

# ジョルダン分解について

雪江明彦

## 1 2次形式の空間のジョルダン分解

最近ジョルダン分解の概念を概均質ベクトル空間に拡張するということを考えているので、このことについて解説する。

まず、2次形式の空間の場合の古典的なジョルダン分解の概念について復習する。

$R$  を可換環、 $R^\times$  を  $R$  の単元全体のなす群 ( $R$  の乗法群) とする。  $M(n)_R, GL(n)_R$  をそれぞれ  $R$  の元を成分とする  $n$  次行列全体のなす環、 $n$  次可逆行列全体のなす群とする。また  $M(n, m)_R$  を  $n \times m$  次行列全体のなす  $R$  加群とする。環  $R$  を指定しないときには、 $M(n), M(n, m), GL(n)$  と書く。

$G = GL(1) \times GL(n)$ ,  $V$  を  $n$  変数 2 次形式の空間とする。なお、2 次形式とは、 $n$  次元列ベクトルの空間上で 2 次の斉次式で表される関数、あるいはその多項式そのものをこのことをいう。概均質ベクトル空間の局所理論においては、有限個の有限素点は無視できることが多いので、 $p$  を奇素数とする。だから、 $V$  を  $n$  次対称行列の空間と同一視することができる。この同一視は具体的には、 $M$  を対称行列とすると、

$$Q(x) = {}^t x M x$$

(ただし  $x = [x_1, \dots, x_n]$  は  $n$  次元列ベクトル)、 $Q(x)$  が 2 次形式なら、対称形式

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

の表現行列を  $M$  とすれば、 $M \rightarrow Q, Q \rightarrow M$  は互いの逆写像になる。対称行列  $M$  は  $\det M$  が単元であるとき、非退化であるという。このとき、対応する 2 次形式も非退化であるという。 $S(n)$  を  $n$  次対称行列全体のなる加群とする。成分が環  $R$  の元であるときには、 $S(n)_R, S(n, R)$  などと書く。 $R = \mathbb{Z}_p$  であるときには、 $p$  が奇素数と仮定しているので、 $S(n)_{\mathbb{Z}_p}$  の元を 2 次形式と同一視しても、 $\mathbb{Z}_p$  有理性には影響がないことに注意せよ。 $V = S(n)$  なので、 $V_{\mathbb{Q}_p}, V_{\mathbb{Z}_p}$  といった記号も使う。

ジョルダン分解とは、 $V_{\mathbb{Z}_p}$  の  $G_{\mathbb{Z}_p}$  軌道を記述するものである。以下、 $\mathbb{Z}_p$  の元の  $p$  を法とする剰余類を考えるときにはバーをつけて表す ( $\bar{x}$ ) など。これは  $\mathbb{Z}_p$  上の行列や多項式を考える場合でも同様である。

定理 1.1 (ジョルダン分解).  $M \in V_{\mathbb{Z}_p}$ ,  $\det M \neq 0$  なら,  $G_{\mathbb{Z}_p}$  の作用で  $M$  は

$$\begin{pmatrix} p^{i_1} M_1 & & & \\ & p^{i_2} M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{i_t} M_t \end{pmatrix}$$

という形に移る. ただし,  $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ ,  $M_1, \dots, M_t$  対称行列, 成分は  $\mathbb{Z}_p$  の元,  $\det M_j \in \mathbb{Z}_p^\times$ .

証明.  $M = p^{i_1} M'$ ,  $M'$  の成分のどれかは  $p$  で割れないとしてよい.  $\det M' \in \mathbb{Z}_p^\times$  なら何もすることはない.

$\det M' \in p\mathbb{Z}_p$  なら,  $\bar{M}'$  の階数は  $n_1 < n$  である. ただし,  $\bar{M}' \neq 0$  なので,  $n_1 \neq 0$  である. すると,  $\bar{g} \in G_{\mathbb{F}_p}$  と非退化  $n_1$  次対称行列  $\bar{M}_1$  があり,

$$\bar{g}\bar{M}' = \begin{pmatrix} \bar{M}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

となる.  $\bar{g}, \bar{M}_1$  はそれぞれ  $g \in M(n)_{\mathbb{Z}_p}$ ,  $M_1 \in S(n_1)_{\mathbb{Z}_p}$  の  $p$  を法とする剰余類としてよい. すると,  $\det \bar{g}, \det \bar{M}_1 \neq 0$  なので,  $g \in GL(n)_{\mathbb{Z}_p}$  であり,  $\det M_1 \in \mathbb{Z}_p^\times$  である.

