

3 次超曲面の幾何とホッジ構造

池田 京司 (東京電機大学工学部)

1 Introduction

$X \subset \mathbf{P}^n$ を複素数体 \mathbf{C} 上の 3 次超曲面とするとき, X の幾何的な性質はそのコホモロジー群 $H^{n-1}(X, \mathbf{Z})$ 上に定まる偏極ホッジ構造に反映されることが期待される. 実際に $n = 4$ のとき, Clemens-Griffiths [6] と Tjurin [10] は偏極ホッジ構造の同型類によって非特異 3 次 3-fold の同型類が決定されるというトレリ型の定理を示した. $n = 5$ の時は Voisin [11], [12] により, 非特異 3 次 4-fold に対するトレリ型の定理が証明されている. また $n \geq 6$ の場合には, general 3 次超曲面に対するトレリ型の定理が, $3 \mid n - 1$ のとき Carlson-Griffiths [5] により, $3 \mid n$ のとき Donagi [7] により証明されている. 一方 $n = 3$ の場合, 非特異 3 次曲面 X に対し $H^2(X, \mathbf{Z})$ 上に定まる偏極ホッジ構造は, X によらず一定である. しかし 3 次曲面のモジュライ空間は 4 次元あり, X の幾何的性質がすべて偏極ホッジ構造 $H^2(X, \mathbf{Z})$ に反映されるわけではない. このとき Allcock-Carlson-Toledo [1] は 3 次曲面の同型類をホッジ構造を用いて捉えるためのアイデアとして, 3 次曲面 X を分岐因子とする \mathbf{P}^3 の 3 次ガロア被覆 V のコホモロジー群 $H^3(V, \mathbf{Z})$ 上に定まる偏極ホッジ構造を利用し, $H^3(V, \mathbf{Z})$ とその上へのガロア群の作用が元の非特異 3 次曲面 X の同型類を決定することを証明した. 本稿では 3 次超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n$ に対し, X と重複度 3 以上の交点を持つ直線全体のなす多様体 Z をグラスマン多様体の部分多様体として考える. 第 2 章において, 3 次超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n$ の Eckardt 点などの幾何的情報が, この 3 重接線の多様体 Z のコホモロジー群 $H^{2n-4}(Z, \mathbf{Z})$ 上に定まる偏極ホッジ構造にどのように反映されるかを考察する. また Allcock-Carlson-Toledo によるガロア群の作用つきのホッジ構造 $H^n(V, \mathbf{Q})$ と偏極ホッジ構造 $H^{2n-4}(Z, \mathbf{Q})$ の直接的な関係を示す. 第 3 章では, 特異点として通常 2 重点のみをもつ 3 次曲面に対し, ホッジ構造 $H^2(Z, \mathbf{Z})$ を対応させることによって定まる周期写像について調べていく.

2 3 次超曲面の Eckardt 点とホッジ構造

2.1 3 次超曲面の Eckardt 点

$X \subset \mathbf{P}^n$ を \mathbf{C} 上の 3 次斉次多項式 $F = F(x_0, \dots, x_n)$ で定義された超曲面とする. p が X の非特異点であるとき, $p \in X$ における X の射影接空間を

$$T_p(X) := \left\{ x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbf{P}^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) x_i = 0 \right\}$$

と定める. $T_p(X) \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ 内の 3 次超曲面 $X \cap T_p(X)$ が p で 3 重点をもつとき, p は X の Eckardt 点であるという.

- $n = 2$ のとき, X の Eckardt 点は X の変曲点に対応する. X が非特異 3 次曲線ならば X 上にはちょうど 9 個の Eckardt 点が存在する.
- $n = 3$ のとき, X の Eckardt 点は X 内の 3 本の直線が通る非特異点に対応する. X が非特異 3 次曲面ならば X 上の Eckardt 点の数は曲面に依存し最大 18 個存在する. 一般の 3 次曲面には Eckardt 点は存在しない.

