

Generalized kashaev invariant

村上 順

早稲田大学 基幹理工学部

0. 序

1980年代に量子展開環,あるいは量子群と呼ばれる,リー環の普遍包絡環の q -変形が神保やDrinfeldにより構成され,同じ頃にJonesによりジョーンズ多項式と呼ばれる全く新しい結び目の多項式不変量が構成された.Jonesは,作用素環の II_1 型のfactorでのトレースが,組み紐群を經由することでほぼ結び目の不変量となっていることを発見したのであるが,すぐに,この不変量が,リー環 sl_2 に対応する量子展開環である $U_q(sl_2)$ の量子 R -行列を用いることで定義できることがわかり,さらに,Drinfeldの普遍 R -行列の理論を使うことで数多くの結び目の量子不変量が構成された.

量子不変量は, R -行列を用いた組紐群の表現の指標の1次結合で表され,代数的には意味がよくわかるものであるが,結び目の幾何的性質との直接的な関係はよくわかっていなかった.ところが,1990年代半ばに,Kashaevが量子 dilog 関数の研究から R -行列を構成し,この R -行列から構成される結び目の不変量(カシャエフ不変量と呼ぶ)と結び目補空間の双曲体積とが関係することを見いだした. $\langle K \rangle_N$ を結び目 K のカシャエフ不変量とし, $\text{Vol}(S^3 \setminus K)$ を K の補空間の双曲体積とすると,次が成り立つと予想したのである.

$$\text{Kashaev の予想} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi \log |\langle K \rangle_N|}{N} = \text{Vol}(S^3 \setminus K)$$

このKashaevの不変量 $\langle K \rangle_N$ は,村上斉と著者により,量子展開環 $U_q(sl_2)$ の N 次元既約表現に対応するカラードジョーンズ多項式で $q = e^{\pi i/N}$ としたものと等しいことが示され,このことから,ジョーンズ多項式と結び目補空間の双曲構造とに関係があることがわかった.ここでは,このカラードジョーンズ多項式の特異化に対応しているカシャエフ不変量を,向き付け可能な一般の3次元多様体の中にある結び目に拡張する.

カシャエフ不変量がカラードジョーンズ不変量で q を1の冪根にしたものであり,有限次元のホップ代数である小さな量子群 (small quantum group) と呼ばれるものの表現から構成されている.小さな量子群から構成される不変量には,これ以外にも永友と著者による結び目の対数不変量 (logarithmic invariant) や,Henningsによる3次元多様体のヘニングス不変量が知られている.この2種類の不変量を組み合わせることで,3次元多様体中の結び目の不変量を構成し,カシャエフ不変量を一般化し,補空間の双曲体積との関係を調べる.また,小さな量子群の表現に対応する新たな量子 $6j$ 記号を導入し,その表現論的意味を探る.

1 小さな量子群とその表現

リー環 sl_2 に対応する量子展開環 (量子群) $U_q(sl_2)$ は次の生成元と関係式で定義される多元環にホップ代数の構造を入れたものである.

$$U_q(sl_2) = \left\langle K, K^{-1}, E, F \mid K K^{-1} = K^{-1} K = 1, \right. \\ \left. K E K^{-1} = q^2 E, K F K = q^{-2} F, E F - F E = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \right\rangle$$

また, ホップ代数の構造を与える余積 Δ , 余単位射 ϵ , 対合射 S は次で与えられるものとする.

$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}, \\ \Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \quad \Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, \\ \epsilon(K) = \epsilon(K^{-1}) = 1, \quad \epsilon(E) = \epsilon(F) = 0, \\ S(K) = K^{-1}, \quad S(E) = -E K^{-1}, \quad S(F) = -K F.$$

パラメータ q が不定元, あるいは一般の数であるときは, $U_q(sl_2)$ の表現はリー環の普遍包絡環の表現論に似たものになる. 例えば, リー環 sl_2 の有限次元既約表現に対応する同じ次元の $U_q(sl_2)$ の既約表現がある. ところが, このパラメータを 1 の冪根とすると $U_q(sl_2)$ の表現はリー環の表現論とは異なってくる. パラメータ q を 1 の N 乗根に特殊化すると, N より次元の大きい既約表現が, 既約表現ではなくなるのである.

