

有限群の表現論におけるブルエ予想

東京理科大学理学部 功刀 直子

1 はじめに

有限群のモジュラー表現における問題は主に、与えられた有限群 G の素数 p に関する表現の情報は、 p -局所部分群の表現の情報から得られるのではないかという考えに基づいている。Brauer の第一主定理により、 G の不足群 D をもつブロックは $N_G(D)$ の不足群 D をもつブロックと一対一に対応することが知られている。しかし、対応するブロック間の指標や加群についての関係は述べていない。それに対し、Alperin 予想、Dade 予想、Broué 予想などのモジュラー表現における予想はすべて、対応するブロック間の関係を述べたものになっている。

本稿ではとくに、「不足群が可換群であるとき、対応するブロックは derived equivalent なのではないか?」という Broué による予想についてを考えていく。2つのブロックが derived equivalent であるとき、表現論的な重要な多くの情報が保たれる。 $N_G(D)$ のブロックは一般に G のブロックに比べてわかりやすいので、予想が正しければ、 G の表現の情報が $N_G(D)$ の表現の情報から得られることになり、非常に重要な予想と考えられている。

2 基本事項

有限群のモジュラー表現における基本事項を簡単にまとめる。まず、以下の記号を設定する。

- p : 素数
- G : 有限群
- (K, \mathcal{O}, k) : p -モジュラー系 (G に対して十分大)
 - \mathcal{O} : 完備離散付値環

- $K : \mathcal{O}$ の商体, $\text{char}K = 0$
- $k : \mathcal{O}$ の剰余体, $\text{char}k = p$
- $R \in \{\mathcal{O}, k\}$ とする。
- RG -加群
 - 右加群 (とくに断らない限り)
 - R -上自由, 有限生成

群環 KG はいくつかの行列環 $M_{n_i}(K)$ の直和に分解される。

$$KG \cong M_{n_1}(K) \oplus M_{n_2}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_l}(K)$$

各行列環には KG の既約指標が対応する。

一方, 群環 $\mathcal{O}G$, kG は一般に行列環の直和ではない。群環 $\mathcal{O}G$ の直既約分解

$$\mathcal{O}G = \mathcal{O}A_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}A_n$$

に現れる各 $\mathcal{O}A_i$ を $\mathcal{O}G$ のブロック (block) と呼ぶ。この分解に対応して, 群環 kG の直既約な分解

$$kG = kA_0 \oplus \cdots \oplus kA_n$$

がある。ここで, $kA_i = k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}A_i$ であり, kG のブロックと呼ばれる。

直既約 RG -加群 U に対し, U を零化しない RG のブロック RA が唯一つ存在する。このとき U は RA に属するという。自明な RG -加群の属するブロックのことを RG の主ブロック (principal block) と呼ぶ。また, $KA = K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}A$ はいくつかの行列環の直和であるから, いくつかの通常既約指標が対応し, KA に属する通常既約指標が定まる。

このように, kG , $\mathcal{O}G$ の直既約加群や KG の既約指標たちは, $\mathcal{O}G$ のブロック分解に応じて細分される。有限群の表現では, 直既約加群について調べればよいので, 群環全体ではなくブロックごとに考えればよいことになる。

A を RG のブロックとすると, (A, A) -両側加群としての写像

$$\varphi_D : A \otimes_{RD} A \longrightarrow A, (x \otimes y \longmapsto xy)$$

が分裂するような G の極小の部分群 D を RA の不足群 (defect group) と呼ぶ。不足群は G の p -部分群で, G -共役を除き一意に定まる。主ブロックの不足群は G のシロー p -部分群である。ブロックの構造は D の p -ランクが大きくなるほど, 複雑になるという感じである。

以下, $BL(RG, D)$ で, 不足群 D をもつ RG のブロック全体を表す。

有限群のモジュラー表現では

$$\{G \text{ の表現の情報} \} \xleftrightarrow{\text{対応}} \{G \text{ の } p\text{-局所部分群たちの表現の情報} \}$$

を考えることが重要である。ここで、 p -局所部分群とは、 p -部分群の正規化群や中心化群のことで、そこでの表現は比較的調べやすい。

Theorem 2.1 (Brauer の第一主定理)

$$BL(G, D) \xleftrightarrow{1:1} BL(N_G(D), D)$$

この対応で、 G の principal block は $N_G(D)$ の principal block に対応する ($D \in \text{Syl}_p(G)$ のとき)。

