

# 対称 Macdonald 多項式の $t = 0$ での特殊化と アフィン量子群上の extremal weight 加群

内藤 聡 (東京工業大学・理工学研究科・数学専攻)

## §1 (対称) Macdonald 多項式

### §1.1 Weyl 指標 (Schur 多項式)

ここでは,  $\mathfrak{g}$  を有限次元複素単純リー環,  $\mathfrak{h} (\subset \mathfrak{g})$  をその Cartan 部分代数とする. そして,  $Q := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$  を root lattice,  $Q^\vee := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \mathfrak{h}$  を coroot lattice とし,  $Q^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \subset Q$ ,  $Q^{\vee,+} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i^\vee \subset Q^\vee$  とおく. さらに,  $P := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i \subset \mathfrak{h}^*$  を  $\mathfrak{g}$  の weight lattice とする; 但し,  $\varpi_i \in \mathfrak{h}^*$ ,  $i \in I$ , は  $\mathfrak{g}$  の基本ウェイトである. そして,  $P^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i \subset P$  を dominant weight の全体,  $P^{++} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{> 0}\varpi_i \subset P$  を regular dominant weight の全体とする. また,  $W = \langle r_i \mid i \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$  を  $\mathfrak{g}$  の (有限) Weyl 群とする; 但し,  $r_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$  は simple reflection であり,  $r_i\lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$ ,  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , で定義される (ここで,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{h}$  と  $\mathfrak{h}^*$  の間の duality pairing である). さらに, 有限 Weyl 群  $W$  の最長元を  $w_0 \in W$  と書く.

さて,  $q, t$  を不定元とし,  $N \in 2\mathbb{Z}_{> 0}$  を  $P \subset \frac{1}{N}Q$  となる最小の正の偶数としておく. そして, 体  $K := \mathbb{Q}(t)(q^{1/N})$  上の  $P$  の群環  $A := K[P] \ni e^\lambda$ ,  $\lambda \in P$ , を考える.

注意 1.1.  $W$  は  $K[P]$  に次の様に作用する:

$$we^\lambda := e^{w\lambda}, \quad w \in W, \lambda \in P.$$

そこで,  $A^W \subset A$  を  $W$ -不変な元の成す部分代数とし, 各  $\lambda \in P^+$  に対して  $m_\lambda := \sum_{\mu \in W\lambda} e^\mu$  (orbit-sum) とおく. このとき, 次が成り立つ.

**Fact 1.2.**  $\{m_\lambda \mid \lambda \in P^+\}$  は  $A^W$  の  $K$  上の基底である.

以下では,  $\Delta^+ \subset Q^+$  を  $\mathfrak{g}$  の正の root の全体とし,  $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = \sum_{i \in I} \varpi_i \in P$  とおく. そして,

$$a_\rho := \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w\rho} = e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}), \quad a_{\lambda+\rho} := \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)}, \quad \lambda \in P^+,$$

とおき,  $s_\lambda := \frac{a_{\lambda+\rho}}{a_\rho}$  (Weyl 指標),  $\lambda \in P^+$ , と定める. すると, 次が成り立つ.

**Fact 1.3.**  $\{s_\lambda \mid \lambda \in P^+\}$  は  $A^W$  の  $K$  上の基底である.

**注意 1.4.** 各  $\lambda \in P^+$  に対して

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\substack{\mu < \lambda \\ \mu \in P^+}} K_{\lambda, \mu} m_\mu, \quad K_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0};$$

ここで,  $\lambda > \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda - \mu \in Q^+$  である. また,  $K_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  は Kostka number と呼ばれる.

**Fact 1.5.** 各  $\lambda \in P^+$  に対して,  $s_\lambda$  は  $\lambda \in P^+$  を最高ウェイトとする  $\mathfrak{g}$  の有限次元既約最高ウェイト表現  $V(\lambda)$  の指標 (Weyl 指標) である:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} (\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_\mu) e^\mu;$$

ここで,  $V(\lambda)_\mu$  は  $V(\lambda)$  の  $\mu$ -weight 空間である.

## §1.2 (対称) Macdonald 多項式 の存在定理

ここでは,  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  を untwisted な affine Lie 環,  $\mathfrak{h}_{\text{af}} \subset \mathfrak{g}_{\text{af}}$  をその Cartan 部分代数とする. このとき, 次が成り立つ.

**Fact 1.6.**

$$\mathfrak{g}_{\text{af}} = (\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

$$\mathfrak{h}_{\text{af}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

但しここで,  $c := \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i^\vee \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}_{\text{af}}$  は  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の中心元,  $\delta := \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i \alpha_i \in (\mathfrak{h}_{\text{af}})^*$  は  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の null root, そして  $I_{\text{af}} = I \cup \{0\}$  は  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の単純 root の全体の添字集合である. 今,  $\Delta_{\text{af}} \subset (\mathfrak{h}_{\text{af}})^*$  を  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の (affine) real roots の集合,  $\Delta_{\text{af}}^+ \subset \Delta_{\text{af}}$  を  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の正の (affine) real roots の集合とする. このとき, 次が成り立つ.