ここでは, パラメータ q を 1 の N 乗根のときに $U_q(sl_2)$ にさらに次の関係式を追加したものを小さな量子群 と呼び, $\bar{U}_q(sl_2)$ と書く.

$$\bar{U}_q(sl_2) = U_q(sl_2) / (K^{2N} = 1, E^N = F^N = 0)$$

また,

$$b_{jkl} = E^j F^k K^l \quad (0 \leq j, k \leq N-1, 0 \leq l \leq 2N-1) \quad (1)$$

が $\bar{U}_q(sl_2)$ の基底となっている.

この小さな量子群の既約表現と, 射影的加群となっている直既約表現 (indecomposable representation) は次のように与えられる. ただし, $[a] = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$ とする.

既約表現 χ_s^\pm ($x = 0, 1, \dots, N$)

基底: $\{v_0^\pm, v_1^\pm, \dots, v_{s-1}^\pm\}$

作用: $K v_j^\pm = \pm q^{s-2j-1} v_j^\pm, E v_j^\pm = \pm [s-j-1][j+1] v_{j-1}^\pm, F v_j^\pm = v_{j+1}^\pm.$

射影的加群 P_s^+ ($s = 1, 2, \dots, N-1$)

基底： $\{x_j^+, y_j^+\}_{0 \leq j \leq N-s-1} \cup \{a_n^+, b_n^+\}_{0 \leq n \leq s-1}$

作用：

$$\begin{aligned}
K x_j^+ &= q^{2N-s-1-2j} x_j^+, & K y_j^+ &= q^{-s-1-2j} y_j^+, & 0 \leq j \leq N-s-1, \\
K a_n^+ &= q^{s-1-2n} a_n^+, & K b_n^+ &= q^{s-1-2n} b_n^+, & 0 \leq n \leq s-1, \\
E x_j^+ &= -[j][N-s-j] x_{j-1}^+, & & & 0 \leq j \leq N-s-1 \quad (\text{with } x_{-1}^+ = 0), \\
E y_j^+ &= \begin{cases} -[j][N-s-j] y_{j-1}^+, & 1 \leq j \leq N-s-1, \\ a_{s-1}^+, & j = 0, \end{cases} \\
E a_n^+ &= [n][s-n] a_{n-1}^+, & & & 0 \leq n \leq s-1 \quad (\text{with } a_{-1}^+ = 0), \\
E b_n^+ &= \begin{cases} [n][s-n] b_{n-1}^+ + a_{n-1}^+, & 1 \leq n \leq s-1, \\ x_{N-s-1}^+, & n = 0, \end{cases} \\
F x_j^+ &= \begin{cases} x_{j+1}^+, & 0 \leq j \leq N-s-2, \\ a_0^{+, \beta}, & j = N-s-1, \end{cases} \\
F y_j^+ &= y_{j+1}^+, & & & 0 \leq j \leq N-s-2 \quad (\text{with } y_{N-s}^+ = 0), \\
F a_n^+ &= a_{n+1}^+, & & & 0 \leq n \leq s-1 \quad (\text{with } a_s^+ = 0), \\
F b_n^+ &= \begin{cases} b_{n+1}^+, & 0 \leq n \leq s-2, \\ y_0^+, & n = s-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

射影的加群 P_s^- ($s = 1, 2, \dots, N-1$)

基底： $\{x_j^-, y_j^-\}_{0 \leq j \leq N-s-1} \cup \{a_n^-, b_n^-\}_{0 \leq n \leq s-1}$

作用：

$$\begin{aligned}
K x_j^- &= q^{-s-1-2j} x_j^-, & K y_j^- &= q^{-s-1-2j} y_j^-, & 0 \leq j \leq N-s-1, \\
K a_n^- &= t^{s-1-2n} a_n^-, & K b_n^- &= t^{-2N+s-1-2n} b_n^-, & 0 \leq n \leq s-1, \\
E x_j^- &= -[j][N-s-j] x_{j-1}^-, & & & 0 \leq j \leq N-s-1 \quad (\text{with } x_{-1}^- = 0), \\
E y_j^- &= \begin{cases} -[j][N-s-j] y_{j-1}^- + x_{j-1}^-, & 1 \leq j \leq N-s-1, \\ a_{s-1}^-, & j = 0, \end{cases} \\
E a_n^- &= [n][s-n] a_{n-1}^-, & & & 0 \leq n \leq s-1 \quad (\text{with } a_{-1}^- = 0), \\
E b_n^- &= \begin{cases} [n][s-n] b_{n-1}^-, & 1 \leq n \leq s-1, \\ x_{N-s-1}^-, & n = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F x_j^- &= x_{j+1}^-, & 0 \leq j \leq N-s-2 & \quad (\text{with } x_{N-s}^- = 0), \\
F y_j^- &= \begin{cases} y_{j+1}^-, & 0 \leq j \leq N-s-2, \\ b_0^-, & j = N-s-1, \end{cases} & F a_n^- &= \begin{cases} a_{n+1}^-, & 0 \leq n \leq s-2, \\ x_0^-, & n = s-1. \end{cases} \\
F b_n^- &= b_{n+1}^-, & 0 \leq n \leq s-1 & \quad (\text{with } b_s^- = 0).
\end{aligned}$$