定理 2.1 (Canonero-Catalisano-Serpico [4]). $X \subset \mathbf{P}^n$ が非特異 3 次超曲面のとき, X 上の Eckardt 点の数は高々 $\frac{3n(n+1)}{2}$ 個である. $n \geq 3$ ならば X が Fermat 3 次超曲面と同型になるときに限り X 上の Eckardt 点の数はちょうど $\frac{3n(n+1)}{2}$ 個になる.

2.2 3 重接線の多様体

$\Lambda(\mathbf{P}^n)$ を \mathbf{P}^n 内の直線全体のなすグラスマン多様体とする. 3 次超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n$ に対し, $\mathbf{P}^n \times \Lambda(\mathbf{P}^n)$ の閉部分多様体を

$$Y := \{(p, L) \in \mathbf{P}^n \times \Lambda(\mathbf{P}^n) \mid X \text{ と } L \text{ が } p \text{ で重複度 } 3 \text{ 以上で交わる}\}$$

と定める.

命題 2.2 ([8]). 3 次超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n$ が非特異であるための必要十分条件は Y が非特異な $2n - 4$ 次元の代数多様体になることである.

注意 2.3. $n \geq 3$ のとき, 第一射影 $\phi : Y \rightarrow X$; $(p, L) \mapsto p$ の一般ファイバーは \mathbf{P}^{n-2} 内の 2 次超曲面であり, Eckardt 点 p におけるファイバーは \mathbf{P}^{n-2} である.

命題 2.4. $X \subset \mathbf{P}^n$ が非特異 3 次超曲面であるとき, $\phi^{-1}(p)$ が \mathbf{P}^{n-2} 内の非特異 2 次超曲面であるための必要十分条件は $\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \neq 0$ である.

$\Lambda(\mathbf{P}^n)$ の閉部分多様体を

$$Z := \{L \in \Lambda(\mathbf{P}^n) \mid L \text{ は } X \text{ と重複度 } 3 \text{ 以上の交点をもつ}\}$$

により定める.

注意 2.5. 第二射影 $\pi: Y \rightarrow Z \subset \Lambda(\mathbf{P}^n)$; $(p, L) \mapsto L$ は双有理射である. また $X \subset \mathbf{P}^n$ が非特異 3 次超曲面であるとき, $K_Y \simeq \phi^* \mathcal{O}_X(1) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Z(3-n)$ である. ここで $\mathcal{O}_Z(1)$ は $Z \subset \Lambda(\mathbf{P}^n)$ の Plücker 埋め込みによる超平面切断を表す.

注意 2.6. \mathbf{P}^{n+1} 内の 3 次超曲面を

$$V := \{[x_0 : \cdots : x_n : x_{n+1}] \in \mathbf{P}^{n+1} \mid F(x_0, \dots, x_n) + x_{n+1}^3 = 0\}$$

で定める. このとき射影 $[x_0 : \cdots : x_n : x_{n+1}] \mapsto [x_0 : \cdots : x_n]$ は X で分岐する $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ -被覆 $\rho: V \rightarrow \mathbf{P}^n$ を定める. V 内の直線の Fano 多様体を

$$S = \{L \in \Lambda(\mathbf{P}^{n+1}) \mid L \subset V\}$$

と定めるとき, $S \rightarrow Z$; $L \mapsto \rho(L)$ は S 上への $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ -作用による商を与える. X が非特異のとき, S は $2n-4$ 次元非特異代数多様体であり, Z の特異点の集合は X 内の直線の Fano 多様体

$$Z_\infty = \{L \in \Lambda(\mathbf{P}^n) \mid L \subset X\}$$

となる.

2.3 Eckardt 点と代数的サイクル

Eckardt 点 p に対し, $\phi^{-1}(p) \simeq \mathbf{P}^{n-2}$ は Y の余次元 $n-2$ の代数的サイクルを定める. また X 内の直線 L に対し $\phi^{-1}(L)$ も Y の余次元 $n-2$ の代数的サイクルを定める. これらの代数的サイクルを Z に射影し, 交点数を計算する. X 上の Eckardt 点 p に対し,

$$E_p := \pi(\phi^{-1}(p)) = \{L \in Z \mid p \in L\},$$

X 内の直線 L に対し,

$$I_L := \pi(\phi^{-1}(L)) = \{L' \in Z \mid L \cap L' \neq \emptyset\}$$

とおくと, これらは $H^{2n-4}(Z, \mathbb{Q})$ にクラスを定める. Z 上のサイクルの交点形式

$$(\cdot)_Z : H^{2n-4}(Z, \mathbb{Q}) \times H^{2n-4}(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

により交点数は次のように計算される.