$U_2 \in M(n - n_1, n_1)_{\mathbb{Z}_p}$  により,

$$M = p^{i_1} \begin{pmatrix} M_1 & p^t U_2 \\ p U_2 & p^* \end{pmatrix}$$

となる.  $C \in M(n - n_1, n_1)_{\mathbb{Z}_p}$ ,

$$g = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ pC & I_{n-n_1} \end{pmatrix},$$

とすると,

$$gM = p^{i_1} \begin{pmatrix} M_1 & p^t(U + CM_1) \\ p(U + CM_1) & p^* \end{pmatrix}$$

となる.

$C = UM_1^{-1}$  とすれば

$$M = \begin{pmatrix} p^{i_1} M_1 & 0 \\ 0 & p^{i_2} M'_1 \end{pmatrix}$$

という形になる.

$\det M \neq 0$  なので,  $\det M'_1 \neq 0$  である.  $i_1 < i_2$ ,  $M'_1$  の成分で  $p$  で割れないものがあるとしてよい. すると,  $M'_1$  に帰納法を使うことによりジョルダン分解を得る.  $\square$

実際には、さらに安定化群も記述できるなど、もっと詳しい情報が得られるのだが、ここでは割愛する。2次形式のジョルダン分解の応用として、少なくとも次のようなことがある。

- 2次形式の理論で基本的な役割を果たす。例えば、北岡氏の教科書 [13] では、ジョルダン分解は沢山の箇所で使われている。
- 伊吹山-斎藤氏は [6] でジョルダン分解を使い、2次形式の空間の井草ゼータ関数の明示公式や大域ゼータ関数の明示公式を証明し、ジエゲル保型形式の次元公式への応用を考察している。
- 早坂-雪江, 雪江 [4], [5], [17] でジョルダン分解を使い、2次形式の空間の局所軌道ゼータ関数の一様評価を証明し、密度定理へ応用している。

なお、定理 1.1 の形をした元の局所ゼータ関数への寄与は  $i_1, \dots, i_t$  と  $M_1, \dots, M_t$  のサイズで評価することができる。

## 2 概均質ベクトル空間の定義と例

これから概均質ベクトル空間について話すので概均質ベクトル空間を定義する。

$G$  を簡約群,  $V$  を  $G$  の既約表現とする。概均質ベクトル空間は既約でなくても、あるいは群が簡約群でなくても定義できるが、ここでは上のような状況でしか考えない。

定義 2.1.  $G, V$  が体  $k$  上定義されているとする。  $(G, V)$  が概均質ベクトル空間とは  $V$  が代数閉包  $\bar{k}$  上開軌道を持ち、定数でない  $V$  上の多項式  $P$  があり、  $P(gx) = \chi(g)P(x)$  となることである。

$P$  のことを相対不変式といい、

$$V^{\text{ss}} = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$$

とおく。  $V^{\text{ss}}$  の元は半安定点 (semi-stable point) とよばれる。不変式論的には、半安定点でない点は不安定点 (unstable point) といわれる。なお、ここでの安定性は、  $V \setminus \{0\}$  からその射影化  $\mathbb{P}(V)$  への写像を考え、  $G$  からスカラー方向を1次元抜いたものの作用による  $\mathbb{P}(V)$  の点の安定性を考えたものである。

$Gx \subset V^{\text{ss}}$  が開軌道で  $G_x$  が簡約群なら、概均質ベクトル空間は正則であるという。  $(G, V)$  が正則な概均質ベクトル空間なら、  $V \setminus Gx = \{y \in V \mid P(y) = 0\}$  となる。正則で既約な概均質ベクトル空間は木村-佐藤 [16] により 29 タイプに分類されている。以降正則な概均質ベクトル空間のみ考える。

例 2.2. (1)  $G = \text{GL}(1) \times \text{GL}(n)$ ,  $V$  が  $n$  変数 2 次形式の空間なら,  $(G, V)$  は概均質ベクトル空間である. 代数閉体上では, 群の作用により非退化対称行列が単位行列に移ることはよく知られている. また,  $x \in V$  に対し  $P(x) = \det x$  とおくと,  $P(gx) = (\det g)^2 P(x)$  なので,  $P(x)$  が相対不変式である. ただし, 体の標数が 2 なら, 表現は可約となるが, ここではそういったことは影響はない.

