 0$ の場合は, $e_j\eta := \mathbf{0}$ と定め, $m \leq -1$ の場合は,

$$(e_j\eta)(t) := \begin{cases} \eta(t) & (0 \leq t \leq t_0 \text{ のとき}), \\ r_{j, m+1}(\eta(t)) & (t_0 \leq t \leq t_1 \text{ のとき}), \\ \eta(t) + \text{cl}(\alpha_j) & (t_1 \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

と定める。但し,

$$t_1 := \min\{t \in [0, 1] \mid H(t) = m\},$$

$$t_0 := \max\{t \in [0, t_1] \mid H(t) = m + 1\},$$

であり, 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $r_{j,k}$ は $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\circ})^*$ 内の超平面 $H_{j,k} := \{\mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\circ})^* \mid \mu(h_j) = k\}$ に関する reflection である. $f_j \eta$ の定義も同様にして与えられる.

Fact 3.2.2 ([NS3, §3.3 参照]. (1) $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$, $j \in I$ とする. このとき, $e_j \text{cl}(\pi) = \text{cl}(e_j \pi)$, $f_j \text{cl}(\pi) = \text{cl}(f_j \pi)$ が成り立つ. ここで, $\text{cl}(\mathbf{0})$ は $\mathbf{0}$ と解釈する. 従って, 任意の $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ と $j \in I$ に対して, $e_j \eta, f_j \eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \cup \{\mathbf{0}\}$ である.

(2) $(\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}, e_j, f_j (j \in I), \varepsilon_j, \varphi_j (j \in I), \text{wt})$ は, P_{cl} を weight lattice とするクリスタルとなる. 但し, $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ と $j \in I$ に対して

$$\varepsilon_j(\eta) := \max\{n \geq 0 \mid e_j^n \eta \neq \mathbf{0}\}, \quad \varphi_j(\eta) := \max\{n \geq 0 \mid f_j^n \eta \neq \mathbf{0}\},$$

と定める.

Theorem 3.2.3 ([NS1, Proposition 5.8], [NS3, Proposition 3.4.2]). $i \in I_0$ とする. $\mathbb{B}(\varpi_i)_{\text{cl}}$ はレベル・ゼロ基本表現 $W(\varpi_i)$ の結晶基底と, クリスタルとして同型である.

Theorem 3.2.4 ([NS2, Theorem 3.2]). $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) を level-zero dominant integral weight とする. このとき, 次のクリスタルとしての同型が成り立つ:

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \cong \bigotimes_{i \in I_0} (\mathbb{B}(\varpi_i)_{\text{cl}})^{\otimes m_i}.$$

(右辺はテンソル積を取る順番には依らない. [NS2, Lemma 3.11] 参照.) 従って, $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ はレベル・ゼロ基本表現のテンソル積 $\bigotimes_{i \in I_0} W(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ の結晶基底と, クリスタルとして同型である.

3.3 次数関数と Kostka-Foulkes 多項式の関係. 先ず, 次数関数について説明する. $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I_0$) を level-zero dominant integral weight とする. LS パスの定義から, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の原点 $\mathbf{0}$ と λ を結ぶ直線 $\pi_{\lambda}(t) := t\lambda$, $t \in [0, 1]$, が $\mathbb{B}(\lambda)$ の元であることが分かる. $\mathbb{B}_0(\lambda)$ を, π_{λ} を含む $\mathbb{B}(\lambda)$ の (クリスタルグラフとしての) 連結成分とする.

Fact 3.3.1 ([NS5, Proposition 3.1.3]). $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ に対して, 次の条件 (1), (2) を満たす $\pi_{\eta} = (\nu_1, \nu_2, \dots; \underline{\sigma}) \in \mathbb{B}_0(\lambda)$ が唯 1 つ存在する.

(1) $\text{cl}(\pi_{\eta}) = \eta$,

(2) π_{η} の “initial direction” $\nu_1 \in W\lambda$ は, $\lambda - \sum_{j \in I_0} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j$ に含まれる.

Definition 3.3.2 ([NS5, (3.1.1)]). $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ 上の次数関数 $\text{Deg}_{\lambda} : \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を, 次の様に定義する: 各 $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ に対して, Fact 3.3.1 における $\pi_{\eta} \in \mathbb{B}_0(\lambda)$ の終端 $\pi_{\eta}(1) \in P$ は, ある $\beta \in \sum_{j \in I_0} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j$ と $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ によって, $\pi_{\eta}(1) = \lambda - \beta + K\delta$ と一意的に表される ([NS5, Lemma 3.1.1] 参照). このとき, η の次数 $\text{Deg}_{\lambda}(\eta)$ を

$$\text{Deg}_{\lambda}(\eta) := -K \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

で定義する.