命題 2.7. $X \subset \mathbb{P}^n$ が非特異 3 次超曲面であるとき, X の Eckardt 点 p, p_1, p_2 と X 内の直線 L に対して

$$\bullet (E_{p_1} \cdot E_{p_2})_Z = \begin{cases} 0 & (p_1 \neq p_2 \text{ かつ } \overline{p_1 p_2} \not\subseteq X \text{ のとき}), \\ \frac{1}{3} & (p_1 \neq p_2 \text{ かつ } \overline{p_1 p_2} \subseteq X \text{ のとき}), \\ \frac{1-(-2)^{n-1}}{3} & (p_1 = p_2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで $\overline{p_1 p_2}$ は p_1 と p_2 を通る \mathbb{P}^n 内の直線を表す.

$$\bullet (I_L \cdot E_p)_Z = \frac{1}{3}.$$

$$\bullet (I_L \cdot I_L)_Z = \frac{5}{3}.$$

注意 2.8. I_L の数値的同値類は直線 $L \subset X$ によらない.

2.4 ホッジ構造 $H^{2n-4}(Z, \mathbb{Q})$

3 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ に対し, Allcock-Carlson-Toledo ([1], [2]) は X で分岐する \mathbb{P}^n の 3 次ガロア被覆 $\rho: V \rightarrow \mathbb{P}^n$ を考え, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -作用つき Hodge 構造 $H^n(V, \mathbb{Z})$ を用いて 3 次超曲面に対する周期写像を研究した. 一方, 我々は 3 重接線の多様体 Z を考え, $H^{2n-4}(Z, \mathbb{Q})$ 上に定まるホッジ構造を用いて X の Eckardt 点を捉えた. ここで両者のホッジ構造の関係は次のようになる.

定理 2.9 ([9]). $X \subset \mathbb{P}^3$ が非特異 3 次曲面ならばホッジ構造の同型

$$\bullet H^2(Z, \mathbb{Q}) \simeq (\wedge^2 H^3(V, \mathbb{Q})(1))^{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}},$$

$$\bullet H_{\text{prim}}^2(Z, \mathbb{Q}) \simeq (\wedge^2 H^3(V, \mathbb{Q})(1))_0^{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$$

が存在する. ここで $(\wedge^2 H^3(V, \mathbb{Q}))_0$ は V 上の交点形式 $\wedge^2 H^3(V, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$ の核を表す.

注意 2.10 (Clemens-Griffiths [6], Tjurin [10]). ホッジ構造 $H^3(V, \mathbf{Z})(1)$ はある 5 次元アーベル多様体の 1 次コホモロジーに定まるホッジ構造と同型になる.

定理 2.11. $X \subset \mathbf{P}^4$ が非特異 3 次 3-fold ならばホッジ構造の同型

- $H^4(Z, \mathbf{Q}) \simeq (\text{Sym}^2 H^4(V, \mathbf{Q})(1))^{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$,
- $H_{\text{prim}}^4(Z, \mathbf{Q}) \simeq (\text{Sym}^2 H^4(V, \mathbf{Q})(1))_0^{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$,
- $H^4(Z, \mathbf{Q}) \cap [Z_\infty]^\perp \simeq (\text{Sym}^2 H_{\text{prim}}^4(V, \mathbf{Q})(1))^{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$,
- $H_{\text{prim}}^4(Z, \mathbf{Q}) \cap [Z_\infty]^\perp \simeq (\text{Sym}^2 H_{\text{prim}}^4(V, \mathbf{Q})(1))_0^{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$

が存在する. ここで $(\text{Sym}^2 H^4(V, \mathbf{Q}))_0$ は V 上の交点形式 $\text{Sym}^2 H^4(V, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$ の核を表す.

