

テンソル代数の拡張とその応用

伊藤稔 (鹿児島大学理学部)

序文

論文 [1] で与えたテンソル代数の自然な拡張 $\bar{T}(V)$ について述べる. この拡張した代数の上には自然にある種の微分作用素が考えられ, これを利用していろいろな応用ができる.

通常のテンソル代数 $T(V)$ は次のようなベクトル空間 $\bar{T}(V)$ の部分空間と見なせる:

$$\bar{T}(V) = \bigoplus_{p \geq 0} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_{\infty}.$$

テンソル代数の積は自然にこの $\bar{T}(V)$ に拡張でき, この積で $\bar{T}(V)$ は結合的な次数つき代数となる. この代数 $\bar{T}(V)$ 上には正準交換関係の類似をみたす「掛け算作用素」と「微分作用素」が自然に考えられる. $\bar{T}(V)$ を Boson Fock 空間や Fermion Fock 空間の類似と見なして, これらの作用素を「生成作用素」「消滅作用素」と呼ぶのも自然である. これらから生成される作用素のなす代数は, Weyl 代数や Clifford 代数の類似とみなせる (同時に商代数としてこれらを含む). またこの作用素の代数は次のベクトル空間と自然に同一視できる:

$$\bigoplus_{p, q \geq 0} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_{\infty} \otimes_{\mathbb{C}S_q} V^{*\otimes q}.$$

この枠組みはテンソル空間に関連する表現論や不変式論に応用できる. たとえば Schur-Weyl 双対性やその一般化への応用がある. また Capelli 恒等式の類似を考えて, これを使ってテンソル代数における不変式論を展開することもできる ($T(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'})$ における $SL_n(\mathbb{R})$ -不変元の記述). このテンソル代数の拡張が, テンソル空間に関連する様々な研究に役立てば嬉しい.

テンソル空間への応用以外にも, この枠組みは immanant という行列の関数の研究に役立つ. 特に quantum immanant (という普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心のベクトル空間としての基底) への応用で威力を発揮する.

1. $\bar{T}(V)$ の定義

まず, 代数 $\bar{T}(V)$ を定義しよう. 簡単に言うと, 通常のテンソル代数の各々の斉次部分を無限対称群の表現になるように誘導したものである.

V を \mathbb{C} 上の n 次元ベクトル空間とする. テンソル代数 $T(V)$ の斉次部分 $T_p(V) = V^{\otimes p}$ には対称群 S_p の自然な作用が考えられる. これを右作用で表そう:

$$v_p \cdots v_1 \sigma = v_{\sigma(p)} \cdots v_{\sigma(1)}.$$

ここでテンソル積の記号 “ \otimes ” は省略している. この表現を無限対称群 S_∞ の表現に誘導したものを $\bar{T}_p(V)$ とする (ただし無限対称群 S_∞ は有限対称群の自然な列 $S_1 \subset S_2 \subset \cdots$ の帰納的極限である). すなわち,

$$\bar{T}_p(V) = V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_\infty = \text{Ind}_{\mathbb{C}S_p}^{\mathbb{C}S_\infty} V^{\otimes p}$$

とおく. そしてこれら $\bar{T}_0(V), \bar{T}_1(V), \dots$ の直和

$$\bar{T}(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \bar{T}_p(V)$$

を考える ($p=0$ のときは $\bar{T}_0(V) = \mathbb{C}S_\infty$ と定める).

このベクトル空間 $\bar{T}(V)$ に積の構造を入れよう. 二つの元

$$x = v_p \cdots v_1 \sigma \in \bar{T}_p(V), \quad y = w_q \cdots w_1 \tau \in \bar{T}_q(V)$$

に対して, その積 $xy \in \bar{T}_{p+q}(V)$ を

$$xy = (v_p \cdots v_1 \sigma)(w_q \cdots w_1 \tau) = v_p \cdots v_1 w_q \cdots w_1 \cdot \alpha^q(\sigma) \tau$$

と定めて, これを双線型になるように $\bar{T}(V) \times \bar{T}(V)$ に拡張する. ただし α は $s_i = (i \ i+1)$ を $s_{i+1} = (i+1 \ i+2)$ に移す対応で決まる S_∞ の群自己準同型である. この積は well defined であり, この積に関して $\bar{T}(V)$ は結合的な次数つき代数になる.