(2)  $G = \text{GL}(1) \times \text{GL}(2)$ ,  $V$  が 2 変数 3 次形式の空間なら,  $(G, V)$  は概均質ベクトル空間である.  $f(u, v) = x_0 u^3 + x_1 u^2 v + x_2 u v^2 + x_3 v^3$  が 2 変数 3 次形式で  $k$  が代数閉体なら,  $f(u, v)$  の根は射影空間  $\mathbb{P}^1$  の 3 点を定める. 例えば,  $f(u, v) = x_0(u - \alpha_1 v)(u - \alpha_2 v)(u - \alpha_3 v)$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in k$ ) なら,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  が  $\mathbb{P}^1$  の 3 点である.  $f(u, v) = uv(u - v)$  などのように  $x_0 = 0$  の場合には,  $f(u, v)$  の定める  $\mathbb{P}^1$  の 3 点は  $0, 1, \infty$  であると解釈する.  $\mathbb{P}^1$  の異なる 3 点は  $\text{GL}(2)_k$  の元により,  $0, 1, \infty$  に移せることはよく知られている.  $f(u, v)$  の根がすべて異なることは, その判別式  $\Delta(f)$  が零でないことと同値である. 明示的に書くと,

$$\Delta(f) = -4x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_3 + 18x_0x_1x_2x_3 - 27x_0x_3^2$$

である. この  $\Delta(f)$  が相対不変式となるので,  $(G, V)$  は概均質ベクトル空間である.

### 3 ジョルダン分解と GIT convexity

幾何学的不変式論 (geometric invariant theory) のことを略して GIT と書く. 概均質ベクトル空間の理論は GIT といくつかの点で関係している. GIT は例えば,

- ゼータ関数の収束の証明,
- 大域ゼータ関数の極を決定するときに使う不安定点の帰納的構造,

などで既に使われている. GIT が概均質ベクトル空間の理論で使われる例について考える.

$G = \text{GL}(2)$ ,  $V$  を 2 変数 3 次形式の空間とする. 整数論的には  $\text{GL}(1)$  の因子があるのが自然だが, ゼータ関数の収束といったことにはあまり関係しないので, 単に  $G = \text{GL}(2)$  とする. 古典的に考える.

$\Phi$  を  $V_{\mathbb{R}}$  上の急減少関数とする. この場合のゼータ関数は

$$Z(\Phi, s) = \int_{G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}} |\det g|^s \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}^{\text{ss}}} \Phi(gx) dg$$

(ただし  $dg$  は不変測度) なのだが, この積分が収束する理由を考えてみよう.

$T \subset \text{GL}(2)$  を対角行列全体よりなる部分群,

$$N = \left\{ n(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とする.  $K = O(2)$  とすると,  $G_{\mathbb{R}}$  は岩澤分解  $G_{\mathbb{R}} = KT_{\mathbb{R}}N_{\mathbb{R}}$  を持つ.

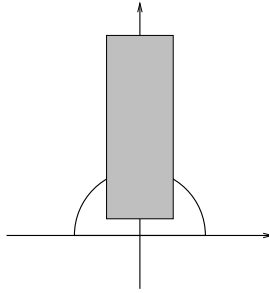
定数  $\eta > 0$  を十分小さくとり,

$$a(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}, d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, T_{\eta} = \{a(\lambda_1, \lambda_1^{-1}) \mid \lambda_1 \geq \eta\}$$

とおく.  $\Omega = \{n(u) \mid 0 \leq u \leq 1\}$  とすれば,  $KT_{\eta}\Omega$  から  $G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}$  への写像は  $\eta$  が十分小さければ全射となる.  $SL(2)_{\mathbb{R}}$  に制限して上半平面  $\mathbb{H}$  への右作用を考え,  $\sqrt{-1}$  の軌道への写像

$$SL(2)_{\mathbb{R}} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a\sqrt{-1} + c}{b\sqrt{-1} + d} \in \mathbb{H}$$

を考えると,  $SO(2)$  は  $\sqrt{-1}$  を固定するので, Siegel 集合は下図のような集合に対応する.



ゼータ関数の収束のためには  $K, \Omega$  は無視でき,  $r = \frac{2}{3}\text{Re}(s)$  として積分

$$\int_{\mathbb{R}_{>0} \times [\eta, \infty)} \lambda^r \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}^{\text{ss}}} \Phi_{\infty}(\lambda \lambda_1^3 x_0, \lambda \lambda_1 x_1, *, *) \lambda_1^{-2} \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1}$$

で評価できる.  $x \in V_{\mathbb{Z}}^{\text{ss}}$  なら  $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$  なので, この積分は  $r \gg 0$  で収束する. ここで重要なのは,  $x \in V^{\text{ss}}$  なら  $a(\lambda_1, \lambda_1^{-1})$  の作用で  $x_0, x_1$  の weight ( $\lambda_1$  のべきの部分) が正である零でない座標が常にあるということである. これは GIT では Hilbert-Mumford の安定性の判定法 ([14]) というものの例になっている.

## 4 不安定点の帰納的構造

2次形式の場合のジョルダン分解では, 非退化な2次形式が  $p$  を法としては退化であることから形が帰納的に求まった. 不変式論的には,  $\mathbb{Q}_p$  上半安定で  $p$  を法として不安定なもの考える.

