

トーリックイデアルの20年

大杉英史

立教大学理学部 / JST CREST

トーリックイデアルの20年 (?)

本稿のタイトルは「トーリックイデアルの20年」であるが、トーリックイデアルの研究は20年前から始まった訳ではない。例えば、Sturmfels のレクチャーノート [22] では、Herzog 氏の1970年の論文 [10] が “early reference” として挙げられている。ここでいう「20年」は、トーリックイデアルに纏わる以下の3つの発見以来の20年を指す：

- (1) 凸多面体の三角形分割とトーリックイデアルのイニシャルイデアルの対応。

1991年、Sturmfels [21] は、Gel'fand–Zelevinskii–Kapranov [9] が導入した凸多面体の正則三角形分割が、トーリックイデアルのイニシャルイデアルの根基で定義されるイニシャル複体と一致することを発見した。

- (2) トーリックイデアルのグレブナー基底による整数計画問題の解法。

1991年、Conti–Traverso [5] は、トーリックイデアルのグレブナー基底による割り算を利用し、整数計画問題を解くアルゴリズム(いわゆる Conti–Traverso アルゴリズム)を発見した。

- (3) トーリックイデアルのグレブナー基底による分割表の検定。

Diaconis–Sturmfels [7] は、トーリックイデアルの生成系(あるいは、グレブナー基底)をマルコフ基底とするマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて、分割表の検定を行う方法を発見した(論文が投稿されたのは、1993年である。)

3つの発見の後、トーリックイデアルの研究が急速に発展したのは、これらの内容を網羅した Sturmfels のレクチャーノート [22] の貢献も大きいと思われる(日本語の本 [12] でも解説されている。)本稿の目的は、これらの内容について、簡単に説明するとともに、20年間に発展した理論を(ごく一部ではあるが)紹介することである。

1 トーリックイデアル

有限個の格子点からなる集合 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ が \mathbb{R}^d の配置であるとは、ベクトル $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ が存在して、 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$ をみたすときにいう。配置 A は集合であるが、しばしば、 $d \times n$ 整数行列とみなす。体 K 上のローラン多項式環 $K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_d, t_d^{-1}]$ を準備し、 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ のとき、 $T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d} \in K[T, T^{-1}]$ と表す。このとき、semigroup ring $K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \dots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$ を A のトーリック環という。体 K 上の n 変数多項式環 $K[X] = K[x_1, \dots, x_n]$ に対して、全射環準同型 $\pi : K[X] \rightarrow K[A]$ を $\pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i}$ ($1 \leq i \leq n$) で定義し、その核 $I_A := \ker \pi$ を A のトーリックイデアルという。

例 1.1 配置

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して、 $K[A] = K[t_1 t_3, t_1 t_4, t_1 t_5, t_2 t_3, t_2 t_4, t_2 t_5]$ であり、

$$I_A = \langle x_1 x_5 - x_2 x_4, x_1 x_6 - x_3 x_4, x_2 x_6 - x_3 x_5 \rangle$$

である。

一般に、トーリックイデアルは素イデアルであり、2 項式で生成される：

$$I_A = \langle p - q \in K[X] \mid p, q \text{ は } \pi(p) = \pi(q) \text{ をみたす単項式} \rangle.$$

また、 A が配置であることから、 I_A は (通常の次数付けで) 斉次イデアルとなる。一方、 A を $d \times n$ 行列とみなせば、

$$\begin{aligned} I_A &= \langle X^{\mathbf{u}} - X^{\mathbf{v}} \in K[X] \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle X^{\mathbf{u}^+} - X^{\mathbf{u}^-} \in K[X] \mid \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n, A\mathbf{u} = \mathbf{0} \rangle \end{aligned}$$

と表すこともできる。ただし、 \mathbf{u}^+ は \mathbf{u} の正の成分、 \mathbf{u}^- は \mathbf{u} の負の成分に対応するベクトルである (ゆえに、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ が成り立つ。) 簡単のため、各 \mathbf{a}_i が非負整数ベクトルであるとすると、

$$I_A = \langle x_1 - T^{\mathbf{a}_1}, \dots, x_n - T^{\mathbf{a}_n} \rangle \cap K[X]$$