今, テンソル代数の斉次部分に対して S_∞ が作用するくらい大きな拡張を考えたが, もう少し小規模な拡張を考えよう. すなわち q を 0 以上の整数として,

$$T_p^{(q)}(V) = V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_{p+q} \simeq \text{Ind}_{\mathbb{C}S_p}^{\mathbb{C}S_{p+q}} V^{\otimes p}$$

とおく. これは $\bar{T}_p(V)$ の部分空間と見なせる. そしてこれらの直和

$$T^{(q)}(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T_p^{(q)}(V)$$

を考えよう (ただし $p=0$ のときは $T_0^{(q)}(V) = \mathbb{C}S_q$ と定める). この $T^{(q)}(V)$ は $\bar{T}(V)$ の部分代数になる. 特に $T^{(0)}(V)$ も部分代数になるが, これは通常テンソル代数 $T(V)$ と自然に同一視できる. $\bar{T}(V)$ は次の列の帰納的極限とも見なせる:

$$T(V) \simeq T^{(0)}(V) \subset T^{(1)}(V) \subset T^{(2)}(V) \subset \cdots$$

通常テンソル代数を含むこの大きな代数 $\bar{T}(V)$ が本稿の主役である.

代数 $\bar{T}(V)$ は次のような生成元と関係式を用いて定義することもできる (e_1, \dots, e_n が V の基底, s_1, s_2, \dots が S_∞ の生成元にあたる) :

生成元: $e_1, \dots, e_n, s_1, s_2, \dots$

関係式: $e_a e_b = e_b e_a s_1, \quad s_i e_a = e_a s_{i+1},$

$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad (\text{ただし } |i - j| > 1).$

2. 掛け算作用素と微分作用素

代数 $\bar{T}(V)$ における基本的な作用素として、ベクトルの掛け算が考えられる。この他に、ある種の微分作用素も自然に考えられる。そしてこの「掛け算作用素」と「微分作用素」のあいだには正準交換関係に似た交換関係が成立する。

まず、掛け算作用素から説明しよう。代数 $\bar{T}(V)$ の元 φ を固定して、これを「左から掛ける」という写像 $L(\varphi): \bar{T}(V) \rightarrow \bar{T}(V)$ を考える:

$$L(\varphi)\psi = \varphi\psi.$$

特に $\varphi = v \in V \subset \bar{T}(V)$ の場合と、 $\varphi = \sigma \in S_\infty \subset \mathbb{C}S_\infty = \bar{T}_0(V)$ の場合が基本的である。

これらの「掛け算作用素」 $L(v)$ と $L(\sigma)$ に加えて、双対空間 V^* の元 v^* に対応する「微分作用素」 $L(v^*)$ を考えよう。線型作用素 $L(v^*): \bar{T}(V) \rightarrow \bar{T}(V)$ を次のように定める:

$$L(v^*)v_p \cdots v_1 \sigma = \sum_{k=1}^p \langle v^*, v_k \rangle v_p \cdots \hat{v}_k \cdots v_1 \cdot (p \ p-1 \ \cdots \ k+1 \ k) \sigma.$$

ここで v_p, \dots, v_1 は V の元, σ は S_∞ の元とする。また \hat{v}_k は v_k を省くことを意味する。この定義式は、和の各項を「 v_k を左端に移動して v^* とカップリングしたもの」と思えば自然である。 $(p \ p-1 \ \cdots \ k+1 \ k)$ という置換は v_k の左端への移動に伴って現れるのである。

この定義は well defined であり、特にそのことから $L(v^*)$ は S_∞ の右作用と可換になることがわかる。この $L(v^*)$ を「 v^* による微分」と呼ぶことにする。

これらの作用素 $L(v), L(v^*), L(s_i), i = 1, 2, \dots$ で生成される作用素代数を $\mathcal{L}(V)$ と表すことにする。これらの作用素の像や交換関係に関して次が成り立つ:

命題 2.1. $L(v)$ は次数を一つ上げ、 $L(v^*)$ は次数を一つ下げる。より詳しく述べると、 $L(v)$ および $L(v^*)$ による $T_p^{(q)}(V)$ の像は次のような空間に収まる:

$$\begin{aligned} L(v): T_p^{(q)}(V) &\rightarrow T_{p+1}^{(q-1)}(V) \quad \text{ただし } q \geq 1, \\ T_p^{(0)}(V) &\rightarrow T_{p+1}^{(0)}(V), \end{aligned}$$

$$L(v^*): T_p^{(q)}(V) \rightarrow T_{p-1}^{(q+1)}(V) \quad \text{ただし } p \geq 1, \\ T_0^{(q)}(V) \rightarrow \{0\}.$$

命題 2.2. $L(\sigma), L(v), L(v^*)$ は $\mathbb{C}S_\infty$ の右作用と可換である.

命題 2.3. 次の交換関係が成立する:

$$L(v)L(w) = L(w)L(v)L(s_1), \\ L(v^*)L(w^*) = L(s_1)L(w^*)L(v^*), \\ L(v^*)L(w) = L(w)L(s_1)L(v^*) + \langle v^*, w \rangle,$$

および

$$L(s_i)L(v) = L(v)L(s_{i+1}), \quad L(v^*)L(s_i) = L(s_{i+1})L(v^*), \\ L(s_i)^2 = 1, \quad L(s_i)L(s_{i+1})L(s_i) = L(s_{i+1})L(s_i)L(s_{i+1}), \\ L(s_i)L(s_j) = L(s_j)L(s_i) \quad (\text{ただし } |i - j| > 1).$$

この交換関係は正準交換関係 (canonical commutation relation) や正準反交換関係 (canonical anticommutation relation) の類似と見なせる. 実際にはこれらを含むと言ってよい (実際 $\sigma \mapsto 1$ もしくは $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$ とすることで正準交換関係や正準反交換関係になる). $\bar{T}(V)$ を Boson Fock 空間 (対称テンソル代数 $S(V)$) や Fermion Fock 空間 (外積代数 $\Lambda(V)$) の類似と見なして, $L(v)$ と $L(v^*)$ を「生成作用素」「消滅作用素」と呼ぶのも自然である. さらに $\mathcal{L}(V)$ は Weyl 代数, Clifford 代数の類似と見なせる.

単に類似というだけではなくて, $\bar{T}(V)$ を $(\sigma - 1)$ や $(\sigma - \text{sgn}(\sigma))$ というイデアルで割れば $S(V)$ や $\Lambda(V)$ が得られる. 同様に $\mathcal{L}(V)$ をそのイデアル $(\sigma - 1), (\sigma - \text{sgn}(\sigma))$ で割れば Weyl 代数, Clifford 代数が得られる.

命題 2.3 の関係式は代数 $\mathcal{L}(V)$ の定義関係式にもなっている. また $\mathcal{L}(V)$ は次のベクトル空間と自然に同一視できる:

$$\bigoplus_{p, q \geq 0} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_\infty \otimes_{\mathbb{C}S_q} V^{*\otimes q}.$$

3. テンソル空間上の線型変換の記述

前節で考えた掛け算作用素と微分作用素を用いてテンソル空間の上の幾つかの基本的な線型変換がうまく表せる.

一般線型群 $GL(V)$ は自然に $T(V), \bar{T}(V)$ に作用する. これから決まるリー環 $\mathfrak{gl}(V)$ の $T(V), \bar{T}(V)$ への作用 π は $\pi(E_{ij}) = L(e_i)L(e_j^*)$ と表される. ただし e_1, \dots, e_n は V の基底,

e_1^*, \dots, e_n^* はその双対基底とする. また E_{ij} は $\mathfrak{gl}(V)$ の標準的な基底とする. $L(e_j^*)$ 自体は $T(V)$ 上の線型変換ではない ($T(V)$ の像は $T(V)$ に含まれない) が, 命題 2.1 からわかるように $L(e_i)L(e_j^*)$ は $T(V)$ 上の線型変換となる.

次のような Euler 作用素の類似を考えるのも面白い:

$$A = \sum_{i=1}^n L(e_i)L(e_i^*).$$

任意の $x \in \bar{T}_p(V)$ に対して, $Ax = px$ が成立する.