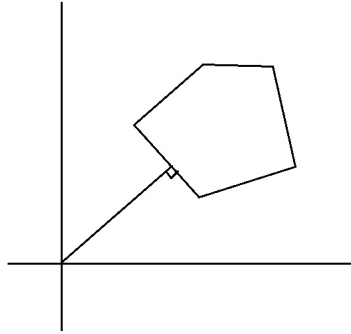
大域ゼータ関数の極の主要部の計算には不安定点の機能的構造が必要になるが, その不安定点の機能的構造が  $\mathbb{Z}_p$  軌道の記述に使えると思い考察を進めている. その不安定点の機能的構造について述べる.

$k$  を体,  $G$  を  $k$  上の簡約群,  $V$  を  $G$  の  $k$  上の表現とする. 写像  $V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$  を考え,  $\mathbb{P}(V)$  の点の安定性を考える. ここで  $G$  は 2 変数 3 次形式の空間なら,  $SL(2)$  に対応するような「スカラーを 1 次元抜いた」ものを考える.  $G$  は  $k$  上分裂していると仮定する.  $T \subset G$  を極大分裂トーラスとすると,  $T$  の作用は対角化できる. そこで,  $V$  の座標  $x = [x_0, \dots, x_N]$  を  $T$  の作用が対角行列になるようにとる.

$\mathfrak{t} = \text{Hom}(GL(1), T) \otimes \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{t}^* = \text{Hom}(T, GL(1)) \otimes \mathbb{R}$  とおく.  $\text{Hom}(GL(1), T)$  の元は 1 パラメータ部分群 (略して 1PS) という.  $\mathfrak{t}^*$  に Weyl 群で不変な内積  $(\cdot, \cdot)$  を入れる.  $\mathfrak{t}^*$  には Weyl chamber  $\mathfrak{t}_+^*$  を選んでおく.  $\gamma_i \in \mathfrak{t}^*$  座標  $x_i$  の weight とする. 部分集合  $S \subset \{\gamma_i \mid i = 0, \dots, N\}$  に対し,  $\text{Conv}(S)$  を  $S$  の convex hull,  $x \in \mathbb{P}(V)$  に対し  $S_x = \{\gamma_i \mid x_i \neq 0\}$  とおく. このとき, 次の定理が成り立つ ([14]).

**定理 4.1 (Hilbert-Mumford の判定法).**  $x$  が unstable  $\iff \exists g \in G, 0 \notin \text{Conv}(S_{gx})$ .

$0 \notin \text{Conv}(S)$  であるような  $S$  に対し,  $\beta \in \mathfrak{t}^*$  を原点から一番近い点とする.



上のような  $\beta$  で Weyl chamber  $\mathfrak{t}_+^*$  に入るものだけを考える. この  $\beta$  を使って,  $\mathbb{P}(V)$ , したがって  $V \setminus \{0\}$  の stratification を考えることができる. 以下, これについて述べる. なお,  $\beta$  は  $\mathfrak{t}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  の元であることに注意する. よって, スカラー倍すれば,  $\text{Hom}(T, GL(1))$  の元, つまり  $T$  の指標  $\chi_\beta$  で原始的なものが得られる. これを  $\beta$  と「平行」な指標ということにする. 内積  $(\cdot, \cdot)$  により  $\mathfrak{t}^*$  と  $\mathfrak{t}$  を同一視できる. よって,  $\beta$  に対応する  $\mathfrak{t}$  の点があるが, その点も  $\text{Hom}(GL(1), T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  の元である.  $\chi_\beta$  と同様に,  $\beta$  と「平行」な 1PS  $\lambda_\beta$  で原始的なものがある.

$Z_\beta$  を  $(\beta, \gamma_i) = (\beta, \beta)$  であるような  $i$  に対応する基本ベクトルで張られる部分空間,  $W_\beta$  を  $(\beta, \gamma_i) > (\beta, \beta)$  であるような  $i$  に対応する基本ベクトルで張られる部分空間,  $M_\beta$  を  $\lambda_\beta$  の中心化群とする.  $G_\beta = \{g \in M_\beta \mid \lambda_\beta(g) = 1\}^\circ$  (単位元の連結成分) とすると,  $G_\beta$  は  $\mathbb{P}(Z_\beta)$  に作用する. なお,  $\beta$  は悪い方向なので,  $\beta$  と平行な方向を除かないと安定性を考えることができない.  $Z_\beta^{ss}$  を  $\mathbb{P}(Z_\beta)^{ss}$  の逆像,  $Y_\beta^{ss} = \{(0, x, y) \mid x \in Z_\beta^{ss}, y \in W_\beta\}$  とおく.  $P_\beta$  を  $M_\beta$  を reductive part とする方物部分群とする.