3 ブルエの可換不足群予想

以下この節では、 G を有限群、 D を G の p -部分群、 $H = N_G(D)$ とする。 $A \in BL(\mathcal{O}G, D)$ 、 $B \in BL(\mathcal{O}H, D)$ は Brauer の第一主定理で対応しているとする。

Definition 3.1 $I : \mathbb{Z}\text{Irr}(B) \rightarrow \mathbb{Z}\text{Irr}(A) : \mathbb{Z}$ -linear isometry は、 $g \in G$ 、 $h \in H$ に対し、 $\mu(g, h) = \sum_{\chi \in \mathbb{Z}\text{Irr}(A)} \chi(g) I(\chi)(h)$ とおいて、次の 2 条件が成立するとき、perfect isometry と呼ばれる。

(分離条件) $\mu(g, h) \neq 0$ ならば、 g と h の位数はともに p の倍数であるか p の倍数でないかのどちらかである。

(整数条件) $\mu(g, h)/|C_G(g)| \in \mathcal{O}$ かつ $\mu(g, h)/|C_H(h)| \in \mathcal{O}$ 。

M. Broué は 1980 年代終わりごろ可換不足群予想と呼ばれる次の予想を提出した ([1, 2] 参照)。

Conjecture 3.2 (Abelian Defect Group Conjecture) 不足群 D が abelian のとき、次が成立するのではないか？

- (i) $\exists I : \mathbb{Z}\text{Irr}(B) \rightarrow \mathbb{Z}\text{Irr}(A) : \text{perfect isometry}$
- (ii) $\exists F : D^b(\text{mod} B) \xrightarrow{\cong} D^b(\text{mod} A) : \text{triangulated category equivalence}$

$\mathcal{O}A$ と $\mathcal{O}B$ が森田同値 (つまり加群の圏が同値) であるときそれは KA と KB の間の森田同値を引き起こすので、既約指標の間の全単射が存在し、それがパーフェクト・アイ

ソメトリーを誘導する。Broué は $\mathcal{O}A$ と $\mathcal{O}B$ が森田同値でないときでも，既約指標を符号つきで既約指標に対応させることで，パーフェクト・アイソメトリーが得られる場合があることに気がつき，その符号を説明するのモとして，導来圏の同値が存在するのではないかと考えた。実際 Broué は予想における (ii) が正しければ (i) が正しいこと（つまり導来圏同値があればパーフェクト・アイソメトリーが存在すること）を示している。

Example 1 $p = 3$

$$G = PSL(2, 8), C_9 \cong P \in \text{Syl}_3(G)$$

$$H = N_G(P) \cong C_9 \times C_2$$

A : principal block of kG , B : principal block of kH

$$A : \circ \text{---} \underset{1}{\text{---}} \circ \text{---} \underset{7}{\text{---}} \bullet \quad B : \circ \text{---} \underset{1}{\text{---}} \bullet \text{---} \underset{1'}{\text{---}} \circ$$

$$X^\bullet : 0 \longrightarrow P_7^* \otimes Q_{1'} \longrightarrow {}_A A_B \longrightarrow 0$$

このとき

- (1) $- \otimes_A X^\bullet : D^b(\text{mod}A) \longrightarrow D^b(\text{mod}B)$ は，triangulated category としての同値を与える。
- (2) X^\bullet の指標 = (A の指標) - ($P_7^* \otimes Q_{1'}$ の指標) = $\sum_{\chi \in \text{Irr}(A)} \chi \otimes I(\chi)$ とすると， I は perfect isometry を与える。

4 知られている結果

予想は次の場合に正しいことが確認されている。

- G が p -solvable のとき (Dade[7], Harris-Linckelmann [10])
- 不足群 D が巡回群のとき (Rickard [38], Rouquier [43], Linckelmann [25])
- G が有限体 F_q 上の連結簡約代数群で， p が $q - 1$ を割り，Weyl 群の位数を割らないとき (Puig [36])
- $p = 2$ のときの主ブロックすべて（単純群の分類と，下記の個々の結果に Marcus [26] を適用）
 - 不足群 が $D \cong C_2 \times C_2$ のとき (Erdmann [8], Rickard [40])
 - $R(3^{2n+1}) = {}^2G_2(3^{2n+1})$ (Landrock-Michler [23])
 - J_1 (Gollan-Okuyama [9])