が成り立つ。

2 トーリックイデアルのグレブナー基底

最初に、グレブナー基底について、簡単に紹介する。多項式環 $K[X]$ の単項式全体の集合における全順序 $<$ が単項式順序であるとは、以下の2条件をみたすときにいう：

- (1) 任意の単項式 $u \neq 1$ に対して、 $1 < u$ が成り立つ。
- (2) 任意の単項式 u, v, w に対して、「 $u < v \Rightarrow uv < vw$ 」が成り立つ。

例 2.1 多項式環 $K[X]$ の2つの単項式を

1. まず、 x_1 に関して次数を比較して、大きい方が大きい。
2. 同じならば x_2 に関して次数を比較して、大きい方が大きい。
3. 同じならば x_3 に関して次数を比較して、...

というルールで比較すると、単項式順序の定義をみたす。これを、変数の順序 $x_1 > \dots > x_n$ に付随する辞書式順序という。変数の順序を変えれば、異なる辞書式順序が得られる。

単項式順序 $<$ を1つ固定する。任意の多項式 $0 \neq f \in K[X]$ に対して、 f に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のものを $\text{in}_<(f)$ で表す。多項式環 $K[X]$ のイデアル I に対して、 $\text{in}_<(I) := \langle \text{in}_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$ を I のイニシャルイデアルという。また、 $\{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ が $<$ に関する I のグレブナー基底であるとは、 $\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_t) \rangle$ をみたすときにいう。イデアル I と単項式順序が与えられたとき、 I のグレブナー基底は必ず存在する。また、 I のグレブナー基底は I を生成する。

トーリックイデアルに対してグレブナー基底を考えると、被約グレブナー基底 (= 無駄のないグレブナー基底) は斉次2項式からなることがわかる。トーリックイデアルのグレブナー基底については、例えば、以下の性質がよく研究されている。

- (i) ある単項式順序に関して、 I_A のグレブナー基底が2次の2項式からなる。
- (ii) $K[A]$ は “Koszul 代数” である。
- (iii) I_A は2次の2項式で生成される。

一般に、(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) が成り立つが、(ii) \Rightarrow (i) および (iii) \Rightarrow (ii) は成り立たない (両者の反例は、例えば [15] で挙げられている。) “Koszul 代数” というのは判定が難しい性質で、条件 (i) は貴重な十分条件である。これらの性質については本稿では紹介しないので、詳しく知りたい方は [11] を参照していただきたい。

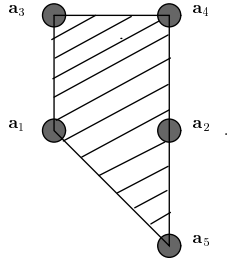
3 凸多面体の三角形分割

配置 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ に対して,

$$\text{Conv}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i \in \mathbb{Q}^d \mid 0 \leq r_i \in \mathbb{Q}, \sum_{i=1}^n r_i = 1 \right\}$$

を A の凸閉包という. 集合 $P \subset \mathbb{Q}^d$ が整凸多面体であるとは, $P = \text{Conv}(A)$ をみたす有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^d$ が存在するときという.

例 3.1 配置 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $\text{Conv}(A)$ は以下のような四角形である:



整凸多面体 P が単体であるとは, P の頂点数が $1 + \dim P$ であるときいう (例: 線分, 三角形, 四面体.) 配置 A の被覆とは, 頂点がすべて A の元であるような単体の集合 Δ で, $\text{Conv}(A) = \bigcup_{F \in \Delta} F$ をみたすものをいう. 配置 A の被覆 Δ が三角形分割であるとは,

- (1) $F \in \Delta$ であり, F' が F の面ならば, $F' \in \Delta$,
- (2) $F, F' \in \Delta$ ならば, $F \cap F'$ は F の面, かつ, F' の面,