下の定理は Kirwan, Ness, Kempf により証明された定理である ([10], [11], [15], [12]).

**定理 4.2.** (1)  $S_\beta = GY_\beta^{ss} \cong G \times_{P_\beta} Y_\beta^B$ .

(2)  $k$  が完全体なら，この全単射は  $k$  上有理的.

(3)  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V)^{ss} \cup \bigcup_{\beta} S_{\beta}$ .

(2) の有理性は Kempf により証明されたが， $x \in S_{\beta}$  なら， $\beta$  が  $x$  が退化する「一番悪い方向」を与えるので，その方向がガロア群で不変なため，完全体上では  $\lambda_{\beta}$  が基礎体上有理的になるのである. なお，有限体  $\mathbb{F}_p$  は完全体であることに注意する.

ここで例を二つ考えよう.

例 4.3.  $G = \text{GL}(2)$ ,  $V = \text{Sym}^3 k^2$  (2変数3次形式の空間) とする.  $V$  の元を  $x_0u^3 + \dots + x_3v^3$  と表し  $x = (x_0, \dots, x_3)$  を  $V$  の座標にとれば， $t = a(t_1, t_1^{-1})$  の作用は  $tx = (t_1^3x_0, \dots, t_1^{-3}x_3)$  となる. だから， $x_0, \dots, x_3$  の weight はそれぞれ  $3, 1, -1, -3$  である. Weyl chamber はどちらにとってもよいが，ここでは非負の weight に対応する点にとることにする. すると，考えるべき  $\beta$  は  $\beta = 1, 3$  である.

$\beta_1 = 1$  なら， $Y_{\beta_1}^{ss} = \{(y, x, 0, 0) \mid x \neq 0\}$  となり，これは2重根を持つ3次形式に対応する.  $\beta_3 = 3$  なら， $Y_{\beta_3}^{ss} = \{(x, 0, 0, 0) \mid x \neq 0\}$  となり，これは3重根を持つ3次形式に対応する. なお， $\text{Sym}^n k^2$  なら，高々  $[n/2]$  重根まで持つ形式が半安定点である.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \text{ ボレル部分群}$$

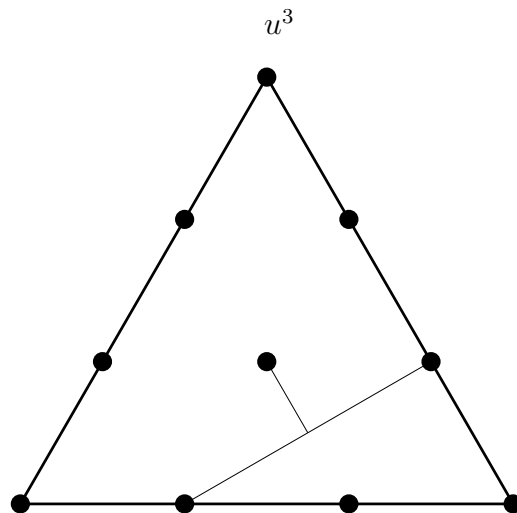
とすると，どちらの場合も  $P_{\beta} = B$  で

$$GY_{\beta_1} = G \times_B Y_{\beta_1},$$

$$GY_{\beta_3} = G \times_B Y_{\beta_3}$$

となる.

例 4.4. 概均質ベクトル空間ではないが， $G = \text{GL}(3)$ ,  $V = \text{Sym}^3 k^3$ ，つまり3変数3次形式の空間を考えてみよう. 3変数を  $u, v, w$  とすると， $V$  の weight の集合は次のような三角形で表される.



$v^3$  $w^3$ 

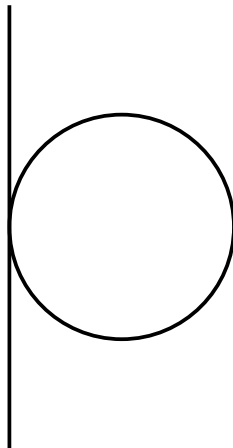
weight は  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$  の点と同一視できる. この集合には  $\mathbb{R}^3$  の内積の制限となる内積がある. Weyl 群は  $a, b, c$  の順序の交換で作用するので, この内積は Weyl 群で不変である. この集合を  $t^*$  とみなす. 例えば  $w^3$  の weight は  $(2, -1, -1)$  と同一視できる. この同一視により  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0, a \leq b \leq c\}$  を Weyl chamber に選ぶ.

