

# 対合付き K 3 曲面のモジュライの有理性

馬 昭平\* (東大数理)

反 symplectic 対合付き K3 曲面は 75 個の IV 型モジュラー多様体によって分類されることが知られている。シンポジウムでは、75 個のモジュライ空間のうち 67 個が有理的であるという結果について報告した。

## 1 K3 曲面の反 symplectic 対合

$X$  を複素 K3 曲面、すなわち単連結で標準束  $K_X$  が自明な複素曲面とし、 $\iota$  を  $X$  の対合 (位数 2 の自己同型) とする。 $\iota$  が  $X$  の周期  $H^0(K_X)$  に  $-1$  倍で作用するとき、 $\iota$  は反 symplectic 対合と呼ばれる。このときペア  $(X, \iota)$  を 2-elementary K3 曲面と呼ぶ。Enriques 曲面の普遍被覆や、 $\mathbb{P}^2$  の非特異 6 次曲線で分岐する 2 重被覆がよく知られた例である。一般に、2-elementary K3 曲面というのは非特異な 2 重被覆として構成された K3 曲面である。 $(X, \iota)$  の基本的な性質として、(1)  $\iota$  の固定点集合  $X^\iota$  は空もしくは非特異曲線の離散和で、(2)  $\iota$  不変サイクルのなす整係数 2 次形式  $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$  は符号が  $(1, \text{rk} - 1)$  である。逆にこれらの性質はそれぞれ反 symplectic 性を特徴付ける。ちなみに、反 symplectic 対合を持つような K3 曲面は必ず代数的であることを注意しておく。

$(X, \iota)$  を 2-elementary K3 曲面とし、その不変量  $(r, a, \delta)$  を次のように定義する。整係数 2 次形式  $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$  を  $L_+$  と記し、 $r$  を  $L_+$  のランクとする。 $L_+$  の判別式群  $D_{L_+} = \text{Hom}(L_+, \mathbb{Z})/L_+$  は今の場合 2-elementary アーベル群  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^a$  になるので、 $a$  をその長さ ( $\mathbb{F}_2$  上の次元) とする。そして  $\text{Hom}(L_+, \mathbb{Z})$  の元のノルムが整数値しかとらない時に  $\delta = 0$  と定め、そうでない時  $\delta = 1$  と定める。

**定理 1.1** (Nikulin [4]). 2-elementary K3 曲面  $(X, \iota)$  の変形型は  $L_+$  の 2 次形式としての構造だけで決まり、さらにそれは不変量  $(r, a, \delta)$  によって決まる。不変量  $(r, a, \delta)$  は完全に分類され、総計 75 個ある。

Nikulin による  $(r, a, \delta)$  の分布図については [4] を見られたい。 $(r, a)$  は  $r \geq a$ ,  $r + a \leq 22$ ,  $r > 0$ ,  $a \geq 0$  の範囲にある。

これが位相型の分類であるが、次に双正則型の分類、すなわちモジュライの構成について説明する。Enriques 曲面の場合は堀川が、一般の場合は吉川 [6]

\*supported by Grant-in-Aid for JSPS fellows (21-978)

が行った。不変量  $(r, a, \delta)$  に対し、符号  $(2, 20 - r)$  の偶な整係数 2 次形式  $L_-$  であって判別式群  $D_{L_-}$  が長さ  $a$  の 2-elementary アーベル群で  $\delta(D_{L_-}) = \delta$  となるようなものを一つ固定しよう。2-elementary  $K3$  曲面  $(X, \iota)$  に対しては、 $L_-$  は不変格子  $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$  の  $H^2(X, \mathbb{Z})$  における直交補、すなわち  $\iota$  反不変サイクルのなす 2 次形式と同型である。

$$\Omega = \{\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}(L_- \otimes \mathbb{C}), (\omega, \omega) = 0, (\omega, \bar{\omega}) > 0\} \quad (1.1)$$

を  $L_-$  から定まる IV 型の Hermite 対称領域とすれば、上の 2 次形式の同型によって  $X$  の周期  $H^0(K_X)$  は  $\Omega$  の点に移される。この周期領域  $\Omega$  から退化軌跡  $\sum_{\delta \in L_-, (\delta, \delta) = -2} \delta^\perp$  を除いてから  $L_-$  の直交群  $O(L_-)$  による作用 (2 次形式の同型の取り替え) で割った商を  $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  と書こう。Baily-Borel の理論によって  $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  は  $20 - r$  次元の正規な擬射影的代数多様体になる。