Example 3.3.3. \mathfrak{g} が $A_{\ell-1}^{(1)}$ 型で, $\lambda = m\varpi_1$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) のときは, $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ の次数 $\text{Deg}_\lambda(\eta)$ は以下の様に計算される. $\xi_p := r_p r_{p-1} \cdots r_1(\lambda)$, $\zeta_p := \text{cl}(\xi_p)$ と置く ($0 \leq p \leq \ell - 1$). このとき, [Kac, §6.7] より

$$W\lambda = \{\xi_p \mid 0 \leq p \leq \ell - 1\} + m\mathbb{Z}\delta, \quad \text{cl}(W\lambda) = \{\zeta_p \mid 0 \leq p \leq \ell - 1\}$$

となることが分かる. そして, 簡単な考察で

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} = \{(\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{i_m}; \underline{\sigma}) \mid i_q \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}, 1 \leq q \leq m\}$$

であることが分かる. 但し, $\underline{\sigma} : 0 < \frac{1}{m} < \frac{2}{m} < \dots < \frac{m-1}{m} < 1$ であり,

$$\eta = (\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{i_m}; \underline{\sigma})$$

は, (1.2.1) と同様の方法で $[0, 1]$ から $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ への区分的に線形で連続な写像 $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta$ とみなしている.

さて, $\eta = (\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{i_m}; \underline{\sigma}) \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ に対して, $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次で定める:

$$k_1 := 0, \quad k_q := \begin{cases} k_{q-1} + m & (i_q > i_{q-1} \text{ のとき}), \\ k_{q-1} & (i_q = i_{q-1} \text{ のとき}), \end{cases} \quad (1 \leq q \leq m).$$

このとき, Fact 3.3.1 で与えた $\pi_\eta \in \mathbb{B}(\lambda)$ は,

$$(\xi_{i_1} + k_1\delta, \xi_{i_2} + k_2\delta, \dots, \xi_{i_m} + k_m\delta; \underline{\sigma})$$

を (1.2.1) によって $[0, 1]$ から $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ への区分的に線形で連続な写像とみなしたものと等しい. 従って,

$$\text{Deg}_\lambda(\eta) = -\frac{1}{m}(k_1 + k_2 + \dots + k_m)$$

となる. 以下は, \mathfrak{g} が $A_2^{(1)}$ 型 (即ち, $\ell = 3$) で $\lambda = 5\varpi_1$ (即ち, $m = 5$) のときに, 幾つかの $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ についての $\pi_\eta \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $\text{Deg}_\lambda(\eta)$ の値を表にしたものである:

η	π_η	$\text{Deg}_\lambda(\eta)$
$(\zeta_0, \zeta_0, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2; \underline{\sigma})$	$(\xi_0, \xi_0, \xi_0, \xi_0 + 5\delta, \xi_2 + 10\delta; \underline{\sigma})$	-3
$(\zeta_0, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_0, \zeta_2; \underline{\sigma})$	$(\xi_0, \xi_0, \xi_1 + 5\delta, \xi_0 + 5\delta, \xi_2 + 10\delta; \underline{\sigma})$	-4
$(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_0, \zeta_0, \zeta_2; \underline{\sigma})$	$(\xi_0, \xi_0 + 5\delta, \xi_1 + 5\delta, \xi_0 + 5\delta, \xi_2 + 10\delta; \underline{\sigma})$	-5
$(\zeta_0, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_0; \underline{\sigma})$	$(\xi_0, \xi_0, \xi_1 + 5\delta, \xi_2 + 10\delta, \xi_0 + 10\delta; \underline{\sigma})$	-5
$(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_0, \zeta_2, \zeta_0; \underline{\sigma})$	$(\xi_0, \xi_1 + 5\delta, \xi_0 + 5\delta, \xi_2 + 10\delta, \xi_0 + 10\delta; \underline{\sigma})$	-6
$(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_0, \zeta_0; \underline{\sigma})$	$(\xi_0, \xi_1 + 5\delta, \xi_2 + 10\delta, \xi_0 + 10\delta, \xi_0 + 10\delta; \underline{\sigma})$	-7

今, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ を I_0 の元の列とし (i_k 達の中には同じものがあったてもよい), $\lambda := \varpi_{i_1} + \varpi_{i_2} + \dots + \varpi_{i_n}$ とする. そして, $\mu \in \sum_{i \in I_0} \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{cl}(\varpi_i)$ に対して, 次の様な q -多項式を考える:

$$\sum_{\substack{\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \\ e_j \eta = \mathbf{0} \ (j \in I_0) \\ \eta(1) = \mu}} q^{-\text{Deg}_\lambda(\eta)}. \quad (3.3.1)$$

論文 [NS5] において我々は、次数関数 $\text{Deg}_\lambda : \mathbb{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\leq 0}$ が、Theorem 3.2.4 で与えられるクリスタルの同型

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_i := \mathbb{B}(\varpi_{i_1})_{\text{cl}} \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_2})_{\text{cl}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_n})_{\text{cl}}$$

を通して、 \mathbb{B}_i 上の“エネルギー関数”に一致することを証明した。そして、その系として、 q -多項式 (3.3.1) が \mathbb{B}_i と μ に対する (classically restricted) “one-dimensional configuration sum” (1dsum) と一致することを証明した (エネルギー関数や 1dsum については [HKOTY], [HKOTT] 等を参照されたい)。ところで、Nakayashiki-Yamada [NY] によって、 \mathfrak{g} が $A_{\ell-1}^{(1)}$ 型の場合には 1dsum は Kostka-Foulkes 多項式と一致することが示されている。以下では、[NS5] の結果と [NY] の結果を合わせることで得られる「Kostka-Foulkes 多項式の LS パスを用いた記述」について説明する。

まず、Kostka-Foulkes 多項式について簡単に復習する (詳細については [M, Chapter III] や [NR] 等を参照されたい)。 $\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_k$ を対称関数環とする。ここで、各 $k \geq 0$ に対して、 Λ_k は k 次の対称関数の全体である。又、 $R = \mathbb{Z}[q]$ と置き、 $\Lambda[q] := R \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_k[q]$ を、 R を係数とする対称関数環とする。各 $k \geq 0$ に対して、この $\Lambda_k[q] = R \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_k$ には、次の 2 種類の良く知られた R -基底が存在する。

- (1) Schur 関数 s_λ , $\lambda \in \mathcal{P}_k$,
- (2) Hall-Littlewood 関数 $P_\lambda(q)$, $\lambda \in \mathcal{P}_k$.

ここで、 \mathcal{P}_k はサイズが k の partition (即ち、箱の数が k の Young diagram) の全体を表すものとする。これら 2 つの R -基底の間の基底変換の行列は、(\mathcal{P}_k 上に適当な半順序 \preceq を定めることで) 対角成分が全て 1 の三角行列となる。即ち、各 partition $\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対して、

$$s_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_k, \mu \preceq \lambda} K_{\lambda, \mu}(q) P_\mu(q) \quad (K_{\lambda, \mu}(q) \in \mathbb{Z}[q], K_{\lambda, \lambda}(q) = 1)$$

が成り立つ。

Definition 3.3.4. 上の基底変換の行列の成分に現れる q -多項式 $K_{\lambda, \mu}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ を、partition $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_k$ に付随する Kostka-Foulkes 多項式 と呼ぶ。

さて、以下では \mathfrak{g} は $A_{\ell-1}^{(1)}$ 型のアフィン・リー環とする。 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ を、 $I_0 = \{1, 2, \dots, \ell-1\}$ の元の列で $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$ を満たすものとし、 $\lambda := \varpi_{i_1} + \varpi_{i_2} + \cdots + \varpi_{i_n}$ と置く。 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ を partition とみなしたものを λ^+ で表し、 $k := i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ と置く。又、 k の partition $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(\ell)}) \in \mathcal{P}_k$ を、次の様にして $\sum_{i=1}^{\ell-1} \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{cl}(\varpi_i)$ の元とみなす:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\ell-1} (\mu^{(i)} - \mu^{(i+1)}) \text{cl}(\varpi_i). \quad (3.3.2)$$

Theorem 3.3.5 ([NS5, Corollary 4.7.4]). 上の記号の下で、

$$K_{\mu^t, \lambda^+}(q) = \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \\ e_j \eta = \mathbf{0} \ (j \in I_0) \\ \eta(1) = \mu}} q^{-\text{Deg}_\lambda(\eta)} \quad (3.3.3)$$

が成立する. ここで, $K_{\mu^t, \lambda^+}(q)$ は partition μ の転置 μ^t と partition λ^+ に付随する Kostka-Foulkes 多項式である.

