

アフィン量子群の有限次元表現について

阪大基礎工 尾角正人*

概要

アフィンリー環に付随する量子展開環の有限次元表現について、おもにキリロフ・レシェティヒン加群 (KR 加群) の構成を目指して入門的な解説をする。講演ではあまり触れられなかった KR 加群の結晶基底の存在とその表現論や可積分系への応用についても補足したい。

1 量子展開環

アフィン量子展開環に限定する前に、一般の対称化可能なカツ・ムーディーリー環 \mathfrak{g} [1] の場合に量子展開環を復習しておこう。 I を \mathfrak{g} のディンキン図の頂点の集合とする。また、 $q \in \mathbb{C}^\times$ を 1 の冪根でないパラメータとする。 \mathfrak{g} に付随する量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ [2] とは \mathbb{C} 上の結合代数で、 $\{x_i^\pm, k_i^{\pm 1}\}_{i \in I}$ で生成され、次の関係式を満たすものである。

$$\begin{aligned} k_i k_j &= k_j k_i, & k_i k_i^{-1} &= k_i^{-1} k_i = 1, \\ k_i x_j^\pm k_i^{-1} &= q_i^{\pm a_{ij}} x_j^\pm, & [x_i^+, x_j^-] &= \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \\ \sum_{\nu=0}^{1-a_{ij}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} (x_i^\pm)^{1-a_{ij}-\nu} x_j^\pm (x_i^\pm)^\nu &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

ここで $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ は \mathfrak{g} のカルタン行列、 $q_i = q^{d_i}$ 、 d_i は $D = (d_i \delta_{ij})_{i,j \in I}$ とおくと DA が対称行列になるように定める。通常は $d_i = (\alpha_i, \alpha_i)/2$ (α_i は単純ルート、 $(,)$ はカルタン部分代数の双対空間の標準的な内積) ととる。最後の式はセール関係式とよばれるもので、 $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q$ は q -2 項係数

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1}) \cdots (1-q^{m-n+1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q]$$

($0 \leq n \leq m$) である。

$U_q = U_q(\mathfrak{g})$ についてよく知られた事実を復習しておこう。 U_q は、

1. \mathfrak{g} の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ のパラメータ q をいれた変形になっている。
2. ホップ代数である。特に、余積とよばれる代数準同型 $\Delta : U_q \longrightarrow U_q \otimes U_q$ が定義される。これを使って、 U_q -加群 V, W に対し $V \otimes W$ にも U_q -加群の構造が入る。

*E-mail: okado@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

3. 可換でも余可換 ($\Delta = \sigma \circ \Delta$ であること . σ はテンソル積の成分の入れ換え) でもない . この非余可換性が , 柏原の結晶基底のテンソル積が成分の入れ換えに関して非対称になることに遺伝する .

2 アフィン量子展開環

以降は , \mathfrak{g} を有限次元単純リー環に限定し , $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ を \mathfrak{g} に付随するアフィンリー環とする . これから述べる内容は , かなりの部分がカツツの本 [1] という twisted 型の場合にも適用できるが , ここでは簡単のために nontwisted 型 ($X_n^{(1)}$ と表示されるタイプ) に限ることにする . I, \widehat{I} を $\mathfrak{g}, \widehat{\mathfrak{g}}$ のダイキン図の頂点の集合とし , [1] に倣って $\widehat{I} = I \cup \{0\}$ としておく .

$U_q = U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の表現論をやるには , ドリinfeld 実現 [3] といわれるものを活用するのが便利である . そのでの生成元と U_q の生成元の関係は [4] が明らかにした . そのための記号を準備しよう . ϖ_i を \mathfrak{g} の基本ウェイト , P, Q をそれぞれ \mathfrak{g} のルート格子 , ウェイト格子とする . W を \mathfrak{g} のワイル群とすると , $\widehat{W} = W \times Q$ ($\widetilde{W} = W \times P$) は (拡大) アフィンワイル群とよばれているものである [1] . 拡大アフィンワイル群の方は $\widehat{\mathfrak{g}}$ のダイキン自己同型 ($a_{\tau(i), \tau(j)} = a_{i,j} \forall i, j \in \widehat{I}$ を満たす τ) のなす群のある部分群 T を用いて

$$\widetilde{W} = T \times \widehat{W}$$

と書くこともできる .