**定理 1.2** (堀川, 金銅, 吉川 [6]).  $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  は不変量  $(r, a, \delta)$  を持つ 2-elementary  $K3$  曲面のモジュライ空間である。

$\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  はホッジ構造のモジュライとして構成されているわけだが、 $K3$  曲面に対しては Torelli 型定理が成立するので、ホッジ構造のモジュライが幾何学的対象のモジュライになるのである。モノドロミー群を特定すること (今の場合は  $O(L_-)$ ) がこの定理の肝要である。余計に偏極を指定することなくモジュライが構成されていることに注意されたい。講演では、これらのモジュライを研究する背景として次の 4 点に言及した。

- (1)  $K3$  のモジュライの例である (特に偏極  $K3$  のモジュライとの対比)
- (2) Enriques 曲面のモジュライの類似物 (似た性質が期待できる)
- (3) 算術商である (保型函数論、算術群論の応用)
- (4)  $K3$  曲面と低種数曲線、有理曲面を結びつける

## 2 主定理

講演の主題はモジュライ空間  $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  の双有理型を調べることであった。射影空間と双有理同値な代数多様体は有理的であると言われる。

**定理 2.1.**  $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  は以下の 8 つの  $(r, a, \delta)$  を除き有理的である:

- (1, 1, 1), (2, 2, 0), (10, 10, 1),  $(r, 22 - r, 1), 11 \leq r \leq 15$ .

Enriques 曲面のモジュライ  $\mathcal{M}_{10,10,0}$  及び  $\mathcal{M}_{10,2,0}$  は金銅 [2] が有理性を証明している。また、 $\mathcal{M}_{5,5,1}$  は種数 6 の曲線のモジュライ  $\mathcal{M}_6$  と双有理同値であることが Artebani と金銅 [1] によって知られており、 $\mathcal{M}_6$  の有理性は Shepherd-Barron [5] が証明している。定理 2.1 によってこれらの結果が偶発的なものではなく、より広い枠組みの中でかなり一般的に成り立つ現象であることがわかった。残った 8 つの  $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  が有理的か否かは未解決である。 $\mathcal{M}_{1,1,1}$

は  $\mathbb{P}^2$  上の非特異 6 次曲線のモジュライであり、 $\mathcal{M}_{2,2,0}$  は 2 次曲面上の非特異 (4, 4) 次曲線のモジュライである。これら 2 つの有理性問題は以前から認識されていた。ちなみに少し弱い性質だが、単有理性が全ての  $(r, a, \delta)$  で成り立つことを筆者は以前証明した。

### 3 証明のアイデア

有理性問題はデリケートである。そのため、基本的には約 60 個のモジュライたちを一つ一つ個別に解析して有理性を示す。とはいえ議論は 4 つのパターンに分類することができるので、それらの概略を以下説明しよう。

#### 3.1 (商曲面、分岐) のモジュライを調べる

これは最もシンプルなアプローチである。 $(X, \iota) \in \mathcal{M}_{r,a,\delta}$  に対して  $Y = X/\iota$  を商曲面、 $B$  を商写像  $X \rightarrow Y$  の分岐曲線とすると、トートロジカルな話だが、 $(X, \iota)$  のモジュライというのは  $(Y, B)$  のモジュライと同一視される。 $B$  は  $|-2K_Y|$  という線形系の開集合 (非特異曲線の軌跡) の中を動くから、双有理的には、 $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  は  $Y$  のモジュライの上に  $|-2K_Y|/\text{Aut}(Y)$  を並べたファイブレーションの構造を持っている。 $Y$  が del Pezzo の時などはこのファイブレーション構造を利用して有理性を証明している。しかし一般にはこの構造を正面から調べることは、不可能ではないにせよ、いくつか困難があるように思われる。約 3 分の 2 のモジュライに対しては、次の 2 番目のアプローチを採っている。

#### 3.2 極小有理曲面上の特異 $-2K$ 曲線による構成

この手法は、1 番目のアプローチにおいて商曲面  $Y$  をある意味標準的なやり方で極小有理曲面  $Y_0$  にブローダウンするものである。その時非特異  $-2K_Y$  曲線  $B$  は  $Y_0$  上の特異  $-2K_{Y_0}$  曲線につぶされる。こうすることで  $(Y, B)$  と 2 つモジュライ要素があったものが一つのモジュライ要素 (固定された曲面  $Y_0$  上の特異曲線の変形) に統合され、議論しやすくなる。以上はコンセプチュアルな説明で、実際には次のような議論をする。