Example 3.3.6. \mathfrak{g} を $A_2^{(1)}$ 型 (即ち, $\ell = 3$) とし, $\mathbf{i} = (1^5)$, $\mu = (3, 1^2)$ とする. 上で述べたルールに従って,

$$\lambda := \varpi_1 + \varpi_1 + \varpi_1 + \varpi_1 + \varpi_1 = 5\varpi_1$$

と置き, μ に $2 \operatorname{cl}(\varpi_1)$ を対応させる. このとき, $\mathbb{B}(5\varpi_1)_{\operatorname{cl}}$ の元 η で, $e_j \eta = \mathbf{0}$ ($j \in I_0$) かつ $\eta(1) = 2 \operatorname{cl}(\varpi_1)$ を満たすものは, Example 3.3.3 の表で挙げた 6 つであることが分かる. 従って

$$\sum_{\substack{\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\operatorname{cl}} \\ e_j \eta = \mathbf{0} \ (j \in I_0) \\ \eta(1) = \mu}} q^{-\operatorname{Deg}_\lambda(\eta)} = q^3 + q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7$$

となる. これは実際, $K_{\mu^t, \lambda^+}(q) = K_{(3, 1^2), (1^5)}(q)$ に等しい (例えば, [M, p. 239 の下の表] 参照).

References

- [B] J. Beck, Crystal structure of level zero extremal weight modules, *Lett. Math. Phys.* **61** (2002), 221–229.
- [BN] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335–402.
- [HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi, Paths, crystals and fermionic formulae, in “MathPhys Odyssey 2001, Integrable Models and Beyond” (M. Kashiwara and T. Miwa, Eds.), Prog. Math. Phys. Vol. 23, pp. 205–272, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada, Remarks on fermionic formula, in “Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics” (N. Jing and K.C. Misra, Eds.), Contemp. Math. Vol. 248, pp. 243–291, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [HK] J. Hong and S.-J. Kang, “Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases”, Graduate Studies in Mathematics Vol. 42, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [J] A. Joseph, “Quantum Groups and Their Primitive Ideals”, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 29, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [Kac] V. G. Kac, “Infinite Dimensional Lie Algebras”, 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [Kas1] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* **73** (1994), 383–413.
- [Kas2] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, in “Lie Algebras and Their Representations” (S.-J. Kang et al., Eds.), Contemp. Math. Vol. 194, pp. 177–186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [Kas3] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.
- [L1] P. Littelmann, A Littlewood–Richardson rule for symmetrizable Kac–Moody algebras, *Invent. Math.* **116** (1994), 329–346.

- [L2] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* (2) **142** (1995), 499–525.
- [L3] P. Littelmann, Characters of representations and paths in $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, in “Representation Theory and Automorphic Forms” (T. N. Bailey and A. W. Knap, Eds.), pp. 29–49, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [M] I.G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials”, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
- [NS1] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2003** (2003), no.32, 1731–1754.
- [NS2] S. Naito and D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai-Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), no.14, 815–840.
- [NS3] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. II, *Adv. Math.* **200** (2006), 102–124.
- [NS4] Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of a level-zero shape for an affine Lie algebra, preprint, 2005, to appear in Proc. London Math. Soc. (3rd Series).
- [NS5] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero weight shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, preprint, 2006, arXiv:math.QA/0602417.
- [N1] H. Nakajima, Extremal weight modules of quantum affine algebras, in “Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups” (T. Shoji et al., Eds.), Adv. Stud. Pure Math. Vol. 40, pp. 343–369, Math. Soc. Japan, 2004.
- [N2] 中島 啓, 量子アフィン展開環の結晶基底, 上智大学における集中講義 (2006 年度) の講義ノート, 中島 啓氏のホームページよりダウンロード可能 (<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Talks/200601Jochi.html>).
- [T] 谷崎 俊之, リー代数と量子群, 現代数学の潮流, 共立出版.
- [NY] A. Nakayashiki and Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, *Selecta Math.* (N.S.) **3** (1997), 547–599.
- [NR] K. Nelsen and A. Ram, Kostka-Foulkes polynomials and Macdonald spherical functions, in “Surveys in combinatorics 2003” (C.D. Wensley, Ed), London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol. 307, pp. 325–370, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.