- $SL(2, 2^n)$ ($n = 3$ のとき Rouquier [42], 一般のとき Okuyama [35])
- 不足群が $D \cong C_3 \times C_3$ となるすべての主ブロック (単純群の分類と, 下記の個々の結果を使って, 最終版は Koshitani-Kunugi [15])
 - $A_6, A_7, A_8, M_{11}, M_{22}, M_{23}, HS, PSL(3, 4)$ (Okuyama [31, 32])
 - $Sp(4, q)$ ただし $q \equiv 2, 5 \pmod{9}$ (Okuyama-Waki [34])
 - $PSU(3, q)$ ただし $q \equiv 2, 5 \pmod{9}$ (Koshitani-Kunugi [14])
 - $PSL(3, q)$ ただし $q \equiv 4, 7 \pmod{9}$ (Kunugi [21])
 - $PSL(4, q), PSL(5, q)$ ただし, $q \equiv 2, 5 \pmod{9}$ (Koshitani-Miyachi [20])
- 不足群が $D \cong C_3 \times C_3$ となる非主3ブロックのいくつかの場合
 - HS, ON, Suz, He, J_4 (Koshitani-Kunugi-Waki [17, 18, 19])
 - $4.M_{22}$ の faithful block (Müller-Schaps [29])
- $D \cong C_{p^a} \times C_{p^a}$ をもついくつかの場合
 - $SU(3, q^2)$ ただし $p > 3$ で $q + 1$ を割るとき (Kunugi-Waki [22])
 - $Sp(4, q)$ ただし p は奇素数で $q + 1$ を割るとき (Kunugi-Okuyama-Waki)
 - $p = 5, J_2$ (Holloway [12])
- G が対称群 (Chuang [3], Chuang-Kessar [5], Chuang-Rouquier [6])
- $G = GL(n, q)$ (Turner [46], Hida-Miyachi [28], Chuang-Rouquier [6])
- G が交代群 (Marcus [27])
- p が奇素数で $SL(2, p^n)$ の主ブロック ($n = 2$ のとき Chuang [4], 一般の場合 Okuyama [35],
- p が奇素数で $SL(2, p^n)$ 非主ブロック ($n = 2$ のとき Holloway [11], 一般の場合 Yoshii)

参照 : <http://www.maths.bris.ac.uk/~majcr/adgc/adgc.html>

5 Derived equivalence に関する一般論

- 多元環 A に対し,
 - $\text{mod}A$: A -module の category
 - $K^b(\text{mod}A)$: $\text{mod}A$ の bounded な homotopy category
 - $D^b(\text{mod}A)$: $\text{mod}A$ の bounded な derived category
 - $\text{stmod}A$: stable module category

以下, A, B は kG, kH のブロックとする。主に H は G の p -局所部分群で A と B は Brauer 対応していると想定する。

Theorem 5.1 (Rickard [38, 39]) (1) $\text{stmod}A \cong D^b(\text{mod}A)/\text{perf}(A)$

(2) $D^b(\text{mod}A) \cong D^b(\text{mod}B)$ であることと, 次を満たす (A, B) -bimodule の complex X (Rickard complex と呼ばれる) が存在することは同値である。

(i) X の各項は左 A -加群, 右 B -加群としてそれぞれ projective.

(ii) $X \otimes_B X^* \cong A$ in $K^b(\text{mod}A^\circ \otimes A)$

(iii) $X^* \otimes_A X \cong B$ in $K^b(\text{mod}B^\circ \otimes B)$

(3) $D^b(\text{mod}A) \cong D^b(\text{mod}B)$ であるとき, (A, B) -両側加群 M で, 森田型の安定同値

$$- \otimes_A M : \text{stmod}A \xrightarrow{\cong} \text{stmod}B$$

を誘導するものが存在する。

Theorem 5.2 (Linckelmann [24]) A と B は森田型の安定同値であるとし, 安定同値を導く (A, B) -両側加群を M とする。すべての単純 A -加群 S に対して, $S \otimes_A M$ が $\text{stmod}B$ において単純 B -加群と同型であるとき, A と B は森田同値である。

Linckelmann の定理に基づいて, Okuyama は次のような方法を考えた。

Okuyama の方法 (Okuyama [32], Rickard [41] を参照)