が成り立つときいう. Gel'fand たちは (ジェネリックな) ベクトル $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して, A の三角形分割 $\Delta_{\mathbf{w}}$ を定義した (正則三角形分割). 定義は幾何的なので省略するが, 実は, 正則三角形分割がトーリックイデアルのイニシャルイデアルと対応する. 配置 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ と単項式順序 $<$ に対して,

$$\Delta(\text{in}_{<}(I_A)) := \left\{ \text{Conv}(B) \mid B \subset A, \prod_{\mathbf{a}_i \in B} x_i \notin \sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} \right\}$$

を A の $<$ に関するイニシャル複体という. Sturmfels は 1991 年の論文 [21] で, ベクトル $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ を変数の重みとする単項式順序に関して, $\Delta(\text{in}_{\mathbf{w}}(I_A)) = \Delta_{\mathbf{w}}$ が成り立つことを証明した. イデアルを固定すると, 任意の単項式順序は重みベクトルで実現できるので, 以下が成り立つ.

定理 3.2 イニシャル複体 $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ は A の三角形分割である .

例 3.3 例 3.1 の配置

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

のトーリックイデアルは $I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5, x_1x_4 - x_2x_3, x_2^2 - x_4x_5 \rangle$ である .
 ここで , 辞書式順序 $<_1 (x_2 > x_1 > x_3 > x_4 > x_5)$ に関する I_A のグレブナー基底は $\{x_1x_2 - x_3x_5, x_2x_3 - x_1x_4, x_2^2 - x_4x_5, x_1^2x_4 - x_3^2x_5\}$ であり ,

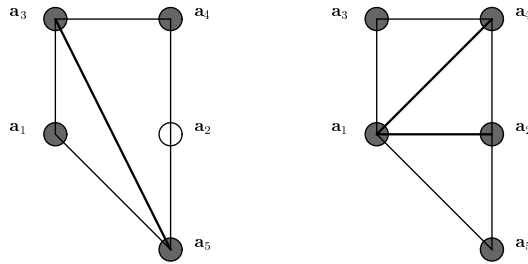
$$\text{in}_{<_1}(I_A) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_2^2, x_1^2x_4 \rangle, \quad \sqrt{\text{in}_{<_1}(I_A)} = \langle x_1x_4, x_2 \rangle$$

である . これより , イニシャル複体 $\Delta(\text{in}_{<_1}(I_A))$ は以下の左図のようになる .

一方 , 辞書式順序 $<_2 (x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1)$ に関する I_A のグレブナー基底は $\{x_3x_5 - x_1x_2, x_2x_3 - x_1x_4, x_4x_5 - x_2^2\}$ であり ,

$$\text{in}_{<_2}(I_A) = \sqrt{\text{in}_{<_2}(I_A)} = \langle x_2x_3, x_3x_5, x_4x_5 \rangle$$

である . これより , イニシャル複体 $\Delta(\text{in}_{<_2}(I_A))$ は以下の右図のようになる .



配置 A の被覆 (三角形分割) Δ が unimodular であるとは , Δ に属する任意の極大単体 σ の頂点集合 B に対して , $\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}B$ が成り立つときにいう .
 ただし ,

$$\mathbb{Z}A = \left\{ \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{a}_i \mid z_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

である . 例えば , 上の例の $\Delta(\text{in}_{<_1}(I_A))$ は unimodular ではないが , $\Delta(\text{in}_{<_2}(I_A))$ は unimodular である . 正則三角形分割が unimodular であるかどうかは , イニシャルイデアルから容易に読み取ることができる .