さてルスティック [5, Part VI] により , $i \in \widehat{I}$ に対して U_q の代数自己同型 T_i が構成され , それらが組み紐関係式

$$\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i \quad \text{if } a_{ij} = 0, & T_i T_j T_i &= T_j T_i T_j \quad \text{if } a_{ij} a_{ji} = 1, \\ (T_i T_j)^2 &= (T_j T_i)^2 \quad \text{if } a_{ij} a_{ji} = 2, & (T_i T_j)^3 &= (T_j T_i)^3 \quad \text{if } a_{ij} a_{ji} = 3 \end{aligned}$$

を満たすことが証明されている . $w \in \widetilde{W}$ に対し , $w = \tau s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ ($\tau \in T$, s_i は \widehat{W} の単純鏡映 , $s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ は簡約表示) と書いたとき , $\tau T_{i_1} \cdots T_{i_l}$ は簡約表示によらず , これを T_w と定義する .

$i \in I, r \in \mathbb{Z}$ に対し ,

$$x_{i,r}^{\pm} = o(i)^r T_{\varpi_i^{\mp r}} x_i^{\pm}$$

とおく . ここで , $o : I \rightarrow \{\pm 1\}$ は $a_{ij} < 0$ のとき $o(i) = -o(j)$ を満たす写像である . 定義から明らかに $x_{i,0}^{\pm} = x_i^{\pm}$ である . (a_i) をアフィンリー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のカツツラベル ($A^t(a_0, \dots, a_n) = 0$ となる最小の正整数の組) とし , $C = \prod_{i \in \widehat{I}} k_i^{a_i}$ とおくと , C は U_q の中心に属し , U_q は $\{x_{i,r}^{\pm}, k_i, C \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$ で生成される . 各 $i \in I$ に対し , $\{x_i^{\pm}, k_i\}$ は $U_{q_i}(sl_2)$ を生成し , $\{x_{i,r}^{\pm}, k_i, C \mid r \in \mathbb{Z}\}$ は $U_{q_i}(\widehat{sl}_2)$ を生成する .

次章で使うので , $i \in I, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\psi_{i,\pm r} = (q_i - q_i^{-1}) C^{\mp r/2} [x_{i,\pm r}^+, x_{i,0}^-]$$

と定義しておく．このとき

$$[\psi_{i,r}, \psi_{j,s}] \in (C-1)U_q$$

が成立する． U_q のタイプ I (次章参照) の有限次元表現上では, $C=1$ なので $\psi_{i,r}$ 達は互いに可換である．

3 既約表現の分類

我々はアフィン量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現について考察したい．まず, 有限次元表現の同型類のなすテンソル圏については, 最高ウェイト $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -加群を単純対象として含むいわゆる圏 \mathcal{O} とは違い,

1. 完全可約性が成立しない!
2. ほとんどの場合, 対象に柏原の意味での結晶基底が存在しない!

ということが知られている．2 については, 次章で詳しく述べる．

一方, 単純対象である既約表現については, 圏 \mathcal{O} における最高ウェイトのような比較的わかりやすい概念による分類法がある．それを説明するために, タイプ I 表現, ℓ -最高ウェイト表現という用語を準備する． P を $\widehat{\mathfrak{g}}$ のウェイト格子, $\alpha_i^\vee (i \in \widehat{I})$ を単純コルートとする． $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の表現 V がタイプ I であるとは, V が

$$V = \bigoplus_{\mu \in P} V_\mu, \quad V_\mu = \{v \in V \mid k_i v = q^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle} v \text{ for } i \in \widehat{I}\}$$

とウェイト空間の直和に分解されていることである．一般には, $i \in \widehat{I}$ に対して独立に, $k_i v = -q^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle} v$ となることを許容しなければならない．また, 表現 V が ℓ -最高ウェイト表現であるとは, ある複素数の組 $\{\Psi_{i,r}^\pm\}_{i \in I, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対し,

$$x_{i,r}^+ v = 0 (r \in \mathbb{Z}), \quad k_i^{\pm 1} v = q_i^{\Psi_{i,0}^\pm} v, \quad \psi_{i,\pm r} v = \Psi_{i,r}^\pm v (r \in \mathbb{Z}_{>0}), \quad Cv = v$$

という条件を満たす ℓ -最高ウェイトベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ を用いて, $V = U_q(\widehat{\mathfrak{g}})v$ と表わされる表現である．

このとき, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の有限次元既約表現について次のことがわかっている [6].