このとき, P_s^\pm は次のような構造になっている.

$$\begin{array}{ccc}
& & \chi_s^\pm & & \\
& \swarrow & & \searrow & \\
\chi_{N-s}^\mp & & & & \chi_{N-s}^\mp \\
& \searrow & & \swarrow & \\
& & \chi_s^\pm & &
\end{array} \quad (2)$$

2 中心と対称線形関数

小さな量子群 $\overline{U}_q(sl_2)$ の正則表現が P_s^\pm と χ_n^\pm の直和になることから, $\overline{U}_q(sl_2)$ の中心 \mathcal{Z} がどのような元からなるかがわかる. まず P_s^+ と P_{N-s}^- 上で単位元となり, P_t^\pm ($t \neq s$) や χ_N^\pm 上では 0 で作用する e_s ($1 \leq s \leq N$), χ_N^+ 上で単位元でその他に対しては 0 となる e_N , χ_N^- 上で単位元でその他に対しては 0 となる e_0 の $N+1$ 個の中心冪等元と, P_s^+ で (2) の上の χ_s^+ をそのまま下の χ_s^+ につし, その他の表現では 0 となる w_s^+ ($1 \leq s \leq N-1$), それに P_s^- で (2) の上の χ_s^- をそのまま下の χ_s^- につし, その他の表現では 0 となる w_s^- ($1 \leq s \leq N-1$) の $2N-2$ 個の冪零元をあわせた $3N-1$ 個の元

$$e_0, \dots, e_N, w_1^\pm, \dots, w_{N-1}^\pm \quad (3)$$

により \mathcal{Z} が張られている.

また, $\overline{U}_q(sl_2)$ の正則表現の様子から, $\overline{U}_q(sl_2)$ 上の対称線形関数が次のものからなるのがわかる. ここで, 対称線形関数とは, $\overline{U}_q(sl_2)$ から \mathbb{C} への線形関数で, 2つの $\overline{U}_q(sl_2)$ の元 x, y に対し, xy の値と yx の値が同じものであり, [8] では pseudo-trace と呼ばれているものである. このような関数として, まず既約表現 χ_s^\pm のトレース T_s^\pm ($1 \leq s \leq N$) があげられる. また, P_s^+ の (2) の上の χ_s^+ を下の χ_s^- につすブロックの部分のトレースと P_s^- の (2) の上の χ_s^- を下の χ_s^- につすブロックの部分のトレースの和も対称線形関数となる. これを G_s と書く.

一方, $\overline{U}_q(sl_2)$ は有限次元ホップ代数であり, 右積分と呼ばれる次の性質を持つ $\overline{U}_q(sl_2)$ 上の関数 μ が存在する.

$$(\mu \otimes 1)\Delta(x) = \mu(x)1 \quad (x \in \overline{U}_q(sl_2))$$

また, (1) での基底を用いて $x = \sum c_{jkl} b_{jkl}$ と表したとき, $\mu(x) = c_{N-1, N-1, N-1}$ となる. このとき,

$$\phi(x) = \mu(K^{N-1} x)$$

とすると, ϕ は対称線形関数となり, T_s^\pm や G_s の 1 次結合として次のように表される.

$$\phi(x) = \alpha_0 T_N^-(x) + \alpha_N T_N^+(x) + \sum_1^N \alpha_s (T_s^+(x) + T_s^-(x)) + \sum_1^{N-1} \beta_s G_s(x)$$

ϕ の係数 α_s, β_s は [2] により次のように与えられている.

$$\alpha_0 = -\frac{1}{N\sqrt{N}}, \quad \alpha_s = \frac{(-1)^{s-1} (q^s + q^{-s})}{N\sqrt{2N}}, \quad \alpha_N = \frac{(-1)^N}{N\sqrt{2N}}, \quad \beta_s = \frac{(-1)^{s-1} [s]^2}{N\sqrt{2N}}$$