$U$  を  $Y_0$  上の  $-2K_{Y_0}$  曲線であって規定された A-D-E 特異点を持つようなもののパラメータ空間とする。 $U$  のメンバー  $B'$  で分岐する  $Y_0$  の 2 重被覆をとると  $B'$  の特異点上に曲面の A-D-E 特異点が出てくるのでそれを解消することによって  $(X, \iota) \in \mathcal{M}_{r,a,\delta}$  が得られる。こうして周期写像  $U \rightarrow \mathcal{M}_{r,a,\delta}$  が得られ、この構成は  $\text{Aut}(Y_0)$  不変なので商空間からの有理写像  $\mathcal{P} : U/\text{Aut}(Y_0) \dashrightarrow \mathcal{M}_{r,a,\delta}$  が誘導される。極小有理曲面上で考えるメリットとして、 $\mathcal{P}$  の次数が簡単に計算できる。そこで  $\deg(\mathcal{P}) = 1$  となるような  $U$  を探し、もし見つければ

$\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  の有理性問題は  $U/\text{Aut}(Y_0)$  の有理性問題に帰着するわけである。後者は代数群  $\text{Aut}(Y_0)$  の作用の問題であり、時々解くことができる。超越的に構成されていた  $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$  を代数幾何的な商空間  $U/\text{Aut}(Y_0)$  として記述することによって問題への着手点が出てくるのである。

講演では  $(r, a, \delta) = (16, 6, 1)$  の場合に例によって周期写像の次数計算のやり方を解説した。特に、 $\mathbb{P}^2$  上の 6 本の直線から作る構成 (松本-佐々木-吉田モデル [3]) の周期写像の次数が 2 であること、そして次数 1 の周期写像は  $\mathbb{P}^2$  上の  $C + Q + L$ ,  $C$  はカスプを持つ 3 次曲線、 $Q$  は非特異 2 次曲線、 $L$  は  $C$  のカスプでの接線、という形の 6 次曲線によって得られることを説明した。

### 3.3 算術群の間の同型 ( $\delta = 0$ の場合)

$\delta = 0$  の時、2 次形式を比較することによって算術群の間の同型が得られ、それから  $\mathcal{M}_{r,a,0} \sim \mathcal{M}_{r,22-r-a,0}$  という算術商の同型が得られる。そこで  $\mathcal{M}_{r,a,0}$  の有理性問題を  $\mathcal{M}_{r,22-r-a,0}$  に転嫁し、 $\mathcal{M}_{r,22-r-a,0}$  に対して上で述べたようなアプローチを採る、という手法が考えられる。このようにして Enriques 曲面のモジュライ  $\mathcal{M}_{10,10,0}$  は有理性が証明された ([2])。他に  $\mathcal{M}_{10,8,0}$  と  $\mathcal{M}_{14,6,0}$  に対してこの方法が適用できる。

### 3.4 次数 $> 1$ の周期写像の解析

§3.2 で説明したような次数 1 の周期写像がどうしても見つからないこともある。その時、次数  $> 1$  の周期写像  $\mathcal{P} : U/\text{Aut}(Y_0) \dashrightarrow \mathcal{M}_{r,a,\delta}$  をうまく選んでその (リフトの) ファイバーを解析する、という地道なアプローチがうまくいく場合がある。ここで  $\mathcal{P}$  は §3.2 の極小有理曲面上の特異曲線から作るタイプの写像である。 $r + a = 20, 11 \leq r \leq 14, \delta = 1$  と  $(r, a, \delta) = (10, 8, 1)$  に対してこの方法は成功した。前者の場合、 $\mathcal{P}$ -ファイバーにワイル群の対称性を見いだすことが鍵で、それによって  $\mathcal{M}_{r,20-r,1}$  が  $r - 10$  次 del Pezzo 曲面上のある種の  $-K$  曲線のペアのモジュライと双有理同値になることがわかる。後者の場合も  $\mathfrak{S}_8 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$  によるクレモナ変換の対称性を  $\mathcal{P}$ -ファイバーに見いだすことができ、それが有理性問題への突破口になる。