$\gamma_1 = (-1, 1, 0), \gamma_2 = (0, -1, 1)$  とおくと,  $\gamma_1, \gamma_2$  はそれぞれ  $v^2w, uw^2$  の weight である.  $S$  の convex hull は前ページの図の  $\gamma_1, \gamma_2$  を結ぶ線分  $\ell$  である.  $\ell$  上の点で原点が一番近い点は  $\beta = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  である. これは Weyl chamber の元である.

この場合,  $Z_\beta$  は  $uw^2, v^2w$  で生成される  $V$  の部分空間,  $W_\beta$  は  $vw^2, w^3$  で生成される  $V$  の部分空間である. つまり  $Z_\beta$  は  $\ell$  上の weight に対応する点で  $W_\beta$  は  $\ell$  より下にある weight に対応する点である.  $\beta$  の座標はすべて異なるので,  $P_\beta$  はボレル部分群である. なお, 安定性はスカラーを除いて考えるので,  $SL(3)$  に関して考えている. よって,  $P_\beta$  の簡約部分は  $T$ , つまり  $SL(3)$  の極大トーラスである.  $\beta$  と直交するのは

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & & \\ & t^2 & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix}$$

である. この元は  $v^2w, uw^2$  にそれぞれ  $t, t^{-3}$  倍で作用する. よって, この  $GL(1)$  により半安定であることと  $v^2w, uw^2$  の係数が両方とも零と異なることは同値である.  $av^2w + buw^2 = w(av^2 + buw)$  であり,  $w = 0$  は 2 次曲線  $av^2 + buw = 0$  の接線である (下図参照).



これは  $W_\beta$  の部分を考えても

$$av^2w + buw^2 + cvw^2 + dw^3 = w(av^2 + buw + cvw + dw^2)$$

となり, 幾何学的意味は変わらない. なお,  $\beta$  の方向がこの元が一番悪い方向に退化する. 対角成分が  $t^{-1}, 1, t$  の元は  $Z_\beta$  に  $t$  倍で作用し,

$$\frac{1}{\sqrt{1+1}} \approx 0.7$$



となるが，方向を少し変えて

$$\begin{pmatrix} t^{-4} & & \\ & t^{-1} & \\ & & t^5 \end{pmatrix}$$

による作用を考えると， $uw^2, v^2w$  の weight は  $t^6, t^3$  であり， $3 < 6$  であることに注目すると，

$$\frac{3}{\sqrt{16+1+25}} \approx 0.46 < 0.7$$

となる．なおこの方向に退化すると，

$$av^2w + buw^2 + cvw^2 + dw^3 \rightarrow av^2w$$

となり，この零点集合は二重直線とそれとは別の直線で幾何学的には2次曲線とそれに接する直線よりは悪く思えるかもしれないが，不変式論的には上の値が大きいほど「悪い」と判断するのである．  $\diamond$

## 5 局所軌道積分

$(G, V)$  を  $\mathbb{Q}_p$  上の既約正則概均質ベクトル空間とする．また， $P(x)$  を相対不変式， $P(gx) = \chi(g)P(x)$  とする． $x \in V_{\mathbb{Q}_p}^{ss}$  に対し， $G_x$  を安定化群とする． $\mathcal{S}(V_{\mathbb{Q}_p})$  を局所的に定数で台がコンパクトな複素数値関数全体のなすベクトル空間， $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{Q}_p})$  とする．このとき，

$$Z_x(\Phi, s) = \int_{G_{\mathbb{Q}_p}/G_{x,p}} |\chi(g)|^s \Phi(gx) dg'_x$$

とおき，局所軌道積分という．ただし， $dg'_x$  は  $G_{\mathbb{Q}_p}/G_{x,p}$  上の左  $G_{\mathbb{Q}_p}$  不変測度である． $dg'_x$  は定数倍を除いて定まるが， $V_{\mathbb{Q}_p}$  には  $\deg P(x) = d$ ,  $\dim V = n$  とするとき，

$$|P(x)|^{-n/d} dx$$

という不変測度があるので，ある意味ではこの不変測度と整合性がある自然な正規化を行うことができる．ここではそういったことはあまり問題にしないので，詳細は割愛する．

大域ゼータ関数は大域的な軌道に関する局所軌道積分のオイラー積の和になる．数論的不変量の密度定理の考察では局所軌道積分を評価できるかどうか問題になる．また，局所軌道積分を明示的に計算することも有用である．

局所軌道積分が明示的に計算されている例は多くない．軌道が一つの概均質ベクトル空間がいくつかあるが，これについては井草 [7] により計算されている．2変数3次形式の空間については Datskowsky–Wright [2], [3]，2変数2次形式の空間については Datskowsky [1] により明示的に計算されている． $n$ 変数2次形式の空間については井草ゼータは伊吹山–斎藤 [6] により計算されたが，軌道ごとには計算されていない．この

場合の局所軌道積分の一樣評価は [17] で与えられている. 局所軌道積分が明示的には計算されていないが一樣評価が証明されている例として  $G = \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$ ,  $V = \mathbb{Q}_p^2 \otimes \mathbb{Q}_p^2 \otimes \mathbb{Q}_p^2$  およびその outer form がある [8], [9], [17].