3 ヘニングス不変量

3次元多様体の不変量を定義するために, まず枠付き絡み目の普遍不変量 [7], [12] を定義する. 枠付き絡み目とは, 絡み目をなす紐が, 表裏のあるリボンのようなものでできているとして, リボンのねじれ方の違うものは, 異なる絡み目とするものである. ここでは, 図に書いた絡み目は, その図での線をそのまま幅があるように考えることで, 枠付き絡み目を図示する. 不変量の導入のため, R 行列 R を定義する. k を $k^2 = K$ とするものとし, $R \in \overline{U}_q(sl_2) \otimes \overline{U}_q(sl_2)$ を次で定める.

$$R = \frac{1}{4N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i,j=0}^{4N-1} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{m(m-1)/2 + m(n-j) - nj/2} e^m k^n \otimes f^m k^j$$

そして, 結び目を組み紐であらわして, その各交点と極大極小点に対して, 次の図のように $\overline{U}_q(sl_2)$ の元を対応させる. $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_r$ を L_i をその成分とする r 成分の結び目とする. L の

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \longrightarrow & \sum_j a_j \otimes b_j, & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \longrightarrow & \sum_j b'_j \otimes a'_j, \end{array}$$

但し $R = \sum_j a_j \otimes b_j, \overline{R}^{-1} = a'_j \otimes b'_j$

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} & \longrightarrow & K^{1-N}, & \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \bullet \end{array} & \longrightarrow & 1, & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} & \longrightarrow & K^{N-1}, & \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \bullet \end{array} & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

図 1: 交点と極大極小点

各成分に始点を定め, そこから結び目の向きを逆向きにたどるようにして紐上に振られた $\overline{U}_q(sl_2)$ の元を見ていってそれらの積をとったものを考える. ここで, j は成分の番号である. これによ

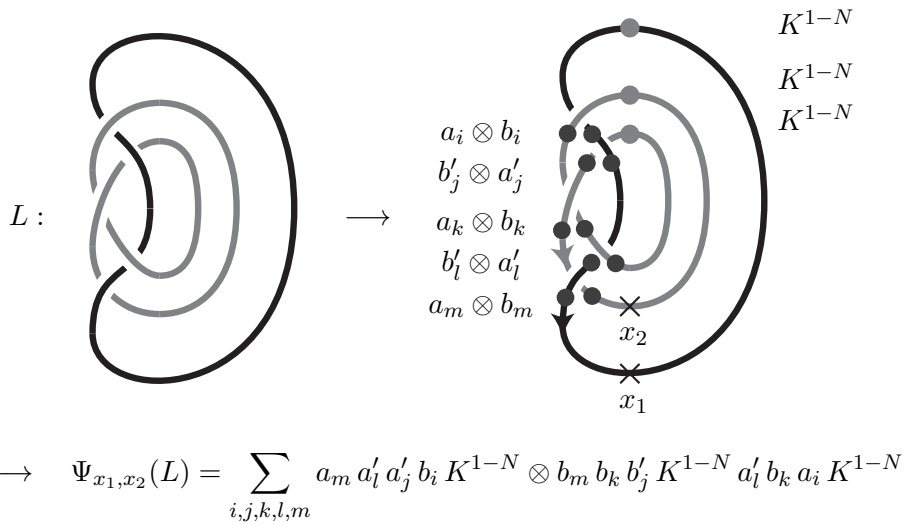


図 2: L の普遍不変量

り, L から $\overline{U}_q(sl_2)^{\otimes r}$ の元が定まる. これを $\psi_{x_1, \dots, x_r}(L)$ とする. 具体的には, 次の図のようになる. $\Psi_{x_1, \dots, x_r}(L)$ は x_1, \dots, x_r によるが, $A = \overline{U}_q(sl_2) / [\overline{U}_q(sl_2), \overline{U}_q(sl_2)]$ とすると, $\Psi_{x_1, \dots, x_r}(L)$ の $A^{\otimes r}$ での像は始点 x_1, \dots, x_r の取り方によらず, L の不変量となる. $\Psi_{x_1, \dots, x_r}(L)$ の $A^{\otimes r}$ での像を $\overline{\Psi}(L)$ と書き, L の 普遍不変量 と呼ぶ.

さらに, 対称線形関数が A 上の関数であることから, f_1, \dots, f_r を対称線形関数とすると, $(f_1 \otimes \dots \otimes f_r)(\overline{\Psi}(L))$ は複素数に値をとる不変量となる. これは [4] で定義されたものであり, ここでは 絡み目のカラードヘニングス不変量 と呼ぶ.