シンポジウムでは  $(r, a, \delta) = (11, 9, 1)$  の場合に  $E_8$  型ワイル群  $W(E_8)$  の対称性を説明した。この場合  $U$  として  $C_1 + C_2$ ,  $C_1$  は非特異 3 次曲線、 $C_2$  は nodal な 3 次曲線で  $C_1$  と横断的なもの、という形の 6 次曲線のパラメータ空間をとる。交わりの 9 点  $C_1 \cap C_2$  にラベルを付けることで  $\mathfrak{S}_9$  被覆  $\tilde{U} \rightarrow U$  ができる。 $\tilde{U}$  の元は  $(C_1, C_2, p_1, \dots, p_9) \in U \times (\mathbb{P}^2)^9$ ,  $C_1 \cap C_2 = \{p_1, \dots, p_9\}$ 、と表される。この時周期写像との合成  $\tilde{U} \rightarrow U \rightarrow \mathcal{M}_{11,9,1}$  によって  $\tilde{U}/\text{PGL}_3$  はモジュラー多様体  $\tilde{\mathcal{M}}_{11,9,1} = \tilde{O}(L_-) \setminus \Omega$  と双有理同型になることが (§3.2 の計算手続きにより) わかる。ここで  $\tilde{O}(L_-)$  は自然な準同型  $O(L_-) \rightarrow O(D_{L_-})$  の

核である。算術群の比較をすると  $\widetilde{\mathcal{M}}_{11,9,1} \rightarrow \mathcal{M}_{11,9,1}$  は  $W(E_8)$  の Bertini 対合による商をガロア群とするガロア被覆であることがわかる。従って  $\widetilde{U}/\mathrm{PGL}_3$  への  $W(E_8)$  作用を記述できれば、それで割ることで  $\mathcal{M}_{11,9,1}$  が得られる。今  $\widetilde{U}/\mathrm{PGL}_3$  の元  $(C_1, C_2, p_1, \dots, p_9)$  を、見方を変えて、 $(p_1, \dots, p_8, C_1, C_2, p_9)$ 、 $\{p_1, \dots, p_8\}$  は  $\mathbb{P}^2$  上の一般 8 点配置、 $C_1$  と  $C_2$  は  $\{p_i\}_{i=1}^8$  を通る 3 次曲線、 $p_9$  は  $\{p_i\}_{i=1}^8$  の定める 3 次曲線のペンシルの基点、と見なそう。点配置とはすなわち標識付き del Pezzo 曲面  $Y_{\mathbf{p}}$  であり、その点配置を通る 3 次曲線は  $Y_{\mathbf{p}}$  上の  $-K$  曲線に他ならない。従って  $\widetilde{U}/\mathrm{PGL}_3$  は  $(Y_{\mathbf{p}}, C_1, C_2)$ 、 $Y_{\mathbf{p}}$  は標識付き 1 次 del Pezzo 曲面、 $C_1$  は  $Y_{\mathbf{p}}$  上の非特異  $-K$  曲線、 $C_2$  は  $Y_{\mathbf{p}}$  上の nodal な  $-K$  曲線、という 3 つ組のモジュライと同一視される。この時算術群から導かれていた  $W(E_8)$  作用を  $\widetilde{U}/\mathrm{PGL}_3$  に翻訳すると、実は del Pezzo 曲面の標識の取り替えによって作用していることがわかる。従って  $\mathcal{M}_{11,9,1}$  は  $(Y, C_1, C_2)$ 、 $Y$  は 1 次 del Pezzo 曲面、 $C_i$  は  $Y$  上の上のような  $-K$  曲線、という 3 つ組のモジュライと双有理同型である。ここから有理性を証明するまではそれほど長い道のりではない。以上の議論に隠れてしまったが、平面 6 次曲線を仲介していることで周期写像の次数が具体的に求まっており、そのおかげで  $W(E_8)$  対称性を見出すことに帰着していることを注意してこの稿を終わりたい。

## 参考文献

- [1] Artebani, M; Kondō, S. *The moduli of curves of genus six and K3 surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 1445–1462.
- [2] Kondō, S. *The rationality of the moduli space of Enriques surfaces*. Compositio Math. 91 (1994), no. 2, 159–173.
- [3] Matsumoto, K.; Sasaki, T.; Yoshida, M. *The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type (3, 6)*. Internat. J. Math. **3** (1992), no. 1.
- [4] Nikulin, V.V. *Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections*. J. Soviet Math. **22** (1983), 1401–1476.
- [5] Shepherd-Barron, N. I. *Invariant theory for  $S_5$  and the rationality of  $M_6$* . Compositio Math. **70** (1989), 13–25.
- [6] Yoshikawa, K.-I. *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*. Invent. Math. **156** (2004), 53–117.