1. 有限次元既約表現はタイプ I の表現から $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の自己同型

$$\sigma_i(x_j^\pm) = (\mp 1)^{\delta_{ij}} x_j^\pm, \quad \sigma_i(k_j) = (-1)^{\delta_{ij}} k_j$$

によってツイストして得られる．

2. タイプ I の有限次元既約表現は ℓ -最高ウェイト表現である．

3. (有限次元とは限らない) ℓ -最高ウェイト表現が有限次元であるための必要十分条件は, 定数項 1 の多項式の組 $(P_i)_{i \in I}$ が存在して

$$\sum_{r=0}^{\infty} \Psi_{i,r}^+ u^r = q_i^{\deg(P_i)} \frac{P_i(q_i^{\mp 2} u)}{P_i(u)} = \sum_{r=0}^{\infty} \Psi_{i,r}^- u^{-r}$$

と書けることである. ここで, 左辺 (右辺) は中辺の $u = 0$ ($u = \infty$) でのローラン展開と考える.

つまり, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ のタイプ I 有限次元既約表現はドリンフェルト多項式とよばれる多項式の組 $(P_i)_{i \in I}$ で分類できるということになる.

4 表現の構成

この章では, ドリンフェルト多項式 $(P_i)_{i \in I}$ をもつ有限次元既約表現を具体的にどう構成するかという問題を柏原流 [7] に扱う (中島啓 [8] による standard module の理論, Chari [9] による Weyl module の理論もある). よって, q を不定元と思うことにする. また, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ には

$$q^d x_i^{\pm} q^{-d} = q^{\pm \delta_{i0}} x_i^{\pm}, \quad q^d k_i q^{-d} = k_i$$

となる新しい生成元 q^d を入れておき, q^d が不在の $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ と書いて区別する. \widehat{W} を $\hat{\mathfrak{g}}$ に付随するアフィンワイル群とし, s_i ($i \in \hat{I}$) を単純鏡映とする. 可積分表現 (x_i^{\pm} が局所的に幕零になるような表現) V のベクトル v がウェイト λ の extremal ベクトルであるとは,

$$\begin{aligned} v_w &= v \quad \text{for } w = e; \\ \text{if } \langle w\lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle &\geq 0, \text{ then } x_i^+ v_w = 0 \text{ and } (x_i^-)^{\langle w\lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle} v_w = v_{s_i w}; \\ \text{if } \langle w\lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle &\leq 0, \text{ then } x_i^- v_w = 0 \text{ and } (x_i^+)^{-\langle w\lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle} v_w = v_{s_i w} \end{aligned}$$

を満たすベクトルの組 $\{v_w\}_{w \in \widehat{W}}$ を見つけることができることである. このとき, extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ ($\lambda \in P$) が, v_λ によって生成され, v_λ がウェイト λ の extremal ベクトルであるという関係式によって定義される. λ が支配的整ウェイトのときには, $V(\lambda)$ は λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト表現になる.

$r \in I$ に対し, レベル 0 基本ウェイト ϖ_r を extremal ウェイトとする extremal ウェイト加群 $V(\varpi_r)$ を考え,

$$W^r = V(\varpi_r) / (z_r - 1)V(\varpi_r)$$

とおく. ここで, z_r はある $V(\varpi_r)$ 上の $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -線形同型である. $V(\varpi_r)$ は無限次元だが, W^r は有限次元となり, ドリンフェルト多項式

$$P_r(u) = 1 - a_r^\dagger u, \quad P_i(u) = 1 \quad (i \neq r)$$

($a_r^\dagger \in \mathbb{Q}(q)$) をもつ既約表現となる. これをレベル 0 基本表現とよぶ.