枠付き結び目の不変量から 3次元多様体の不変量を構成するには, 枠付き結び目の間のカービー変型と呼ばれる図 3 の 2 種類の变型で不変となる不変量を構成すればよい. カラードヘニングス不変量において, $f_1 = \dots = f_r = \phi$ とすると, 枠付き絡み目のハンドルスライドで不変となり, $(\phi \otimes \dots \otimes \phi)(\overline{\Psi}(L))$ は簡単な正規化を行うことで, L の手術と呼ばれる操作で得られる 3次元多様体の不変量となる. これが ヘニングス不変量 である.

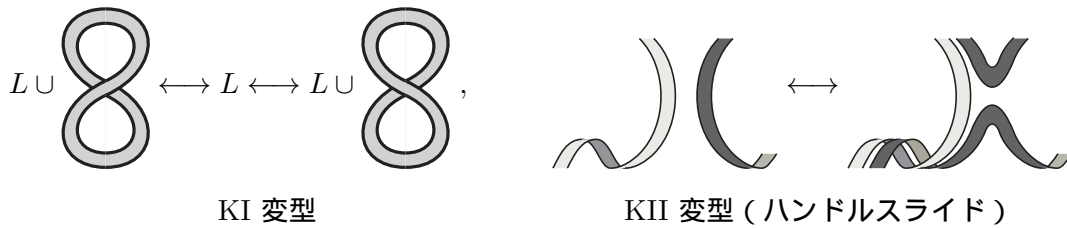


図 3: カービー変型

4 結び目の対数不変量

対数不変量とは, [11] で定義された成分が1つの結び目の不変量である. 結び目 L に対し, L を1点で切り開いてできるタングルを T_L とする. このタングルに対して, 結び目と同じように普遍不変量が定義される. 交点や極大極小点に対応する $\bar{U}_q(sl_2)$ の元を同じように書けていくのである. これにより, $\bar{U}_q(sl_2)$ の元 $\Psi(T_L)$ が定まるが, これは $\bar{U}_q(sl_2)$ の中心 \mathcal{Z} の元となる. $\Psi(T_L)$ を (3) の基底の1次結合として次のように書く.

$$\Psi(T_L) = \sum_{s=0}^N a_s(T_L) e_s + \sum_{s=1}^{N-1} (b_s^+(T_L) w_s^+ + b_s^-(T_L) w_s^-)$$

成分が1つの結び目に対しては, T_L は L を切り開く場所によらずすべてイソトピック, すなわち連続的な変形で移り合うタングルになるため, $a_s(T_L), b_s^\pm(T_L)$ は L の不変量となる. $a_s(T_L)$ は L のカラードジョーンズ不変量となるが, $b_s^\pm(T_L)$ は対数型共型場理論と関係する不変量なので, 対数不変量と呼んだ.

注意 対称線形関数 T_s^\pm, G_s により

$$\begin{aligned} s a_s(T_L) &= T_s^+(\Psi(T_L)) & (1 \leq s \leq N-1), \\ (N-s) a_s(T_L) &= T_s^-(\Psi(T_L)) & (1 \leq s \leq N-1), \\ s b_s^+(T_L) + (N-1) b_{N-s}^-(T_L) &= G_s(\Psi(T_L)) & (1 \leq s \leq N-1) \end{aligned}$$

という関係があるが, $a_0(T_L), a_N(T_L), b_s^\pm(T_L)$ は対称線形関数で表すことはできない.

さらに, この対数不変量を3次元多様体中の結び目の不変量に拡張してみよう. M を S^3 中の枠付き絡み目 L に沿った手術で得られる3次元多様体とし, \tilde{K} を M 中の結び目とする. また, \bar{K} を \tilde{K} に対応する S^3 での結び目とする. \bar{K} と L を合わせた絡み目 $\bar{K} \cup L$ に対し, これを \bar{K} の1点で切り開いたタングルを $T_{\bar{K} \cup L}$ とする. $T_{\bar{K} \cup L}$ の普遍不変量に対し, L の成分については ϕ を対応させることにより, $\bar{U}_q(sl_2)$ の中心 \mathcal{Z} の元 $z_{\bar{K} \cup L}$ が定まる. これを \mathcal{Z} の基底の1次結合として

$$z_{\bar{K} \cup L} = \sum_{s=0}^N a_s(T_{\bar{K} \cup L}) e_s + \sum_{s=1}^{N-1} (b_s^+(T_{\bar{K} \cup L}) w_s^+ + b_s^-(T_{\bar{K} \cup L}) w_s^-)$$

と表す.