定理 3.4 イニシャル複体 $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ が unimodular $\iff \sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} = \text{in}_{<}(I_A)$

イニシャルイデアルと unimodular 三角形分割に関連して , 以下のような性質がよく研究されている :

- (i) A は unimodular . (任意の三角形分割は unimodular .)
 (\Leftrightarrow 任意の単項式順序 $<$ に対して , $\sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} = \text{in}_{<}(I_A)$.)
- (ii) A は compressed .
 (\Leftrightarrow 任意の逆辞書式順序 $<$ に関して , $\sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} = \text{in}_{<}(I_A)$.)
- (iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ .
 (\Leftrightarrow ある単項式順序 $<$ に対して , $\sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} = \text{in}_{<}(I_A)$.)
- (iv) A は unimodular な三角形分割を持つ .
- (v) A は unimodular な被覆を持つ .
- (vi) $K[A]$ は 正規 . ($\Leftrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$)

このとき一般に , (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) が成り立つが , それぞれの逆は正しくない . これらの条件については , Sullivant [23] による「条件 (ii) をみたく A の幾何的な特徴付け」など , 面白い話題があるが , これらをすべて紹介することは難しいので , 本稿では , 典型的な研究例として , ルート系の正根に付随する配置と , 有限グラフの辺凸多面体について紹介する .

3.1 ルート系の正根に付随する配置

1997年 , Gel'fand–Graev–Postnikov [8] は , A 型ルート系の正根全体

$$A_{d-1} = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$$

(ただし , $e_i \in \mathbb{Z}^d$ は単位ベクトル) に付随する配置

$$\overline{A_{d-1}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & A_{d-1} & \\ 0 & & & \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

の unimodular な正則三角形分割 $\Delta(\text{in}_{<}(\overline{A_{d-1}}))$ で , $\text{in}_{<}(\overline{A_{d-1}})$ が 2 次の単項式で生成されるものを構成した¹ . 彼らは , A_{d-1} に付随する一般超幾何方程式系の解空間の次元を計算するために , この三角形分割を用いて $\text{Conv}(\overline{A_{d-1}})$ の正規化体積がカタラン数 $\frac{1}{d} \binom{2d-2}{d-1}$ と一致することを証明したのである

¹彼らは純粋に幾何的な構成を行ったのであるが , グレブナー基底を用いれば , きわめて簡明に証明できる .

が、実は、解空間の次元と正規化体積が一致するための条件として、 $K[A]$ が “Cohen–Macaulay” という条件が必要で、これは $K[A]$ が正規であることから従う。2002年、Ohsugi–Hibi [17] はこの結果を他のルート系の正根全体

$$\begin{aligned} D_d &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq d\} \\ B_d &= \{e_1, \dots, e_d\} \cup D_d \\ C_d &= \{2e_1, \dots, 2e_d\} \cup D_d \end{aligned}$$

に付随する配置に拡張し、2次のスクエアフリーな単項式で生成されるイニシャルイデアルの発見に成功した。

3.2 有限グラフの辺凸多面体

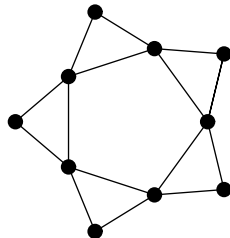
頂点集合 $\{1, 2, \dots, d\}$ 上の有限連結グラフ G を考える。ただし、ループや重複辺は持たないと仮定する。また、 $E(G)$ を G の辺集合とする。グラフ G の各辺 $e = \{i, j\} \in E(G)$ に対して、 $\rho(e) := e_i + e_j \in \mathbb{Z}^d$ と定義する。このとき、 $A_G := \{\rho(e) \mid e \in E(G)\} \subset \mathbb{Z}^d$ と定義し、その凸閉包 $\text{Conv}(A_G)$ を G の辺凸多面体という。以下の結果は [13] によるものであるが、これとは独立に、[20] でも (i) \Leftrightarrow (iii) が証明されている。

定理 3.5 有限連結グラフ G に対して、以下は同値：

- (i) $K[A_G]$ は正規
- (ii) A_G は unimodular な被覆を持つ
- (iii) G に現れる、頂点を共有しない任意の2つの奇サイクル C, C' に対して、 C のある頂点と、 C' のある頂点を結ぶような G の辺が存在する。