レベル0 基本表現 W^r をもちいて、一般のドリンフェルト多項式をもつ既約表現を構成しよう。 $a \in \mathbb{Q}(q)$ に対し、 $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の自己同型 $\tau_a(\tau_a(x_0^\pm) = a^{\pm 1}x_0^\pm)$ 、他は id) による W^r の引き戻し $\tau_a^*(W^r)$ を $W^r(a)$ とおく。 $W^r(a) \otimes W^{r'}(a')$ は generic な $a, a' \in \mathbb{Q}(q)$ に対しては既約なので、 $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -線形な写像

$$R_{W^r, W^{r'}}(a, a') : W^r(a) \otimes W^{r'}(a') \longrightarrow W^{r'}(a') \otimes W^r(a)$$

がスカラー倍を除いて決まる。これを量子R行列という。この量子R行列の合成によって得られる $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -線形写像

$$W^{r_1}(a_1) \otimes W^{r_2}(a_2) \otimes \cdots \otimes W^{r_s}(a_s) \longrightarrow W^{r_s}(a_s) \otimes \cdots \otimes W^{r_2}(a_2) \otimes W^{r_1}(a_1)$$

を考えよう。ここで、 a_j 達は a_j/a_{j+1} が $q = 0$ で極をもたないようにとるものとする。このとき、[7, Th. 9.1] を使うことによって、像が既約であることがわかる。また、対応するドリンフェルト多項式が

$$P_i(u) = \prod_{m; i_m=i} (1 - a_m a_i^\dagger u)$$

であることもわかる。これで、一般のドリンフェルト多項式をもつ既約表現を構成できた。この構成法をフュージョン構成という。

5 KR 加群

$r \in I, s \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 $r_1 = \cdots = r_s = r, a_j = q_r^{s+1-2j} a$ ($1 \leq j \leq s$) のときにフュージョン構成で得られる既約表現を $W^{r,s}(a)$ とおく。ベテ仮説に由来するこの表現は、その存在を予想した論文 [10] の著者の名前をとってキリロフ・レシェティヒン加群 (KR 加群) とよばれ、次のような大変良い性質を持っている。

1. $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の部分代数 $U_q(\mathfrak{g})$ に制限すると、KR 加群 $W^{r,s}(a)$ は

$$W^{r,s}(a) \simeq V(s\varpi_r) \oplus \bigoplus_{\mu < s\varpi_r} V(\mu)$$

($V(\mu)$ は μ を最高ウェイトとする $U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト表現、 $<$ は通常のウェイト上の半順序) という $U_q(\mathfrak{g})$ -加群としての分解をもつが、 $\mu < s\varpi_r$ なる成分が極小になるような表現 (ミニマル表現) である。これについては [11] がよいレビューである。

2. $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現には q -指標 [12] があり、KR 加群達の q -指標は T-system [13] とよばれる簡単な代数関係式を満たす [14, 15]。さらに [16] の結果とあわせて、フェルミ公式といわれる次の美しい分岐則が示される。

$$[W^{r_1, s_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes W^{r_l, s_l}(a_l) : V(\lambda)] = \sum_{\{m_i^{(a)}\}} \prod_{a \in I, i \geq 1} \binom{p_i^{(a)} + m_i^{(a)}}{m_i^{(a)}}$$

ここでも $V(\lambda)$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト λ の最高ウェイト表現であり, $[\cdot]$ は表現の重複度である. 右辺では

$$p_i^{(a)} = \sum_{j \geq 1} \nu_j^{(a)} \min(i, j) - \sum_{b \in I, j \geq 1} (\alpha_a, \alpha_b) \min(i, j) m_j^{(b)},$$

$$\nu_j^{(a)} = \#\{k \mid 1 \leq k \leq l, r_k = a, s_k = j\}$$

で, 和 $\sum_{\{m_i^{(a)}\}}$ は

$$p_i^{(a)} \geq 0 \quad \text{for any } a \in I, i \geq 1$$

$$\lambda = \sum_{a \in I, i \geq 1} i(\nu_i^{(a)} \varpi_a - m_i^{(a)} \alpha_a)$$

を満たす $\{m_i^{(a)} \mid a \in I, i \geq 1\}$ についてとる. これらの条件により, $m_i^{(a)} \neq 0$ となる (a, i) は有限個になることに注意する.