このような線型変換の表示は, テンソル代数と関連した表現論や不変式論に応用できる. 第 4 節では, Schur–Weyl 双対性やその一般化への応用について述べる. また第 5 節では, テンソル代数における Capelli 型の恒等式を考える (これは前節で与えた掛け算作用素や微分作用素に関する等式となる). そしてこれを利用してテンソル代数におけるある不変式環の生成元を記述する.

4. COMMUTANT の記述

掛け算作用素 $L(v)$ と微分作用素 $L(v^*)$ はテンソル空間の上の基本的な線型変換の集合の commutant を記述するのに役立つ. この節では, 具体的に Schur–Weyl 双対性とその一般化, そして Howe 双対性のテンソル代数における類似について議論する.

4.1. まず Schur–Weyl 双対性の自然な一般化を与えよう:

定理 4.1. $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して, 次のような $T_p^{(q)}(V)$ 上の作用素の一次結合全体を $\mathcal{L}_l^{(q)} = \mathcal{L}_l^{(q)}(V)$ という記号で表す:

$$L(v_l) \cdots L(v_1)L(\sigma)L(v_1^*) \cdots L(v_l^*) \in \text{End}(T_p^{(q)}(V)).$$

ただし v_i, v_j^*, σ はそれぞれ V, V^*, S_{l+q} の元である. このとき次が成立する:

- (i) $T_p^{(q)}(V)$ 上の作用素として, $\mathcal{L}_0^{(q)} \subset \mathcal{L}_1^{(q)} \subset \dots \subset \mathcal{L}_p^{(q)}$ という包含関係が成立する. また $l > p$ に対して $\mathcal{L}_l^{(q)} = \{0\}$ が成立する.
- (ii) $R(\mathbb{C}S_{p+q})$ と $\mathcal{L}_p^{(q)}$ は $\text{End}(T_p^{(q)}(V))$ の中で互いに他の commutant になる. ただし $\mathbb{C}S_{p+q}$ の $T_p^{(q)}(V)$ への右からの掛け算を R で表している.

証明. (i) の証明は省略する. (ii) を示すには, 再交換団定理 ([GW] の定理 3.3.7) より $R(\mathbb{C}S_{p+q})' = \mathcal{L}_p^{(q)}$ を示せば十分である. ただし \mathcal{D}' は $\mathcal{D} \subset \text{End}(T_p^{(q)}(V))$ の commutant を表す. $R(\mathbb{C}S_{p+q})' \supset \mathcal{L}_p^{(q)}$ という包含関係は命題 2.2 から容易にわかる. よって逆の包含関係 $R(\mathbb{C}S_{p+q})' \subset \mathcal{L}_p^{(q)}$ を示せばよい.

前節でオイラー作用素の類似として $A = \sum_{i=1}^n L(e_i)L(e_i^*)$ を考えたが、この A を発展させた次のような作用素を考える:

$$A_p = \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} L(e_{i_p}) \cdots L(e_{i_1})L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*).$$

ただし $[n]$ は $\{1, \dots, n\}$ という集合とする. また I は (i_1, \dots, i_p) という数列の省略形とする. このとき $\varphi \in T_p^{(q)}(V)$ に対して $A_p\varphi = \varphi$ となることは単純な計算でわかる. よって $f \in R(\mathbb{C}S_{p+q})'$ に対して、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= f(A_p\varphi) \\ &= f\left(\frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} L(e_{i_p}) \cdots L(e_{i_1})L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*)\varphi\right) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} f(L(e_{i_p}) \cdots L(e_{i_1})L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*)\varphi) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} f(e_{i_p} \cdots e_{i_1}t_I). \end{aligned}$$

ここで t_I は $t_I = L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*)\varphi \in \mathbb{C}S_{p+q}$ を表している. f は $\mathbb{C}S_{p+q}$ の右作用と可換であるから、さらに次のように書き換えることができる:

$$f(\varphi) = \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} f(e_{i_p} \cdots e_{i_1})t_I = \frac{1}{p!} \sum_{I \in [n]^p} L(f(e_{i_p} \cdots e_{i_1}))L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*)\varphi.$$

これは f が $\mathcal{L}_p^{(q)}$ の元であることを表す. □

注意. (1) 命題 2.3 を使うと $\mathcal{L}_p^{(0)} = \pi(U(\mathfrak{gl}(V)))$ となることがわかる. よって $q = 0$ のときは、定理 4.1 はいわゆる Schur–Weyl 双対性に一致することになる.