注意 2.12 (Beauville-Donagi [3]). ホッジ構造 $H^4(V, \mathbf{Z})(1)$ はある 4 次元シンプ
レクティック多様体の 2 次コホモロジーに定まる Hodge 構造と同型になる.

3 通常 2 重点をもつ 3 次曲面に対する周期写像

3.1 Hessian で分岐する 2 重被覆

$X \subset \mathbf{P}^3$ を 3 次斉次多項式 $F(x_0, \dots, x_3)$ で定義された \mathbf{C} 上の代数曲面で特異点として高々通常 2 重点しかもたないものとする. このとき F の Hessian の零点

$$B := \left\{ p \in X \mid \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (p) \right)_{0 \leq i, j \leq 3} = 0 \right\}$$

は X の 2 つの特異点を結ぶ直線を既約成分として重複度 2 で含む. B からこれらの既約成分を除いた成分を B_0 とする. $\nu: X' \rightarrow X$ を極小特異点解消とすると $\nu^* B_0$ の被約部分 B' は特異点として高々 node しかもたない代数曲線となる. $Y' \rightarrow X'$ を B' で分岐する有限 2 重被覆とし, $Y \rightarrow Y'$ を極小特異点解消とする. これらの合成射を $\phi': Y \rightarrow X'$ と表し, $\phi = \nu \circ \phi': Y \rightarrow X$ とする. m を X 上の通常 2 重点の個数とすると $0 \leq m \leq 4$ であり, m によって Y は以下の不変量をもつ代数曲面となる.

m	$\kappa(Y)$	K_Y^2	$h^2(\mathcal{O}_Y)$	$h^1(\mathcal{O}_Y)$	$h^1(\Omega_Y^1)$
0	2	6	4	0	44
1	2	2	3	0	38
2	1	0	2	0	30
3	0	0	1	0	20
4	$-\infty$	2	0	0	8

注意 3.1. 命題 2.4 より, $m \leq 3$ のとき, Hessian で分岐する 2 重被覆 Y は第 2 章の多様体 Y の非特異極小モデルである.

3.2 Y 上の有理曲線

特異点として高々通常 2 重点のみをもつ 3 次曲面 $X \subset \mathbf{P}^3$ に含まれる \mathbf{P}^3 内の直線 L の X' における固有変換を L' とするとき,

$$(\phi')^*L' = \begin{cases} L^+ + L^- & (L \text{ が } X \text{ の特異点を通らないとき}) \\ L^+ + L^- + L^0 & (L \text{ が } X \text{ の特異点を 1 つ通るとき}) \\ L^+ & (L \text{ が } X \text{ の特異点を 2 つ通るとき}) \end{cases}$$

と表される. ただし, L^+ は $\phi'(L^+) = L'$ を満たす Y 上の既約曲線で X 内のすべての直線について互いに交わらないものとし, L^0 は ϕ' により 1 点につぶれる Y 上の既約曲線とする. また X の通常 2 重点に対応する X' 上の (-2) -有理曲線 Q は B' の既約成分となり, Y 上の有理曲線 Q^+ により $(\phi')^*Q = 2Q^+$ となる. このとき, $H^2(Y, \mathbf{Z})$ の中で X 内のすべての直線から定まる L^+ , L^- , L^0 と, X のすべての通常 2 重点に対応する Q^+ に直交する部分を $H_{\text{var}}^2(Y, \mathbf{Z})$ と表す.

3.3 ホッジ構造 $H_{\text{var}}^2(Y, \mathbf{Z})$

X 上の通常 2 重点の個数 m が 1 以上のとき, 1 つの通常 2 重点 q に対応する X' 上の有理曲線 Q と q を通る直線 L に対応する X' 上の有理曲線 L' たちとの交点を D とする. $\rho: C \rightarrow Q$ を D で分岐する Q の 3 次ガロア被覆とする.

注意 3.2. • $m = 1$ のとき, $D = \{a_1, \dots, a_6\} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1 \simeq Q$ とすると, C は

$$y^3 = \prod_{i=1}^6 (x - a_i)$$

で定義される種数 4 の代数曲線である.