定理 1. $\bar{K} \cup L$ に対応する中心 $z_{\bar{K} \cup L}$ は M 中の結び目 \tilde{K} の不変量であり, これより $a_s(T_{\bar{K} \cup L}), b_s^\pm(T_{\bar{K} \cup L})$ も \tilde{K} の不変量となる.

注意 上の注意と同様, $a_0(T_L), a_N(T_L), b_s^\pm(T_L)$ は対称線形関数で表すことはできない.



図 4: ホワイトヘッド絡み目

以後 $a_s(T_{\tilde{K}UL}), b_s(T_{\tilde{K}UL})$ を $a_s(\tilde{K}), b_s(\tilde{K})$ と書く． $a_N(\tilde{K})$ は, L に対応する 3 次元多様体が S^3 のときはカシャエフ不変量と等しく, $a_N(\tilde{K})$ は 3 次元多様体中の結び目に対するカシャエフ不変量の一般化となっているので, これを **generalized Kashaev invariant** と呼ぶ．

5 双曲体積との関係

カシャエフ不変量が結び目補空間の双曲体積と関係することから, 一般化されたカシャエフ不変量 $a_N(\tilde{K})$ も \tilde{K} の M における補空間の双曲体積と関係することが期待できる．そこで, 図 4 のホワイトヘッド絡み目の一つの成分を手術して得られるレンズ空間中の結び目について, 次の予想が成り立つかどうかを数値計算で調べてみた．

最初の予想 向き付け可能な 3 次元多様体 M 中の結び目 \tilde{K} に対し, \tilde{K} の補空間 $M \setminus \tilde{K}$ が双曲構造を持つとする．このとき, 次が成り立つ．

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi \log a_N(\tilde{K})}{N} = \text{Vol}(M \setminus \tilde{K}) + \sqrt{-1} \text{CM}(M \setminus \tilde{K})$$

不変量 $a_N(\tilde{K})$ そのものについては, この予想が成り立たない例が多くあるので, $a_N(\tilde{K})$ の定義を少しかえて $SO(3)$ バージョンと呼ばれる $a_N^{SO(3)}(\tilde{K})$ を用いて予想を言い換える．

改良された予想 向き付け可能な 3 次元多様体 M 中の結び目 \tilde{K} に対し, \tilde{K} の補空間 $M \setminus \tilde{K}$ が双曲構造を持つとする．このとき, 次が成り立つ．

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi \log a_N^{SO(3)}(\tilde{K})}{N} = \text{Vol}(M \setminus \tilde{K}) + \sqrt{-1} \text{CM}(M \setminus \tilde{K})$$

ホワイトヘッド絡み目の一つの成分の枠指数を f とし, f が -20 から 20 までこの改良された予想を確かめてみたところ, $f \neq 2 \pmod{4}$ のときには成り立つようである．例えば, $f = -3$ の

ときは次のようになっている .

$$\begin{aligned} \frac{2\pi \log a_N^{SO(3)}(\tilde{K})}{N} & \quad N = 83 & \quad 3.21855 + 4.19927\sqrt{-1} \\ & \quad N = 123 & \quad 3.14342 + 4.20327\sqrt{-1} \\ & \quad N = 245 & \quad 3.09260 + 4.20508\sqrt{-1} \\ \text{Vol}(M \setminus \tilde{K}) + \sqrt{-1} \text{CS}(M \setminus \tilde{K}) & = 2.98912 + 4.20662\sqrt{-1} \end{aligned}$$

6 中くらいの量子群と新たな量子 $6j$ 記号

対数不変量は, [1] や [10] でのカラードアレキサンダー不変量を用いて表すことができる . カラードアレキサンダー不変量とは, sl_2 に対応する 中くらいの量子群 $\tilde{U}_q(sl_2)$ の R 行列から構成された不変量である . $\tilde{U}_q(sl_2)$ は次で定義される .