(2) $p = 0$ のときは、定理 4.1 は「 $L(\mathbb{C}S_q)$ と $R(\mathbb{C}S_q)$ は $\text{End}(\mathbb{C}S_q)$ の中で互いに他の commutant である」という事実に対応する.

(3) 任意の群 G に対して、任意の右移動と可換な G 上の変換 $f: G \rightarrow G$ はある左移動に一致する. この事実は次のように簡単に示せる. $x \in G$ に対して、 $f(x) = f(ex)$ が成立する (ただし e は G の単位元). f は x の右掛け算と可換だから、 $f(ex) = f(e)x$ という関係式を得る. これは f が $f(e)$ の左掛け算に一致することを意味する. 定理 4.1 の証明はこれと同じ原理に基づいている.

4.2. Howe 双対性のテンソル空間での類似も考えられる. $GL_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}$ への自然な作用を考えよう. これは $T_p^{(q)}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ への作用に自然に延長できる. この作用に関して、次の定理が成り立つ. これは多項式の空間 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ の上の $(GL_n(\mathbb{C}), GL_{n'}(\mathbb{C}))$ 双対性

の類似と見なせる. 証明はテンソル空間における不変式論の第一基本定理 ([GW] の定理 4.3.1) からわかる.

定理 4.2. \mathcal{Q}_1 を $GL_n(\mathbb{C})$ の作用と S_{p+q} の右作用から生成される $\text{End}(T_p^{(q)}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}))$ の部分代数とする. さらに次のような作用素の和で表されるもの全体を \mathcal{Q}_2 とする.

$$\sum_{I \in [n]^p} L(w_{i_p a_p}) \cdots L(w_{i_1 a_1}) L(\sigma) L(w_{i_1 b_1}^*) \cdots L(w_{i_p b_p}^*).$$

ただし w_{ij} は $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}$ の標準的な基底, w_{ij}^* はその双対基底であるとする. また σ は S_{p+q} の元とする. このとき \mathcal{Q}_1 と \mathcal{Q}_2 は互いに他の commutant になる.

次はこの定理 4.2 からすぐにわかる:

系 4.3. C を $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元とする. すると C の $T_p^{(q)}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ への作用は \mathcal{Q}_2 に属する. さらにこの作用素は \mathcal{Q}_2 の中心元となる.

次の節では, この関係を生成元のレベルで記述する. これは Capelli 恒等式の類似とも見なせる.

5. $T(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ 上の CAPELLI 型恒等式とその応用

この節では, $T(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ 上の Capelli 型恒等式を与える. これは第 2 節で考えた掛け算作用素と微分作用素に関する等式である. この Capelli 型の恒等式は系 4.3 における不変作用素の対応を記述する等式とも見なせる.

5.1. まず, Capelli 元と呼ばれる普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元を復習する ([C1], [C2], [HU], [U]). E_{ij} を \mathfrak{gl}_n の標準的な基底として, これを成分とする $E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ という行列を考える. この E を $U(\mathfrak{gl}_n)$ の元を成分とする n 次正方行列と見て, 次のような $U(\mathfrak{gl}_n)$ の元を考える:

$$C_n = \text{column-det}(E + \text{diag}(n-1, n-2, \dots, 0)).$$

ここで “column-det” は “column-determinant” を意味する. すなわち成分が必ずしも可換とは限らない行列 $X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ に対して,

$$\text{column-det } X = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)1} X_{\sigma(2)2} \cdots X_{\sigma(n)n}$$

とおく. この C_n は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元となることが知られている. これはさらに小行列式の和に一般化できる:

$$C_r = \sum_{I \in \binom{[n]}{r}} \text{column-det}(E_{II} + \text{diag}(r-1, r-2, \dots, 0)).$$

ただし $X = (X_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'}$ という行列と $I \in [n]^r, J \in [n']^r$ という数列に対して, $X_{IJ} = (X_{i_a j_b})_{1 \leq a, b \leq r}$ とおく. また次のような記号を用意する.

$$\binom{[n]}{r} = \{(i_1, \dots, i_r) \in [n]^r \mid i_1 < \dots < i_r\},$$

$$\left(\binom{[n]}{r}\right) = \{(i_1, \dots, i_r) \in [n]^r \mid i_1 \leq \dots \leq i_r\}.$$

この C_r はやはり $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元になり, しかも C_1, \dots, C_n は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心を生成することが知られている. C_r を r 次の Capelli 元と呼ぶ.