$G_{\mathbb{Q}_p}/G_{x,\mathbb{Q}_p}$  上の積分をコントロールするためには, 集合  $G_{\mathbb{Q}_p}/G_{x,\mathbb{Q}_p}$  が記述できなければならない. この集合を記述するのに, 群上で記述すると, ベクトル空間上で記述する方法がある. [8] では Datskowsky [1] の方法を一般化して群上でこの集合を記述し, ある意味  $G_x$  と「transversal」な集合を考察することにより, 局所軌道積分の一樣評価が証明された. しかしこの方法は  $G_x$  が代数的トーラスの場合に有効だが, そうでない, 例えば  $n$  変数 2 次形式の空間のように, 安定化群が  $\mathrm{PSO}(Q)$  ( $Q$  は 2 次形式) となるような場合には非常な困難が伴う.

そこで群上ではなく, ベクトル空間上で軌道を記述することを考える.  $\mathbb{Z}_p$  軌道を考えると, 軌道上では  $|P(x)|$  が一定になる. 最終的には局所軌道積分を考えたいので, ベクトル空間上で  $\mathbb{Z}_p$  上の軌道が記述できると便利である. 2 次形式の空間の場合, これはジョルダン分解という形で軌道を区別する形ではないが,  $\mathbb{Z}_p$  軌道が記述されている. 局所軌道積分は

$$\begin{pmatrix} p^{i_1} M_1 & & & \\ & p^{i_2} M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{i_t} M_t \end{pmatrix}$$

という形をした行列の集合については  $M_1, \dots, M_t$  のサイズ  $n_1, \dots, n_t$  と  $i_1, \dots, i_t$  で記述し, 一樣評価可能であり, 実際  $n_1, \dots, n_t, i_1, \dots, i_t$  の 2 次の多項式で評価される.

## 6 $\mathbb{Z}_p$ 軌道の簡単な例

前節で述べたようなことが概均質ベクトル空間の  $\mathbb{Z}_p$  軌道を考える背景にあるのだが, ここでは簡単な例について軌道がどう記述できるかについて述べる.

$\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Q}_p^3$  の場合

$V_0$  を  $p$  を法として半安定点である点全体の集合とする.  $0 \leq n_1 < n_2$  に対し

$$S_1(n_1, n_2) = \{(0, p^{n_1} \star, 0, p^{n_2} \star) \mid \star \in \mathbb{Z}_p^\times\},$$

$0 \leq n_1 < n_2, n_3$  に対し

$$S_2(n_1, n_2, n_3) = \{(p^{n_1} \star, 0, p^{n_2} \star, p^{n_3} \star) \mid \star \in \mathbb{Z}_p^\times\}$$

とおくと簡単な考察で次の命題が成り立つ.

命題 6.1.

$$V_{\mathbb{Q}_p}^{ss} \cap V_{\mathbb{Z}_p} = \cup_n p^n V_0 \cup \cup_{0 \leq n_1 < n_2} G_{\mathbb{Z}_p} S_1(n_1, n_2) \cup \cup_{n_1 < n_2, n_3} G_{\mathbb{Z}_p} S_2(n_1, n_2, n_3).$$

ここで  $S_1(n_1, n_2)$  は  $\beta = 1$  に,  $S_2(n_1, n_2, n_3)$  は  $\beta = 3$  に対応する.

$$V = \mathbb{Q}_p^2 \otimes \mathbb{Q}_p^2 \otimes \mathbb{Q}_p^2 \text{ の場合}$$

$V = M_2(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p^2$  とみなす. ただし, 三つの  $\mathbb{Q}_p^2$  のうちどれを選ぶかにより 3 通りの同一視のしかたがある.

$\text{Sym}^2 \mathbb{Q}_p^3$  の場合と同様に  $V_0$  を  $p$  を法として半安定点である点全体の集合とする.  $0 \leq n_1 < n_2$  に対し  $S_1(n_1, n_2)$  を

$$\left( \left( \begin{array}{cc} 0 & p^{n_1 \star} \\ p^{n_1 \star} & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} p^{n_1 \star} & 0 \\ 0 & p^{n_2 \star} \end{array} \right) \right)$$

という形の点の集合とする. ただし  $\star$  は  $\mathbb{Z}_p^\times$  の元を表す.