$$\tilde{U}_q(sl_2) = U_q(sl_2)/(E^N = F^N = 0)$$

$U_q(sl_2)$ の普遍 R 行列の像として定義される $\tilde{U}_q(sl_2)$ の R 行列がある . また, $U_q(sl_2)$ には整でないウェイト λ (複素数) を最高ウェイトとする N 次元の有限次元表現を V_λ がある . この表現は, V_λ の基底を e_0, e_1, \dots, e_{N-1} とするとき,

$$K e_j = q^{\lambda-2j} e_j, \quad E e_j = [\lambda - j][j] e_{j-1}, \quad F e_j = e_{j+1}$$

で与えられる . このタイプの表現を絡み目の各成分に対応させ, $U_q(sl_2)$ の普遍 R 行列を各交点に対応させることでカラードアレキサンダー不変量 $\Phi_\lambda(L)$ が構成されている . カラードアレキサンダー不変量は [1] で最初に定義され, 普遍 R 行列との関係が [10] で明らかにされている . カラードアレキサンダー不変量を用いて, $b_s^\pm(L)$ を次のように表すことができる .

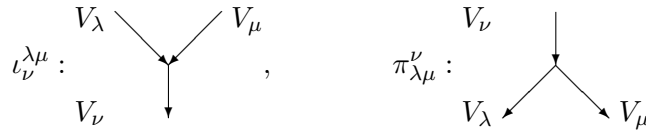
$$\begin{aligned} b_s^+(L) &= \lim_{\lambda \rightarrow s} \frac{N}{\sqrt{-1}^N \sin \frac{s\pi}{N}} (\Phi_{2N-\lambda-1}(L) + \Phi_{\lambda-1}(L)), \\ b_s^-(L) &= - \lim_{\lambda \rightarrow s} \frac{N}{\sqrt{-1}^N \sin \frac{s\pi}{N}} (\Phi_{\lambda-1}(L) + \Phi_{-\lambda-1}(L)) \end{aligned}$$

小さな量子群 $\bar{U}_q(sl_2)$ の表現と双曲体積との関係は, 量子 $6j$ 記号からも知ることができる . $\bar{U}_q(sl_2)$ の表現のテンソル積の分解法則は難しいので, ここでは, まず中くらいの量子群の整でない最高ウェイトを持つ既約表現で考え, そのウェイトを整にしたときの極限として小さな量子群

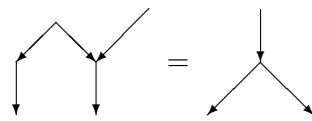
に対応する量子 $6j$ 記号を導入する．まず，整でない最高ウェイトを持つ既約表現 V_λ, V_μ のテンソル積は， $\lambda + \mu$ が整でないとき，次のように分解する．

$$V_\lambda \otimes V_\mu = V_{\lambda+\mu} \oplus V_{\lambda+\mu-2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda+\mu-2N+2} \quad (4)$$

この分解に対応する包含写像 $\iota_\nu^{\lambda\mu} : V_\nu \rightarrow V_\lambda \otimes V_\mu$ と，これに対応する射影 $\pi_{\lambda\mu}^\nu : V_\lambda \otimes V_\mu \rightarrow V_\nu$ を次の図で表す．



さらに， π と ι は次の関係を満たすとする．



これにより， π は ι から定まる．さらに，向きのついた辺と3価の頂点からなる空間グラフに対し，各頂点でテンソル積の分解則が成り立つよう各辺に整でないウェイトを対応させ，このグラフの平面上への射影図に対し，頂点に ι または π を対応させ，交点に R 行列を対応させることで，空間グラフの不変量が構成される．なお，辺の向きが逆になるところでは双対表現が対応している． ι は，スカラー倍を除いて一意に定義されているが，図6にあるような形のグラフの値が常に1になるよう，このスカラーを定めることができる．このときに，図5にあるような四面体の辺からなるグラフの各辺に整でないウェイト a, b, c, d, e, f を対応させたときのグラフの不変量を

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ d & c & f \end{matrix} \right\}_N$$

と書き，中くらいの量子群の量子 $6j$ 記号と呼ぶことにする．リー環 sl_2 については，このような $6j$ 記号が Racah-Wigner 係数として知られていたが，Kirillov-Reshetikhin により，量子群 $U_q(sl_2)$ に対応する量子 $6j$ 記号が [5] で求められたが，今ここで定義した量子 $6j$ 記号は [5] のものとは異なる新しいものである．これについて次が成り立つ．