- $m = 2$ のとき, $D = \{\infty, a_1, \dots, a_4\} \subset \mathbf{P}^1 \simeq Q$ とすると, C は

$$y^3 = \prod_{i=1}^4 (x - a_i)$$

で定義される種数 3 の代数曲線である. ただし, $\infty \in D$ は通常 2 重点を 2 つ通る直線に対応する L' と Q の交点とする.

- $m = 3$ のとき, $D = \{0, \infty, a_1, a_2\} \subset \mathbf{P}^1 \simeq Q$ とすると, C は

$$xy^3 = \prod_{i=1}^2 (x - a_i)$$

で定義される種数 2 の代数曲線である. ただし, $\{0, \infty\} \subset D$ は通常 2 重点を 2 つ通る直線に対応する L' たちと Q の交点とする.

命題 3.3. $m \geq 1$ のとき, 偏極ホッジ構造の同型

$$H_{\text{var}}^2(Y, \mathbf{Q}) \simeq \left(\bigwedge^2 H^1(C, \mathbf{Q}) \right)_0^{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$$

が存在する. ここで $(\bigwedge^2 H^1(C, \mathbf{Q}))_0$ は C 上の交点形式 $\bigwedge^2 H^1(C, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$ の核を表す. このとき, ホッジ数は $(h^{2,0}, h^{1,1}, h^{0,2}) = (4-m, (4-m)^2, 4-m)$ である.

3.4 3 つの通常 2 重点をもつ 3 次曲面

$X \subset \mathbf{P}^3$ がちょうど 3 つの通常 2 重点をもつとき, 射影変換により $X \subset \mathbf{P}^3$ は

$$X_\mu := \{[x_0 : \dots : x_3] \in \mathbf{P}^3 \mid \mu x_0(x_0^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) + x_0^2(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2x_3 = 0\}$$

$(\mu^2 \neq 1)$ と同型になる. X_μ の通常 2 重点は $p_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 0 : 1]$ にある.

注意 3.4. $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}$ に対し, $X_{\mu_1} \simeq X_{\mu_2}$ となるための必要十分条件は $\mu_1^2 = \mu_2^2$ である.

命題 3.5. $H_{\text{var}}^2(Y_\mu, \mathbf{Z})$ の基底 u_1, u_2, u_3 を適当に定めると, 交点形式は

$$(\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と表される.

3.5 周期写像と Eisenstein 級数

$H_{\mathbf{Z}} = H_{\text{var}}^2(Y_0, \mathbf{Z})$ とする. 周期領域を

$$D := \{W \in \text{Grass}(1, \mathbf{C} \otimes H_{\mathbf{Z}}) \mid W \subset W^\perp, \langle \cdot, \cdot \rangle|_W > 0\}$$

により定める. このとき 0 と μ を結ぶ $\mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$ 内の道 g に対し, 格子の同型

$$g^* : H_{\text{var}}^2(Y_\mu, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{var}}^2(Y_0, \mathbf{Z}) = H_{\mathbf{Z}}$$

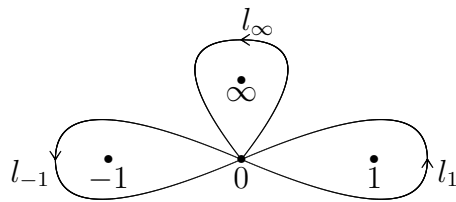
が定まる. $(\mathbf{C} \setminus \{\pm 1\})^\sim$ を $\mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$ の普遍被覆とすると, 周期写像

$$\Phi^\sim : (\mathbf{C} \setminus \{\pm 1\})^\sim \longrightarrow D^+; g \longmapsto g_{\mathbf{C}}^*(H^{2,0}(Y_\mu))$$

が定まる. ただし D^+ は同型

$$D \simeq \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}; W = \mathbf{C}(z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3) \leftrightarrow \tau = -\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_3}{3z_1}$$

により, 上半平面 \mathbf{H} に対応する D の連結成分を表す. $c \in \{\pm 1, \infty\}$ に対し, 0 を基点とし c の周りを反時計回りに 1 周する $\mathbf{P}^1 \setminus \{\pm 1, \infty\}$ 内のループ l_c を下図のようにとる.