また、以下のような貴重な辺凸多面体も発見されている。このような性質を持つ多面体は、辺凸多面体以外では発見されていない。

例 3.6 ([14]) 以下のグラフ G に対して、 A_G は unimodular な三角形分割を



持つが、いずれも正則三角形分割ではない（すなわち、6条件 (i) ~ (vi) の中で、(iv) をみたすが、(iii) をみたさない例になっている。）

4 整数計画問題への応用

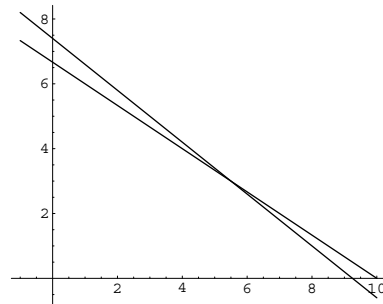
ちゃんとした定義については [6] や [12] を参照していただくことにして、ここでは、以下のような整数計画問題の具体例をもとに、Conti-Traverso アルゴリズムについて説明する。

例 4.1 ([6] §8) A 社から、1 個あたり 400 kg, 2 m³, B 社から、1 個あたり 500 kg, 3 m³ の荷物を運んで欲しいと依頼された。1 個あたりの報酬は A 社が 11 ドル, B 社が 15 ドルである。所有するトラックには、3700 kg, 20 m³ まで載せられる。利益を最大にするには、それぞれから何個ずつ請け負えばよいか？

この問題を式で表すと、制約条件

$$\begin{cases} 4a + 5b \leq 37 \\ 2a + 3b \leq 20 \\ a, b \geq 0 \end{cases}$$

のもと、 $11a + 15b$ を最大にするような整数 a, b を求めればよいことが分かる。この連立不等式の表す領域は以下ようになる。もし、 $a, b \in \mathbb{Z}$ という制



約がなければ、グラフにおける 2 直線の交点が最適な解となるのだが、残念ながら、交点は $(11/2, 3)$ であるから、これは最適解ではない。

ここで、Conti-Traverso アルゴリズムを用いた解法を紹介しよう。まず、スラック変数と呼ばれる新たな変数 c, d を導入することによって、この問題を“標準化”すると、制約条件

$$\begin{cases} 4a + 5b + c = 37 \\ 2a + 3b + d = 20 \\ a, b, c, d \geq 0 \end{cases}$$

のもと、 $-11a - 15b$ を最小にするような整数 a, b, c, d を求める問題に変形できる。これを行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて表すと，制約条件

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 20 \end{pmatrix}$$

のもと，内積 $(-11, -15, 0, 0) \cdot (a, b, c, d)$ を最小にするような非負整数ベクトル (a, b, c, d) を求める問題であることに注意しよう．この A は配置ではないが，トーリックイデアルを定義することはできる．重み

$$\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1) = (1, 1, 1, 1)$$

で定義される単項式順序に関する I_A のグレブナー基底を計算すると，

$$\mathcal{G} = \{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$$

となる．(イデアル I_A は次数付け $(6, 8, 1, 1)$ で斉次であることに注意せよ．) 整数ベクトル $(a, b, c, d) = (0, 0, 37, 20)$ は明らかに制約条件をみたす．そこで，対応する単項式 $x_3^{37} x_4^{20}$ を \mathcal{G} で割り算すると，余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ である．よって，最適解 (の1つ) は $(a, b, c, d) = (4, 4, 1, 0)$ であり，A社から4個，B社から4個請け負うと利益が最大になることが分かる．

整数計画問題は解くことが難しい問題であることが知られており，問題に応じてさまざまな手法が提案されている．Conti-Traverso アルゴリズムは大変興味深い解法であるが，その有効性については未解明であるように思われる．個別のいくつかの問題について，「この問題については，Conti-Traverso アルゴリズムを直接使うことは有効な方法ではない」ことは分かっているが，「Conti-Traverso アルゴリズムが他の手法より有効な問題はないのか？」や，「Conti-Traverso アルゴリズムをそのまま適用するのではなく，個別の問題用にアレンジできないか？」などは興味深い問題である．

5 分割表の検定への応用

分割表とは，以下のような表のことをいう：

代数 \ 統計	5	4	3	2	1	計
5	2	1	1	0	0	4
4	8	3	3	0	0	14
3	0	2	1	1	1	5
2	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	0	1	1
計	10	6	5	2	3	26