A と B の間に森田型の安定同値 $- \otimes_A M : \text{stmod}A \rightarrow \text{stmod}B$ があると仮定する。 B と derived equivalent な algebra C を作り, derived equivalence から誘導される stable equivalence を $- \otimes_B N : \text{stmod}B \rightarrow \text{stmod}C$ とする。すべての simple A -module S に対し, $S \otimes_A M \otimes_B N$ が simple C -module と stable category で同型になるなら, A と C は derived equivalent である。

$$\begin{array}{ccccc} D^b(\text{mod}A) & & D^b(\text{mod}B) & \xrightarrow{\cong} & D^b(\text{mod}C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{stmod}A & \xrightarrow{\cong} & \text{stmod}B & \xrightarrow{\cong} & \text{stmod}C \\ \{S : \text{simple in } A\} & \longrightarrow & \{ \} & \longrightarrow & \{S' : \text{simple in } C\} \end{array}$$

Remark 5.3 C は B から tilting complex の自己準同型環として作られる。実際には, A の単純加群の stable equivalence での像を見ながら, 基本変形的な変形を繰り返すことで, C を作る。

以下簡単のため，主ブロックの場合を扱う。 A を有限群 G の主ブロックとし， A の不足群 (すなわち G の Sylow p -部分群) P は可換群であるとする。 B を $N_G(P)$ の主ブロックとする。

Theorem 5.4 (Rouquier [44]) M を (A, B) -両側加群の complex で，とくに各項の直既約因子は P のある部分群 R について $kG \otimes_{kR} kH$ 直既約因子であると仮定する。このとき次は同値

(1) 次の同型が成立

$$M \otimes_B M^* \cong A \quad \text{in } \text{stmod} A^\circ \otimes A, \quad M^* \otimes_A M \cong B \quad \text{in } \text{stmod} B^\circ \otimes B$$

とくに M は $\text{stmod} A \xrightarrow{\sim} \text{stmod} B$ を導く

(2) P の各部分群 $Q \neq 1$ に対して， $M(Q)$ は $C_G(Q)$ と $C_H(Q)$ の主ブロックの Rickard complex である。ここで $M(Q)$ は Q に関する Brauer construction を表す。

以上述べてきた定理により，Broué 予想の解決に向けて，次のような帰納的な derived equivalence の構成が有効であると考えられる。

- (I) $C_G(Q)/Q$ と $C_H(Q)/Q$ の主ブロックの derived equivalence を構成し，それを $C_G(Q)$ と $C_H(Q)$ の主ブロックの derived equivalence に持ち上げる。
- (II) それらを”張り合わせる”ことで， G と H のブロックの stable equivalence を構成する。
- (III) Stable equivalence を derived equivalence に持ち上げる (p -rank が大きい群に対する (I) に利用できる)。

実際，Rouquier は巡回群のときの Rickard complex を張り合わせることで， $P \cong C_{p^a} \times C_{p^b}$ のときに A と B の stable equivalence を構成している。上の (I) に関連して，次も得られている。

Theorem 5.5 (Usami-Nakabayashi [47], Koshitani-Kunugi [16]) G を有限群， $P \in \text{Syl}_p(G)$ ， $H = N_G(P)$ とし， Z を G の中心に含まれる p -部分群とする。 $\bar{G} := G/Z$ ， $\bar{H} := H/Z$ とおく。 A, B を principal block of G, H とし \bar{A}, \bar{B} を principal block of \bar{G}, \bar{H} とする。さらに

$$\bar{A}\bar{A}\bar{B} = \bar{M} \oplus (\text{projective})$$

と仮定する。

このとき \bar{M} が \bar{A} と \bar{B} の森田同値を与えるならば， \bar{M} の lift M が存在して， A と B

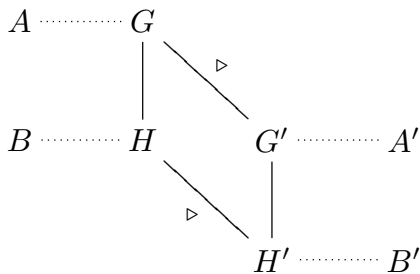
の森田同値を与える。

6 非可換不足群をもつブロックについて

Broué の予想は，不足群が可換という仮定をはずすと，成立しないことが知られている。しかし，非可換不足群であってもある程度の状況であれば，同様のことが成立するのではないかと考えられ，非可換の場合の予想をどのように述べたらよいかなどが考えられている。