$0 \leq n_1 < n_2, \dots, n_5$  に対し,  $S_2(n_1, \dots, n_5)$  は

$$\left( \left( \begin{array}{cc} p^{n_1 \star} & 0 \\ 0 & p^{n_2 \star} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & p^{n_3 \star} \\ p^{n_4 \star} & p^{n_5 \star} \end{array} \right) \right)$$

という形の点の集合で半安定点であるものの集合とする. ただし  $\star$  は  $\mathbb{Z}_p^\times$  の元,  $\star$  は  $\mathbb{Z}_p$  の元を表す.

$2 \times 2$  行列  $A$  に対し,  ${}^t A$  をその随伴行列とする. つまり,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である.

$0 \leq n_1 < n_2$  に対し  $S_{3,1,n_1,n_2}$  を  $(p^{n_1} A, p^{n_2} B)$  という形の半安定点で  $\det A, \det B \in \mathbb{Z}_p^\times, \text{tr}(A^t B) = 0$  であるもの全体の集合とする. また,  $0 \leq n_1 < n_2 < n_3$  に対し  $S_{4,1,n_1,n_2,n_3}$  を

$$\left( p^{n_1} A, \left( \begin{array}{cc} p^{n_2 \star} & 0 \\ 0 & p^{n_3 \star} \end{array} \right) \right), \text{tr} \left( A^t \left( \begin{array}{cc} p^{n_2 \star} & 0 \\ 0 & p^{n_3 \star} \end{array} \right) \right) = 0$$

という形の半安定点で  $\det A \in \mathbb{Z}_p^\times$  であるものの集合とする.  $\mathbb{Q}_p^2 \otimes \mathbb{Q}_p^2 \otimes \mathbb{Q}_p^2 \cong M(2) \otimes \mathbb{Q}_p^2$  の同一視は 3 通りあるので, それにより  $S_{3,j,n_1,n_2}, S_{4,j,n_1,n_2,n_3}$  ( $j = 2, 3$ ) も同様に定義する.

やはり convex hull の考察により次の命題が成り立つ.

命題 6.2.

$$V_{\mathbb{Q}_p}^{ss} \cap V_{\mathbb{Z}_p} = \cup_n p^n V_0 \cup \cup_{n_1, n_2} G_{\mathbb{Z}_p} S_1(n_1, n_2) \cup \cup_{n_1, \dots, n_5} G_{\mathbb{Z}_p} S_2(n_1, \dots, n_5) \\ \cup \cup_{j, n_1, n_2} G_{\mathbb{Z}_p} S_{3,j,n_1,n_2} \cup \cup_{j, n_1, n_2, n_3} G_{\mathbb{Z}_p} S_{4,j,n_1,n_2,n_3}$$

ただし, 安定化群がどうなるかの考察もされなければならない. この他の概均質ベクトル空間も考察中である.

## 参考文献

- [1] B. Datskovsky. A mean value theorem for class numbers of quadratic extensions. *Contemporary Mathematics*, 143:179–242, 1993.
- [2] B. Datskovsky and D.J. Wright. The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms II: Local theory. *J. Reine Angew. Math.*, 367:27–75, 1986.
- [3] B. Datskovsky and D.J. Wright. Density of discriminants of cubic extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 386:116–138, 1988.
- [4] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized tamagawa numbers of orthogonal groups I. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):545–607, 2008.
- [5] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups. II. *Amer. J. Math.*, 131(3):683–730, 2009.
- [6] T. Ibukiyama and H. Saito. On zeta functions associated to symmetric matrices. I. An explicit form of zeta functions. *Amer. J. Math.*, 117(5):1097–1155, 1995.
- [7] J. Igusa. Local zeta functions of certain prehomogeneous vector spaces. *Amer. J. Math.*, 114:251–296, 1992.
- [8] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields. II. *J. Math. Soc. Japan*, 55(3):739–764, 2003.
- [9] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields. III. *J. Number Theory*, 99(1):185–218, 2003.
- [10] G. Kempf. Instability in invariant theory. *Ann. of Math.*, 108:299–316, 1978.
- [11] G. Kempf and L. Ness. The length of vectors in representation spaces. In *Algebraic Geometry, Proceedings, Copenhagen*, volume 732 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 233–242. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- [12] F.C. Kirwan. *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*. Mathematical Notes. Princeton University Press, 1984.
- [13] Y. Kitaoka. *Arithmetic of Quadratic forms*. Cambridge University Press, 1993.
- [14] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3rd edition, 1994.

- [15] L. Ness. A stratification of the null cone via the moment map. *Amer. J. Math.*, 106:1281–1329, 1984.
- [16] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 65:1–155, 1977.
- [17] A. Yukié. On the density of unnormalized tamagawa numbers of orthogonal groups III. preprint.