これは、 5×5 の分割表の例である．また、代数と統計という2つの要因があるので2元分割表とよばれる．ここで、問題となるのは、

代数と統計の成績には関連はあるのか？

ということである．このようなタイプの表に対しては、同じ周辺和をもつ表全体からなる集合

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \left| \begin{array}{ccccc|c} & & & & & 4 \\ & & & & & 14 \\ & & t_{ij} & & & 5 \\ & & & & & 2 \\ & & & & & 1 \\ \hline 10 & 6 & 5 & 2 & 3 & 26 \end{array} \right. , 0 \leq t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

の元を列挙し、すべての表に対して χ^2 統計量を計算する、“Fisher の正確検定”という手法がもっとも効果的であると言われている．しかしながら、一般に、この F の元の数に膨大である（この例の場合、 $|F| = 229,174$ である）．そこで F 上をランダムウォークして、 F の元をサンプリングし、統計量を計算することによって分析する、マルコフ連鎖モンテカルロ法が用いられる．マルコフ連鎖モンテカルロ法を実行するため、行和、列和がゼロであるような行列を有限個用意し、それを足したり引いたりすることによって、 F 上をランダムウォークする．例えば、 2×3 分割表の場合、

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = N$$

をみたく α_i, β_j を固定したとき

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \left| \begin{array}{ccc|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \alpha_1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \alpha_2 \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & N \end{array} \right. , 0 \leq t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

に対して、

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

の元を足したり引いたりすることで F の任意の2元は F の元を経由して移り合える．このような M をマルコフ基底という．マルコフ基底とトーリックイデアルの関係をみるために、以下の例をみてみよう．

例 5.1 例 1.1 と同じ配置

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は、以下の式によって、 2×3 分割表の周辺和を特徴づけている。

$$A \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} + t_{12} + t_{13} \\ t_{21} + t_{22} + t_{23} \\ t_{11} + t_{21} \\ t_{12} + t_{22} \\ t_{13} + t_{23} \end{pmatrix}$$

さらに、トーリックイデアル I_A の生成系と、 2×3 分割表のマルコフ基底の間の 1 対 1 対応が

$$I_A = \langle x_1x_5 - x_2x_4, \quad x_1x_6 - x_3x_4, \quad x_2x_6 - x_3x_5 \rangle$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

によって垣間見える。

定理 5.2 (Diaconis–Sturmfels) 行和、列和がゼロであるような有限個の行列がマルコフ基底となるための必要十分条件は、対応する 2 項式の集合が、 I_A の生成系をなすことである。

ここまで、 2 元表の場合だけを観察してきたが、 2 元表の通常モデルに対応する $K[A]$ は多項式環の Segre 積であり、 I_A が 2 次の 2 項式で生成されることはよく知られた事実である。他方、 3 元以上の表に対しては ([3] など) 研究されているいくつかのクラスを除いて) I_A の生成系は未解明であり、一定以上のサイズの分割表に対しては、4ti2 などの優秀なソフトウェアでも計算困難である。

5.1 無 ℓ 因子交互作用モデルに付随する配置

サイズが $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_\ell$ の ℓ 元分割表 ($r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_\ell \geq 2$)

$$T = (t_{i_1 i_2 \cdots i_\ell})_{i_k=1,2,\dots,r_k}, \quad 0 \leq t_{i_1 i_2 \cdots i_\ell} \in \mathbb{Z}$$

に対して，無 ℓ 因子交互作用モデルというモデルを考えると，以下のようなベクトル全体からなる配置 $A_{r_1 r_2 \dots r_\ell}$ が対応する：

$$e_{i_2 i_3 \dots i_\ell}^{(1)} \oplus e_{i_1 i_3 \dots i_\ell}^{(2)} \oplus \dots \oplus e_{i_1 i_2 \dots i_{\ell-1}}^{(\ell)}$$