3. $W^{r,s} = W^{r,s}(1)$ は柏原の意味での結晶基底 [17] をもつ. このことは [18] において予想され, [19, 20] において \mathfrak{g} が非例外型 (ABCD 型) の場合に証明されているが, \mathfrak{g} が例外型の場合, $s = 1$ のとき [7] や, $W^{r,s}$ が $U_q(\mathfrak{g})$ の表現として既約なとき, r が $\hat{\mathfrak{g}}$ のディンキン図の adjoint node (0 と隣接する頂点) のときにしかわかっていない. $W^{r,s}$ の結晶基底を KR 結晶といい, $B^{r,s}$ と表わす. KR 結晶の組合せ論的な実現については, \mathfrak{g} が非例外型の場合 [22], $s = 1$ の場合 LS パスによる表示は [23], 単項式による表示は [24] を見よ. また, 逆に結晶基底をもつ有限次元表現は, KR 加群のテンソル積だけだろうという予想もある. これについては, A 型の場合ですらまだ証明はない.

KR 結晶をもちいると 2 のフェルミ公式の q -類似

$$\sum_b q^{D(b)} = \sum_{\{m_i^{(a)}\}} q^{c(\{m_i^{(a)}\})} \prod_{a \in I, i \geq 1} \begin{bmatrix} p_i^{(a)} + m_i^{(a)} \\ m_i^{(a)} \end{bmatrix}_{q_a}$$

も考えることができる. ここで和 \sum_b は, $U_q(\mathfrak{g})$ -結晶としての最高ウェイト条件を満たすウェイト λ の $B^{r_1, s_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_l, s_l}$ の元すべてにわたってとる. また, $D(b)$ はエネルギー関数といわれる整数値をとる b の関数で, 右辺の $c(\{m_i^{(a)}\})$ は $\{m_i^{(a)}\}$ のある 2 次形式である. これを X=M 予想 [21] という. この予想は, 組合せ論的な方法で A 型の場合 [25], 非例外型で \mathfrak{g} のランクが十分に大きいとき [26, 27], カレント代数の表現論による方法で A, D 型の場合 [28] で証明されている.

4. KR 結晶のエネルギー関数によって次数付けられた指標は $\hat{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト表現の適当なワイル群の元に対応するデマズール指標となっている [29, 30, 31, 32]. またごく最近の研究で, $B^{r,1}$ のテンソル積の次数付指標はマクドナルド多項式の $t = 0$ での特殊化になっていることもわかった [33].

最後に, KR 結晶の応用についても少し触れておこう.

1. $r \in I$ に対し $t_r = 2/(\alpha_r, \alpha_r)$ とおいたとき, KR 結晶 $B^{r, t_r s}$ はレベル s 完全結晶 [34] といわれるものになる (もちろん結晶基底の存在が知られていない場合は予想). B をレベル s 完全結晶とすると, 半無限テンソル積 $B \otimes B \otimes \dots$ の元でウェイト λ に依存するある安定性条件を満たすもの全体は, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の最高ウェイト表現の結晶基底 $B(\lambda)$ と同型になる. これを $B(\lambda)$ の (京都) パス実現という. B としてレベルの異なる完全結晶のテンソル積をとると, 今度は $B(\lambda)$ 達のテンソル積となる [35]. さらに $X=M$ 予想を仮定すると, $B(\lambda)$ や $B(\lambda)$ 達のテンソル積の $U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト結晶に関する分岐関数のフェルミ的な明示公式を導くことができる.
2. 箱玉系 [36] といわれるソリトンをもつセルオートマトンがある. これは, 初めはソリトン方程式の超離散化として考察されていたが, KR 結晶をもちいても定式化できることがわかった [37, 38]. $X=M$ 予想の両辺はそれぞれパス, 艦装配位という組合せ論の対象物の母関数として表示されているが, このパス, 艦装配位の間には KKR 全単射 [39] が存在する. 箱玉系はパスの空間で記述されていて, そこでの運動は非線形であるが, KKR 全単射で移った艦装配位の方では線形化されている [40].

参考文献

- [1] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
- [2] 神保道夫, 「量子群とヤン・バクスター方程式」, シュプリンガー (1992).
- [3] V.G. Drinfeld, A new realization of Yangians and of quantum affine algebras, *Soviet math. Dokl.* **36**, no. 2 (1988) 212-216.
- [4] J. Beck, Braid group action and quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* **165** (1994) 555-568.
- [5] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progress in Mathematics **110**, Birkhäuser, 1993.
- [6] V. Chari and A. N. Pressley, Quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* **142** (1991) 261-283.
- [7] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002) 117-175.
- [8] H. Nakajima, Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **14**, no. 1 (2001) 145-238.