以下の設定を考える。

- G : finite group, $C_{p^n} \rtimes C_p \cong D \in \text{Syl}_p(G)$, p : 奇素数
($\Rightarrow \exists G'$: normal subgroup of G of index p .)
- $H = N_G(D')$, $C_{p^n} \cong D' \in \text{Syl}_p(G')$, $H' := G' \cap H$
- A, B : principal blocks of G, H
- A', B' : principal blocks of G', H'
(巡回不足群を持つ場合なので， $D^b(\text{mod } A') \cong D^b(\text{mod } B')$ である)。



Theorem 6.1 (Holloway-Koshitani-Kunugi) 以上の設定のもと，分離条件を満たす \mathbb{Z} -linear isometry $I: \mathbb{Z}\text{Irr}(B) \rightarrow \mathbb{Z}\text{Irr}(A)$ が存在する。

Remark 6.2 • 構成している isometry は， A' と B' の間の perfect isometry から自然に構成したものであり，実際には整数条件を満たし，perfect isometry になることが期待される。

- さらに強く， A と B の間の derived category も同値になるのではないかと期待される。

Theorem 6.3 (Holloway-Koshitani-Kunugi) $p = 3$, $G = PSL(2, 8) \rtimes C_3$, $H =$

$C_{3^2} \rtimes C_3 \cong D \in \text{Syl}_3(G)$ のとき, A と B の derived equivalence が存在する。

Remark 6.4 ここで与えた A と B の derived equivalence は A' と B' の derived equivalence を導くが, それは Example 1 で与えたものとは一致しない (Example 1 で与えた equivalence は A と B の equivalence に lift されない)。

参考文献

- [1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* **181-182** (1990), 61–92.
- [2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in *Finite Dimensional Algebras and Related Topics*, (edited by V. Dlab and L.L. Scott) Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994, pp.1–26.
- [3] J. Chuang, The derived category of some blocks of symmetric groups and a conjecture of Broué, *J. Algebra* **217** (1999),114–155.
- [4] J. Chuang, Derived equivalence in $\text{SL}(2, p^2)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001),2897–2913.
- [5] J. Chuang and R. Kessar, Symmetric groups, wreath products, Morita equivalences, and Broué’s abelian defect group conjecture, *Bull. London Math. Soc.* **34** (2002), no. 2, 174–184
- [6] J. Chuang and R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and sl_2 -categorification. *Ann. of Math. (2)* **167** (2008), no. 1, 245–298
- [7] E.C. Dade, A correspondence of characters, In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups* (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), pp. 401-403. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.
- [8] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*, Lecture Note in Mathematics, 1428, Springer, 1990
- [9] H.W. Gollan and T. Okuyama, Derived equivalences for the smallest Janko Group, preprint.
- [10] M.E. Harris and M. Linckelmann, Splendid derived equivalences for blocks of finite p -solvable groups, *J. London Math. Soc. (2)*, **62**(2000) 85-96,
- [11] M. Holloway, Derived equivalences for group algebras. PhD thesis, Bristol, 2001.
- [12] M. Holloway, Broué’s conjecture for the Hall-Janko group and its double cover,