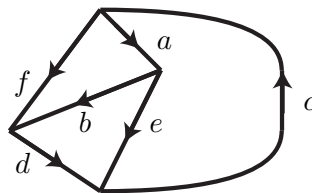


図 5: 四面体に対応するグラフ



図 6: 型のグラフ

定理 2. [3] パラメータ a, b, c, d, e, f を整数に特殊化しても中くらいの量子群の量子 $6j$ 記号 $\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}_N$ は well-defined である. また, パラメータがすべて 1 以上 $2N - 2$ 以下のとき,

$(a, b, e), (a, c, f), (d, b, f), (c, d, e)$ が次の条件を満たすときに限り $\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}_N$ は 0 でない値をとる.

$$a + b + c \text{ が偶数}, \quad 2N - 2 < a + b + c < 4N - 4, \quad |a - b| < c < a + b \quad (5)$$

ちなみに [5] での量子 $6j$ 記号では, $a + b + c$ の範囲が $0 < a + b + c < 2N - 2$ であり, ここでの範囲とは異なっている. さらに, 次が成り立つ.

定理 3. [3] $a_\infty, b_\infty, \dots, f_\infty$ を $0 < a_\infty, b_\infty, \dots, f_\infty < 1$ なる実数とし, a_N, b_N, \dots, f_N を $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N/N = a_\infty, \lim_{N \rightarrow \infty} b_N/N = b_\infty, \dots, \lim_{N \rightarrow \infty} f_N/N = f_\infty$ となる正の整数の数列とする. T を, 辺における二面角が $\pi(1 - a_\infty), \pi(1 - b_\infty), \dots, \pi(1 - f_\infty)$ である双曲四面体とするとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2N} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}_N \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{e} \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{f} \end{Bmatrix}_N = \text{Vol}(T)$$

ただし, $\bar{a} = 2N - a - 2$ である.

以上の 2 つの定理から, 次のように考えられる. 小さな量子群に対しては, 既約表現, 射影的な直既約表現を含む多くの直既約表現が存在する. また, これらのテンソル積によってできる表現の圏の構造は [13] や [6] で調べられているようになりかなり複雑である. 一方, 中くらいの量子群の整でない表現のテンソル積の分解は, 多くの場合は (4) で与えられる単純なものである. 小さな量子群の表現で, 双曲体積に関するものを見るためには, 量子 $6j$ 記号が 0 でないところを見ればよいが, 中くらいの量子群に対応する量子 $6j$ 記号のウェイトを整数にしたときの 0 にならないための条件 (5) は, 整ウェイトを最高ウェイトとする小さな量子群の表現の双曲体積と関連するテンソル積の分解則を与えていると考えられる. これは, 小さな量子群の表現のなす圏の中の「よい」部分を取り出しているように思えるのであるが, 表現論からのもっと具体的な解釈を与えることは今後の課題である.

参考文献

- [1] Y. Akutsu, T. Deguchi and T. Ohtsuki: *Invariants of colored links*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 161–184.
- [2] Y. Arike: *A construction of symmetric linear functions on the restricted quantum group $\bar{U}_q(sl_2)$* , Osaka J. Math. **47** (2010), 535–557.
- [3] F. Costantino and J. Murakami, *On $SL(2, \mathbf{C})$ quantum $6j$ -symbol and its relation to the hyperbolic volume*, Quantum Topology **4** (2013), 303–351.
- [4] M. Hennings: *Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras*, J. London Math. Soc. (2) **54** (1996), 594–624.
- [5] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin: *Representations of the algebra $Uq(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links*, Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), 285–339, Adv. Ser. Math. Phys., **7**, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [6] H. Kondo and Y. Saito: *Indecomposable decomposition of tensor products of modules over the restricted quantum universal enveloping algebra associated to sl_2* , J. Algebra **330** (2011), 103–129.
- [7] R. J. Lawrence: *A universal link invariant using quantum groups*, Differential geometric methods in theoretical physics (Chester, 1988), 55–63, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [8] M. Miyamoto: *Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2 -cofiniteness*, Duke Math. J. **122** (2004), 51–91.
- [9] H. Murakami and J. Murakami: *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. **186** (2001), 85–104.
- [10] J. Murakami: *Colored Alexander invariants and cone-manifolds*, Osaka J. Math. **45** (2008), 541–564.
- [11] J. Murakami and K. Nagatomo: *Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups*, Intern. J. Math. **18** (2008), 1203–1213.
- [12] T. Ohtsuki: *Colored ribbon Hopf algebras and universal invariants of framed links*, J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), 211–232.
- [13] R. Suter: *Modules over $Uq(sl_2)$* , Comm. Math. Phys. **163** (1994), 359–393.