ただし，各 i_k は $\{1, 2, \dots, r_k\}$ に属し， $e_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_\ell}^{(k)}$ は $\mathbb{R}^{r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_\ell}$ の単位座標ベクトルである．これは Segre 積のように見えるが，一般に Segre 積とは異なる．例えば， $2 \times 2 \times 2$ の 3 元分割表の場合，対応する配置 A_{222} は

$$\begin{array}{cccc} & & & \times & \times & \times & \times \\ & & & & & & \times & \times \\ & & \times & \times & & & & \\ & & & & & & \times & \times \\ & & \times & & \times & & & \\ \times & & & & & & & \\ \times & & & & & & & \\ \times \times & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \times & & & & & & & \\ \times & & & & & & & \\ \times \times & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \times & & & & & & & \\ \times & & & & & & & \\ \times \times & & & & & & & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & & 1 \\ \hline 1 & & 1 & & & & & \\ & 1 & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．このような配置が条件 (i) ~ (vi) をみたすかどうかについて，Sullivant [23]，Ohsugi-Hibi [18]，ソフトウエア Normaliz および 4ti2 の合同チーム [4] などによる研究成果によって，以下のような分類が完成した．

$r_1 \times r_2$ $r_1 \times r_2 \times 2 \times \dots \times 2$	unimodular
$r_1 \times 3 \times 3$	compressed, not unimodular
$5 \times 5 \times 3$ $5 \times 4 \times 3$ $4 \times 4 \times 3$	normal (4ti2 & Normaliz) not compressed
otherwise, i.e., $\ell \geq 4$ and $r_3 \geq 3$ $\ell = 3$ and $r_3 \geq 4$ $\ell = 3, r_3 = 3, r_1 \geq 6$ and $r_2 \geq 4$	not normal

5.2 ネストされた配置

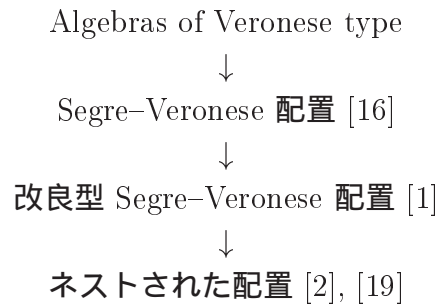
配置 A が, 非負整数ベクトルからなり, (簡単のため) 各ベクトルの成分の和はすべて r であるとする. 各 $i = 1, 2, \dots, d$ に対して, μ_i 変数多項式環 $K[u_1^{(i)}, \dots, u_{\mu_i}^{(i)}]$ を準備し, 配置 B_i に付随する semigroup ring

$$K[B_i] = K[m_1^{(i)}, \dots, m_{\lambda_i}^{(i)}] \subset K[u_1^{(i)}, \dots, u_{\mu_i}^{(i)}]$$

を考える. このとき,

$$K[A(B_1, \dots, B_d)] := K \left[m_{j_1}^{(i_1)} \cdots m_{j_r}^{(i_r)} \mid \begin{array}{l} t_{i_1} \cdots t_{i_r} \in \{T^{\mathbf{a}_1}, \dots, T^{\mathbf{a}_n}\} \\ 1 \leq j_k \leq \lambda_{i_k} \text{ for } 1 \leq k \leq r \end{array} \right]$$

で定義される配置 $A(B_1, \dots, B_d)$ を A, B_1, \dots, B_d に付随するネストされた配置という. この概念は, 統計学からの要請 (グループごとに制約がある選択問題の条件付検定) により



と拡張されたものである. ネストされた配置については, [2], [19] において, 以下の事実が証明されている.

- $I_A, I_{B_1}, \dots, I_{B_d}$ のグレブナー基底から, $I_{A(B_1, \dots, B_d)}$ のグレブナー基底を構成できる.
- $K[A], K[B_1], \dots, K[B_d]$ が正規ならば, $K[A(B_1, \dots, B_d)]$ は正規だが, 逆は必ずしも成り立たない.

トーリックイデアル理論の分割表への応用については, JST CREST のプロジェクト “現代の産業社会とグレブナー基底の調和” (代表 日比孝之, 2008 年 10 月 ~ 2014 年 3 月) において, 中心課題の 1 つとして取り組んでいる.