- Proc. London Math. Soc.* (3) **86** (2003), no. 1, 109–130
- [13] S. König and A. Zimmermann. Derived equivalences for group rings. Springer Lecture Notes in Math. **1685**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [14] S. Koshitani and N. Kunugi, The principal 3-blocks of the 3-dimensional projective special unitary groups in non-defining characteristic, *J. Reine Angew. Math.* **539** (2001), 1–27
- [15] S. Koshitani and N. Kunugi, Broué’s conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9, *J. Algebra* **248** (2002), no. 2, 575–604
- [16] S. Koshitani and N. Kunugi, Blocks of central p -group extensions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 1, 21–26
- [17] S. Koshitani and N. Kunugi and K. Waki, Broué’s conjecture for non-principal 3-blocks of finite groups, *J. Pure Appl. Algebra* **173** (2002), no. 2, 177–211
- [18] S. Koshitani and N. Kunugi and K. Waki, Broué’s abelian defect group conjecture for the Held group and the sporadic Suzuki group, *J. Algebra* **279** (2004), no. 2, 638–666
- [19] S. Koshitani and N. Kunugi and K. Waki, Broué’s Abelian defect group conjecture holds for the Janko simple group J_4 . *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), no. 6, 1438–1456
- [20] S. Koshitani and H. Miyachi, The principal 3-blocks of four- and five-dimensional projective special linear groups in non-defining characteristic, *J. Algebra* **226** (2000), no. 2, 788–806
- [21] N. Kunugi, Morita equivalent 3-blocks of the 3-dimensional projective special linear groups, *Proc. London Math. Soc.* (3) **80** (2000), no. 3, 575–589
- [22] N. Kunugi and K. Waki, Derived equivalences for the 3-dimensional special unitary groups in non-defining characteristic, *J. Algebra*, **240** (2001), no. 1, 251–267
- [23] P. Landrock and G. O. Michler. Principal 2-blocks of the simple groups of Ree type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **260** (1):83-111, 1980
- [24] M. Linckelmann, Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and p -groups, *Math. Z.* **223** (1996), 87-100.
- [25] M. Linckelmann, On splendid derived and stable equivalences between blocks of finite groups, *J. Algebra* **242** (2001), no. 2, 819–843.
- [26] A. Marcus, Tilting complexes for group graded algebras. *J. Group Theory* **6** (2003), no. 2, 175–193

- [27] A. Marcus, Broue’s abelian defect group conjecture for alternating groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), no. 1, 7–14
- [28] H. Miyachi, Unipotent blocks of finite general linear groups in non-defining characteristic, Ph.D. thesis, Chiba University 2001
- [29] J. Müller and M. Schaps, The Broue conjecture for the faithful 3-blocks of $4.M_{22}$. *J. Algebra* 319 (2008), no. 9, 3588–3602
- [30] 永尾汎-津島行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987
- [31] 奥山哲郎, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, in 第6回多元環の表現論シンポジウム報告集 (越谷重夫, 佐藤真久編) 1996
- [32] T. Okuyama, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, preprint (1998)
- [33] T. Okuyama, Remarks on splendid tilting complexes, in Representation Theory of Finite Groups and Related Topics (edited by S. Koshitani) RIMS Kokyuroku (Proceedings of Research Institute for Mathematical Sciences) Vol. **1149** (Kyoto University, 2000) pp.53–59.
- [34] T. Okuyama and K. Waki, Decomposition numbers of $\mathrm{Sp}(4, q)$. *J. Algebra* **199** (1998), no. 2, 544–555
- [35] T. Okuyama, Derived equivalence in $\mathrm{SL}(2, q)$, preprint
- [36] L. Puig, Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley, *Astérisque* **181–182** (1990) 221–236.
- [37] J. Rickard, Morita theory for derived categories, *J. London Math. Soc.* (2) **39** (1989), 436–456.
- [38] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, *J. Pure Appl. Algebra* **61** (1989), 303–317.
- [39] J. Rickard, Derived equivalences as derived functors, *J. London Math. Soc.* (2) **43** (1991), 37–48.
- [40] J. Rickard, Splendid equivalences : Derived categories and permutation modules, *Proc. London Math. Soc.* (3) **72** (1996), 331–358.
- [41] J. Rickard, Equivalences of derived categories for symmetric algebras, *J. Algebra* **257** (2002), no. 2, 460–481.
- [42] R. Rouquier, From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect, in “Groups 1993, Galway/St-Andrews” Vol. 2 (edited by C. M. Campbell et al), London Math. Soc. Lecture Note Series Vol. **212**, Cambridge

- University Press, Cambridge, (1995), pp. 512–523.
- [43] R. Rouquier, The derived category of blocks with cyclic defect groups, in “Derived equivalences for group rings” Springer Lecture Notes in Math. **1685**, (1998), 199–220.
 - [44] R. Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), 101–146, de Gruyter, Berlin, 2001
 - [45] J. Thévenaz, G -algebras and modular representation theory. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995
 - [46] W. Turner, Equivalent blocks of finite general linear groups in non-describing characteristic. *J. Algebra* 247 (2002), no. 1, 244–267
 - [47] Y. Usami and M. Nakabayashi, Morita equivalent principal 3-blocks of the Chevalley group $G_2(q)$, *Proc. London Math. Soc.*(3) 86 (2003), 397–434