命題 3.6. $c \in \{\pm 1, \infty\}$ に対し, $l_c^* : H_{\mathbf{Z}} \rightarrow H_{\mathbf{Z}}$ は命題 3.5 の基底により

$$l_1^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, l_{-1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, l_{\infty}^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

と表示される.

注意 3.7. $l_1^* \circ l_\infty^* \circ l_{-1}^* = \text{id}$ かつ $(l_\infty^*)^3 = \text{id}$ である.

$l_1^*, l_{-1}^*, l_\infty^*$ で生成される $\text{Aut}(H_{\mathbf{Z}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の部分群を Γ とする. このとき $\Phi \sim$ に
より周期写像

$$\Phi : \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \Gamma \backslash D^+$$

が誘導される.

$\lambda = \frac{\mu-1}{\mu+1}$ とし, 種数 2 の代数曲線 C_λ を

$$xy^3 = (x-1)(x-\lambda)$$

により定めるとき, 命題 3.3 より,

$$H_{\text{var}}^2(Y_\mu, \mathbf{Q}) \simeq \left(\bigwedge^2 H^1(C_\lambda, \mathbf{Q}) \right)_0^{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$$

であり,

$$\tau := \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-\lambda)^2}}}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-\lambda)^2}}}$$

とすると, 周期写像は

$$\Phi : \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \Gamma \backslash D; \mu \longmapsto \mathbf{C} \left(\frac{1}{3}u_1 - \tau^2 u_2 + \tau u_3 \right) \subset \mathbf{C} \otimes H_{\mathbf{Z}}$$

となる.

注意 3.8. 周期 τ の定義における積分路は, 0 から 1 への \mathbf{C} 内の道と 0 から λ への \mathbf{C} 内の道を始点 0 以外で交わらないようにとり, 3 乗根は 0 から 1 への道の上の分枝から 0 の周りに反時計回りに解析接続して 0 から λ への道の上での分枝を定める.

注意 3.9. $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$ の部分群を

$$\Gamma_1(3) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbf{Z}) \mid a \equiv 1, c \equiv 0 \pmod{3} \right\}$$

と定める. $l_1^*, l_{-1}^*, l_\infty^*$ の作用はそれぞれ

$$l_1^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, l_{-1}^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, l_\infty^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

により $\Gamma_1(3)$ の \mathbf{H} への作用と対応し,

$$\Gamma \backslash D^+ \simeq \Gamma_1(3) \backslash \mathbf{H}$$

となる.

自然数 k に対し $c_k := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(3n+1)^k}$ とおく. Eisenstein 級数を

$$F_k(\tau) := \frac{1}{c_k} \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2} \frac{1}{(3m\tau+3n+1)^k}$$

$$G_k(\tau) := \frac{1}{c_k} \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2} \frac{1}{((3m+1)\tau+n)^k}$$

と定義する. このとき $F_k(\tau), G_k(\tau)$ は \mathbf{H} 上の正則関数で

$$F_k(\tau+1) = F_k(\tau),$$

$$G_k(\tau+1) = G_k(\tau),$$

$$F_k\left(-\frac{1}{3\tau}\right) = (-\sqrt{3}i)^k G_k(\tau),$$

$$G_k\left(-\frac{1}{3\tau}\right) = (-\sqrt{3}i)^k F_k(\tau)$$

という保型性を満たす. とくに

$$F_k\left(\frac{\tau}{3\tau+1}\right) = (3\tau+1)^k F_k(\tau),$$

$$G_k\left(\frac{\tau}{3\tau+1}\right) = (3\tau+1)^k G_k(\tau)$$

が成り立つ.

定理 3.10.

$$\Gamma \backslash D^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1 \setminus \{\pm 1\}; \left[\mathbf{C} \left(\frac{1}{3}u_1 - \tau^2 u_2 + \tau u_3 \right) \right] \mapsto \mu(\tau) := \frac{G_3(\tau) + F_3(\tau)}{G_3(\tau) - F_3(\tau)}$$

は周期写像 Φ の逆写像を与える.