参考文献

- [1] S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura, Markov basis and Gröbner basis of Segre–Veronese configuration for testing independence in group-wise selections, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **62** (2010), 299 – 321.
- [2] S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura, Gröbner bases of nested configurations, *J. Algebra*, **320** (2008) no. 6, 2583 – 2593.
- [3] S. Aoki and A. Takemura, The list of indispensable moves of the unique minimal Markov basis for $3 \times 4 \times K$ and $4 \times 4 \times 4$ contingency tables with fixed two-dimensional marginals, METR Technical Report, 03-38 (November 2003).
- [4] W. Bruns, R. Hemmecke, B. Ichim, M. Köppe, and C. Söger, Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics, *Exp. Math.*, in press.
- [5] P. Conti and C. Traverso, Buchberger algorithm and integer programming, *in* Proceedings of AAEECC-9 (New Orleans) Springer LNCS **539** (1991), 130 – 139.
- [6] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, “Ideals, Varieties and Algorithms,” Second Edition, Springer–Verlag, New York, 1996. (和訳: 北村知徳, 大杉英史, 日比孝之訳, 『グレブナー基底 1・2』, シュプリンガー・フェアラーク東京.)
- [7] P. Diaconis and B. Sturmfels, Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions, *Annals of Statistics*, **26** (1998), 363 – 397. (Received June 1993; revised April 1997.)
- [8] I. M. Gelfand, M. I. Graev and A. Postnikov, Combinatorics of hypergeometric functions associated with positive roots, *in* “Arnold–Gelfand Mathematics Seminars, Geometry and Singularity Theory” (V. I. Arnold, I. M. Gelfand, M. Smirnov and V. S. Retakh, Eds.), Birkhäuser, Boston, 1997, pp. 205 – 221.
- [9] I. M. Gel’fand, A. V. Zelevinskii and M. M. Kapranov, Hypergeometric functions and toral manifolds, *Functional Analysis and Its Applications*, **23** (1989), 94 – 106.

- [10] J. Herzog, Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings, *Manuscripta Math.*, **3** (1970), 175 – 193.
- [11] 日比孝之著, グレブナー基底, すうがくの風景 8, 朝倉書店, 2003 年.
- [12] 日比孝之編, グレブナー基底の現在 (いま), 数学書房, 2006 年.
- [13] H. Ohsugi and T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, *J. Algebra* **207** (1998), 409 – 426.
- [14] H. Ohsugi and T. Hibi, A normal (0,1)-polytope none of whose regular triangulations is unimodular, *Discrete and Computational Geometry* **21** (1999), 201 – 204.
- [15] H. Ohsugi and T.Hibi, Toric ideals generated by quadratic binomials, *J. Algebra* **218** (1999), 509 – 527.
- [16] H. Ohsugi and T. Hibi, Compressed polytopes, initial ideals and complete multipartite graphs, *Illinois J. Math.* **44** (2000), 391 – 406.
- [17] H. Ohsugi and T.Hibi, Quadratic initial ideals of root systems, *Proceedings of the AMS* **130** (2002), 1913 – 1922.
- [18] H. Ohsugi and T.Hibi, Toric ideals arising from contingency tables, in “Commutative Algebra and Combinatorics” (W. Bruns Ed.), Ramanujan Mathematical Society Lecture Notes Series, Number 4, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2007, pp. 91 – 115.
- [19] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric rings and ideals of nested configurations, *J. commutative algebra*, **2** (2010), 187 – 208.
- [20] A. Simis, W. V. Vasconcelos and R. H. Villarreal, The integral closure of subrings associated to graphs, *J. Algebra* **199** (1998), 281 – 289.
- [21] B. Sturmfels, Gröbner bases of toric varieties, *Tôhoku Math. J.* **43** (1991), 249 – 261.
- [22] B. Sturmfels, Gröbner bases and convex polytopes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [23] S. Sullivant, Compressed polytopes and statistical disclosure limitation, *Tohoku Mathematical Journal* (2) Volume 58, Number 3, 433 – 445.