以下, 定理 4.2 と同じ設定としよう. すなわち, $GL_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}$ への自然な作用を考えて, これを $\bar{T}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ への作用に拡張する. これから決まる \mathfrak{gl}_n の $\bar{T}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ への作用は次のように表される:

$$(5.1) \quad \pi(E_{ij}) = \sum_{a=1}^{n'} L(w_{ia})L(w_{ja}^*).$$

ここで w_{ij} と w_{ij}^* は $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}$ の標準的な基底およびその双対基底とする. そして

$$Z = (L(w_{ij}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'}, \quad Z^* = (L(w_{ij}^*))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'}$$

という行列を考える (これらは $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ の元を成分とする $n \times n'$ 行列である). すると (5.1) は簡潔に $\pi(E) = Z^t Z^*$ と表すことができる.

この設定の下で, 次のような Capelli 恒等式の類似が成り立つ (cf. [HU], [U]):

定理 5.1. $1 \leq r \leq p$ に対して, 次が成立する.

$$\begin{aligned} \pi(C_r) &= \sum_{I \in \binom{[n]}{r}} \sum_{J \in \left(\binom{[n']}{r}\right)} \frac{1}{J!} \text{column-det } Z_{I^\circ J^\circ} \text{column-det } Z_{IJ}^* \\ &= \frac{1}{r!2} \sum_{I \in [n]^r} \sum_{J \in [n']^r} \text{column-det } Z_{I^\circ J^\circ} \text{column-det } Z_{IJ}^*. \end{aligned}$$

ただし $I = (i_1, \dots, i_r), J = (j_1, \dots, j_r)$ という数列に対して, I°, J° で順序を逆転させた $I^\circ = (i_r, \dots, i_1), J^\circ = (j_r, \dots, j_1)$ という数列を表す. また, $I = (i_1, \dots, i_p) \in [n]^p$ の中の $1, \dots, n$ の重複度を m_1, \dots, m_n とし, これを用いて $I! = m_1! \dots m_n!$ とおく.

系 4.3 において $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心と \mathcal{Q}_2 が自然に対応する様子を見た. 定理 5.1 はこの対応を生成元のレベルで記述している. 実際, 定理 5.1 の右辺は \mathcal{Q}_2 に属す (4.1 で見たように $\mathcal{L}_r^{(q)}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \subset \mathcal{L}_p^{(q)}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ であるから). この事実は, $(GL_n(\mathbb{C}), GL_{n'}(\mathbb{C}))$ という dual pair において二つの普遍包絡環の中心と不変微分作用素全体のなす集合の対応を通常の Capelli 恒等式が記述していることに対応する ([H], [HU], [U]).

ちなみに定理 5.1 はより “higher” なものに一般化できる (詳しくは [I] を参照のこと).

5.2. Capelli 恒等式は不変式論で重要な役割を果たしたが、定理 5.1 も不変式論へ応用できる。これを利用して $T(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ や $\bar{T}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ における $SL_n(\mathbb{C})$ -不変元が決定できるのである。これは多項式環 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})$ における $SL_n(\mathbb{C})$ -不変元を Capelli 恒等式を使って決定するという古典的な結果 ([W] の定理 2.6.A) の非可換な枠組みでの類似と見なせる。

定理 5.2. $SL_n(\mathbb{C})$ -不変元からなる集合 \mathcal{I} を次のように定める:

$$\mathcal{I} = \{\text{column-det } Y_{I_n^\circ J^\circ} \mid J \in [n]^{n'}\}.$$

ただし Y は $Y = (w_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'}$ という行列である (これは $\text{Mat}_{n, n'}(\bar{T}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}))$ の元である)。また I_n は $I_n = (1, 2, \dots, n)$ という数列を表す。これに対して次が成立する:

- (i) $\bar{T}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})^{SL_n(\mathbb{C})}$ は \mathcal{I}, S_∞ から生成される。
- (ii) $T(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})^{SL_n(\mathbb{C})}$ の任意の元は $A_1 \cdots A_k \sigma$ という形の不変元の一次結合で表される。ただし A_1, \dots, A_k は \mathcal{I} の元, σ は S_{rn} の元とする。

証明. $\varphi \in \bar{T}_k(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})^{SL_n(\mathbb{C})}$ に対して、次が成立する:

$$\pi(E_{ij})\varphi = \delta_{ij} \frac{k}{n} \varphi.$$

これは φ の $SL_n(\mathbb{C})$ -不変性からすぐにわかる。さらにこれと column-determinant の定義から

$$\pi(C_n)\varphi = \left(\frac{k}{n} + n - 1\right) \left(\frac{k}{n} + n - 2\right) \cdots \left(\frac{k}{n} + 0\right) \varphi$$

となることがわかる。一方、定理 5.1 から次を得る。

$$\pi(C_n)\varphi = \sum_{J \in \binom{[n]}{r}} \frac{1}{J!} \text{column-det } X_{I_n^\circ J^\circ} \text{column-det } X_{I_n J}^* \varphi.$$

column-det $X_{I_n J}^*$ は $SL_n(\mathbb{C})$ の作用と可換であるから、column-det $X_{I_n J}^* \varphi$ は $SL_n(\mathbb{C})$ 不変になる。よって φ は $\varphi = \sum_{i=1}^l A_i \varphi_i$ と表せる。ただし A_i は \mathcal{I} の元, φ_i は $\bar{T}_{k-n}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'})^{SL_n(\mathbb{C})}$ の元である。この議論を繰り返せば、 k に関する帰納法で証明が完了する。 \square

6. QUANTUM IMMANANT への応用

最後に代数 $\bar{T}(V), \mathcal{L}(V)$ の immanant や quantum immanant への応用について簡単に触れたい。

外積代数は行列式を扱うのにしばしば役立つ。また対称テンソル代数はパーマメントと呼ばれる行列関数を扱うのに役立つ。同様に本稿で与えた代数 $\bar{T}(V), \mathcal{L}(V)$ は immanant

と呼ばれるもっと一般的な次の行列函数を扱うのに役立つ:

$$\text{imm}_\lambda X = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma) X_{\sigma(1)1} \cdots X_{\sigma(n)n}.$$

ここで χ_λ は S_n の分割 λ に対応する既約指標である (λ は n の分割とする). 本稿で与えた代数 $\bar{T}(V)$ は, この immanant の母函数を考える舞台として活用できる.

immanant を扱うこの手法は quantum immanant という普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元に適用したときに特に威力を発揮する. Okounkov によって導入された quantum immanant は Capelli 恒等式に現れる普遍包絡環の中心元の自然な一般化であり, $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の (ベクトル空間としての) 基底をなす [O]. 本稿で与えた代数 $\bar{T}(V)$ は, この quantum immanant の母函数を考える舞台として具合がよい. この母函数を通じて考えることで, quantum immanant の様々な関係式を単純な計算で証明できるのである.

Capelli 恒等式やその類似の定番の研究方法として外積代数を用いるものがあるが, $\bar{T}(V)$ を用いたこの計算はこの外積代数の方法を自然に発展させたものと見なすことができる.

この手法で証明できる関係式は今のところ R -行列を用いて [O] で証明されているものを本質的には越えてはいない. しかし通常母函数の考え方の延長という点でこの手法は面白いし, まだまだ発展の余地があるように思える. 定理 5.1 の “higher” な一般化も考えられる. 詳細は [I] を参照のこと.

REFERENCES

- [C1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [C2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I] M. Itoh, *Extensions of the tensor algebra and their applications*, preprint (2009), arXiv: 0909.5586v2.
- [O] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transform. Groups **1** (1996), no. 1, 99–126.
- [U] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sūgaku **46** (1994), 206–227, (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants,” AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu.
- [W] H. Weyl, *The Classical Groups. their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, 1946.