注意 3.11. 周期写像 $\Phi : \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \Gamma \backslash D^+$ は全射ではなく, $\mu\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) = \infty$ となる. $\mu \neq 0$ のとき

$$X_\mu \longrightarrow \mathbf{P}^3; [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \longmapsto [\mu x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$$

により, X_μ は

$$\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^3 \mid x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_0 + x_3 x_0 x_1 + x_0 x_1 x_2 + \mu^{-2} x_0^2 (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) = 0\}$$

と同型になるので $\mu = \infty$ は 4 つの通常 2 重点をもつ 3 次曲面に対応する.

X_μ の同型類を類別するための不変量を

$$j := \frac{2^2 \cdot 3^3}{1 - \mu^2} \in \mathcal{M} := \mathbf{C}$$

と定義する. \mathcal{M} は通常 2 重点を 3 個以上もつ 3 次曲面の粗モジュライ空間である.

$$\sqrt{l_\infty^*} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおき, Γ と $\sqrt{l_\infty^*}$ で生成される $\text{Aut}(H_{\mathbf{Z}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の部分群を $\tilde{\Gamma}$ とする. このとき周期写像 Φ は

$$\mathcal{M} = \mathbf{C} \longrightarrow \tilde{\Gamma} \backslash D^+$$

を誘導し, この逆写像は保型関数

$$j(\tau) := \frac{(G_3(\tau) - F_3(\tau))^2}{\Delta(\tau)}$$

で与えられる. ここで

$$\Delta(\tau) := \frac{1}{(-3)^3} F_3(\tau) G_3(\tau)$$

とする.

注意 3.12. $q = \exp(2\pi i\tau)$ とするとき $\Delta(\tau)$ は

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^6 (1 - q^{3n})^6$$

という q -展開をもつ. また

$$j(\tau) = q^{-1} + 42 + 783q + 8672q^2 + \dots$$

となる.

注意 3.13. $s^3 = \mu^{-2} - 1 \neq 0$ のとき,

$$X_\mu \longrightarrow \mathbf{P}^3; [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \longmapsto [sx_0 : x_1 + x_0 : x_2 + x_0 : x_3 + x_0]$$

により, X_μ は

$$\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^3 \mid x_1 x_2 x_3 - 2x_0^3 + s x_0^2 (x_1 + x_2 + x_3) = 0\}$$

と同型になるので $\mu^2 = 1$ つまり $j = \infty$ は 3 つの A_2 型の有理 2 重点をもつ 3 次曲面に対応する.

参考文献

- [1] D. Allcock, J. Carlson and D. Toledo, *The complex hyperbolic geometry of the moduli space of cubic surfaces*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 659–724.
- [2] D. Allcock, J. Carlson and D. Toledo, *The Moduli Space of Cubic Threefolds as a Ball Quotient*, Mem. Amer. Math. Soc. **209** (2011).
- [3] A. Beauville and R. Donagi, *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4*, C. R. Acad. Sc.Paris 301 (1985), 703–706.
- [4] G. Canonero, M. V. Catalisano and M. E. Serpico, *Inflection points of cubic hypersurfaces*, Bollettino U. M. I. (7) **11-B** (1997), 161–185.
- [5] J. Carlson and P. Griffiths, *Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem*, Géométrie algébrique, Angers, 1980, Sijthoff-Noordhoff, 51–76.
- [6] H. Clemens and P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.
- [7] R. Donagi, *Generic Torelli theorem for projective hypersurfaces*, Compositio Math. **50** (1983), 325–353.
- [8] A. Ikeda, *The varieties of tangent lines to hypersurfaces in projective spaces*, arXiv:1012.2186.
- [9] A. Ikeda, *The double cover of cubic surfaces branched along their Hessian*, arXiv:1012.4242.
- [10] A. Tjurin, *The geometry of the Fano surface of a nonsingular cubic $F \subset P^4$ and Torelli theorems for Fano surface and cubics*, Math. USSR Izv. **5** (1971), 517–546.
- [11] C. Voisin, *Théorème de Torelli pour les cubiques de P^5* , Invent. Math. **86** (1986), 577–601.
- [12] C. Voisin, *Erratum: Théorème de Torelli pour les cubiques de P^5* , Invent. Math. **172** (2008), 455–458.