- [9] V. Chari and A. N. Pressley, Weyl modules for classical and quantum affine algebras, *Represent. Theory* **5** (2001) 191-223.
- [10] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, Representations of Yangians and multiplicity of occurrence of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras, *J. Sov. Math.* **52** (1990) 3156-3164.
- [11] V. Chari and D. Hernandez, Beyond Kirillov-Reshetikhin modules, *Contemp. Math.* **506** (2010) 49-81.
- [12] E. Frenkel and N. Reshetikhin, The q -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W -algebras, *Contemp. Math.* **248** (1999) 163-205.
- [13] A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, Functional relations in solvable lattice models I: Functional relations and representations theory, *Internat. J. Modern Phys. A* **9** (1994) 5215-5266.
- [14] H. Nakajima, t -analogue of q -characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras, *Represent. Theory* **7** (2003) 259-274.
- [15] D. Hernandez, The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solution of T -systems, *J. Reine Angew. Math.* **596** (2006) 63-87.
- [16] P. Di Francesco and R. Kedem, Proof of the combinatorial Kirillov-Reshetikhin conjecture, *Int. Math. Res. Notices*, (2008) Volume 2008: article ID rnn006, 57 pages.
- [17] M. Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991) 465-516.
- [18] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, Remarks on fermionic formula, *Contemp. Math.* **248** (1999) 243-291.
- [19] M. Okado, Existence of crystal bases for Kirillov-Reshetikhin modules of type D , *Publ. RIMS* **43** (2007) 977-1004.
- [20] M. Okado and A. Schilling, Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types, *Represent. Theory* **12** (2008) 186-207.
- [21] M. Okado, $X = M$ conjecture, *MSJ Memoirs* **17** (2007) 43-73.
- [22] G. Fourier, M. Okado and A. Schilling, Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types, *Adv. in Math.* **222** (2009) 1080-1116.
- [23] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level zero extremal weight module over a quantum affine algebra, *Int. Math. Res. Notices* **32** (2003) 1731-1754.

- [24] D. Hernandez, H. Nakajima, Level 0 monomial crystal, Lusztig's issue, Nagoya Math. J. **184** (2006) 85-153.
- [25] A. N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono, A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations, Selecta Math. (N.S.) **8** (2002) 67-135.
- [26] C. Lecouvey, M. Okado and M. Shimozono, Affine crystals, one-dimensional sums and parabolic Lusztig q -analogues, Mathematische Zeitschrift **271** (2012) 819-865.
- [27] M. Okado and R. Sakamoto, Stable rigged configurations for quantum affine algebras of nonexceptional types, Adv. in Math. **228** (2011) 1262-1293.
- [28] K. Naoi, Fusion products of Kirillov-Reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture, Adv. in Math. **231** (2012) 1546-1571.
- [29] A. Kuniba, K.C. Misra, M. Okado, T. Takagi and J. Uchiyama, Crystals for Demazure modules of classical affine Lie algebras, J. of Alg. **208** (1998) 185-215.
- [30] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005) 223-250.
- [31] G. Fourier and P. Littelmann, Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions, Nagoya Math. J. **182** (2006) 171-198.
- [32] G. Fourier, A. Schilling and M. Shimozono, Demazure structure inside Kirillov-Reshetikhin crystals, J. Algebra **309** (2007) 386-404.
- [33] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling and M. Shimozono, in preparation.
- [34] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K.C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, Perfect crystals of quantum affine Lie algebras, Duke Math. J. **68**, (1992) 499-607.
- [35] M. Okado, A. Schilling and M. Shimozono, A tensor product theorem related to perfect crystals, J. of Alg. **267** (2003) 212-245.
- [36] D. Takahashi and J. Satsuma, A soliton cellular automaton, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514-3519.
- [37] K. Fukuda, M. Okado and Y. Yamada, Energy functions in box ball systems, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 1379-1392.
- [38] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, The $A_M^{(1)}$ automata related to crystals of symmetric tensors, J. Math. Phys. **42** (2001) 274-308.

- [39] S. V. Kerov, A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group, *Zap. Nauchn. Sem. (LOMI)* **155** (1986) 50-64 (English translation: *J. Sov. Math.* **41** (1988) 916-924).
- [40] A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada, Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection, *Nucl. Phys.* **B740** [PM] (2006) 299-327.