**Fact 1.7.**  $\Delta_{\text{af}}^+$  は, 次の様に分けられる:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{af}}^+ &= \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta^+, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ &\sqcup \{-\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta^+, k \in \mathbb{Z}_{> 0}\}. \end{aligned}$$

以下では, 各  $f = \sum_{\lambda \in P} f_\lambda e^\lambda \in A$ ,  $f_\lambda \in K$ , に対して

$$\bar{f} := \sum_{\lambda \in P} \bar{f}_\lambda e^{-\lambda} \in A$$

とおく; 但し,  $\bar{\cdot} : K \rightarrow K$  は,  $\bar{q} = q^{-1}$ ,  $\bar{t} = t^{-1}$  なる  $K = \mathbb{Q}(t)(q^{1/N})$  の自己同型である. また,

$$\nabla := \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{(e^\alpha; q)_\infty (qe^{-\alpha}; q)_\infty}{(te^\alpha; q)_\infty (tqe^{-\alpha}; q)_\infty}, \quad (a; q)_\infty := \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i),$$

とおく; これは,  $(\mathbb{Z}[t])[[q]]$  に係数を持つ形式的 Laurent 級数である.

**注意 1.8.**  $a = \alpha + k\delta \in \Delta_{\text{af}}^+$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\alpha \in \pm\Delta^+$ , に対して  $e^a := q^k e^\alpha$  とおく. このとき

$$\nabla = \prod_{\alpha \in \Delta_{\text{af}}^+} \frac{1 - e^\alpha}{1 - te^\alpha}$$

と表される.

今,

$$\nabla_0 := \frac{\nabla}{\nabla \text{ における } e^0 \text{ の係数}}$$

とおけば,  $\nabla_0$  は  $\mathbb{Q}(q, t) \subset K$  に係数を持つ形式的 Laurent 級数になる.

そこで, 各  $f, g \in A$  に対して

$$(f, g) := fg\nabla_0 \text{ における } e^0 \text{ の係数} \in K$$

と定める.

**Fact 1.9** (Macdonald).  $A^W$  には, 次の 2 つの条件を満たす  $K$  上の基底  $\{P_\lambda(q, t) \mid \lambda \in P^+\}$  が (唯一つ) 存在する.

$$(1) P_\lambda(q, t) = m_\lambda + \sum_{\substack{\mu < \lambda \\ \mu \in P^+}} a_{\lambda\mu} m_\mu, \quad a_{\lambda\mu} \in K;$$

$$(2) (P_\lambda, m_\mu) = 0 \quad (\forall \mu \in P^+, \mu < \lambda).$$

この  $P_\lambda(q, t) \in A^W$  を (対称) Macdonald 多項式 と呼ぶ; 詳しくは, [M1], [M2] を参照.

### §1.3 Macdonald 多項式の様々な特殊化

(1) 特殊化:  $q = t$ .

このとき,

$$P_\lambda(q, q) = s_\lambda \quad (\text{Weyl 指標})$$

であり, これは  $q$  に依らない.

(2) 特殊化:  $t = 1$ .

このとき,

$$P_\lambda(q, 1) = m_\lambda \quad (\text{orbit-sum})$$

であり, これは  $q$  に依らない.

(3) 特殊化:  $q = 0$ .

このとき,  $P_\lambda(0, t)$  は次の表示を持つ:

$$P_\lambda(0, t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left( e^\lambda \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right), \quad W_\lambda(t) = \sum_{\substack{w \in W \\ w\lambda = \lambda}} t^{\ell(w)}.$$

$P_\lambda(0, t)$  は Hall-Littlewood 多項式 と呼ばれる ([M1] 参照).

注意 1.10.  $G$  を (simply-connected な) semisimple  $p$ -adic Lie group/ $\mathbb{Q}_p$ ,  $K (\subset G)$  をその極大 compact 部分群で  $(G, K)$  の制限 root 系が  $\Delta$  の双対 root 系  $\Delta^\vee$  となっているものとする. このとき,  $P_\lambda(0, t)$  は,  $(G, K)$  の zonal spherical 関数の ( $\lambda \in P^+$  でパラメトライズされる) double coset  $\in K \backslash G / K$  上での値を与えている. 但し,  $t^{-1} = \#(\mathbb{Q}_p \text{ の residue field})$  である.

(4) 特殊化:  $t = q^\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ ;  $q \rightarrow 1$  (従って  $t \rightarrow 1$ ).

このときは, Jacobi 多項式 (Jack 多項式)  $J_\lambda^{(\gamma)}$  が得られる ([M1] 参照).

注意 1.11.  $G_{\mathbb{R}}$  を semisimple Lie group/ $\mathbb{R}$ ,  $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}})$  を (compact または noncompact) symmetric space でその制限 root 系が  $\Delta$  であるものとする. また, これらの制限 root の重複度は全て  $2\gamma$  であるとする. このとき,  $J_\lambda^{(\gamma)}$  は symmetric space  $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$  上の (nonzero な  $K_{\mathbb{R}}$ -fixed vector を持つ  $G$  の有限次元既約最高ウェイト表現  $M$  に付随する) zonal spherical 関数の値を与えている. 但しここで,  $M$  の最高ウェイトが  $\lambda$  である.

## §2 Macdonald 多項式に対する Ram-Yip formula

### §2.1 Double Bruhat graph

$W$  と  $\Delta^+$  に付随する double Bruhat graph (DBG) とは,  $W$  を頂点の集合とし, 次の2種類の directed edge を持つ directed graph のことである:

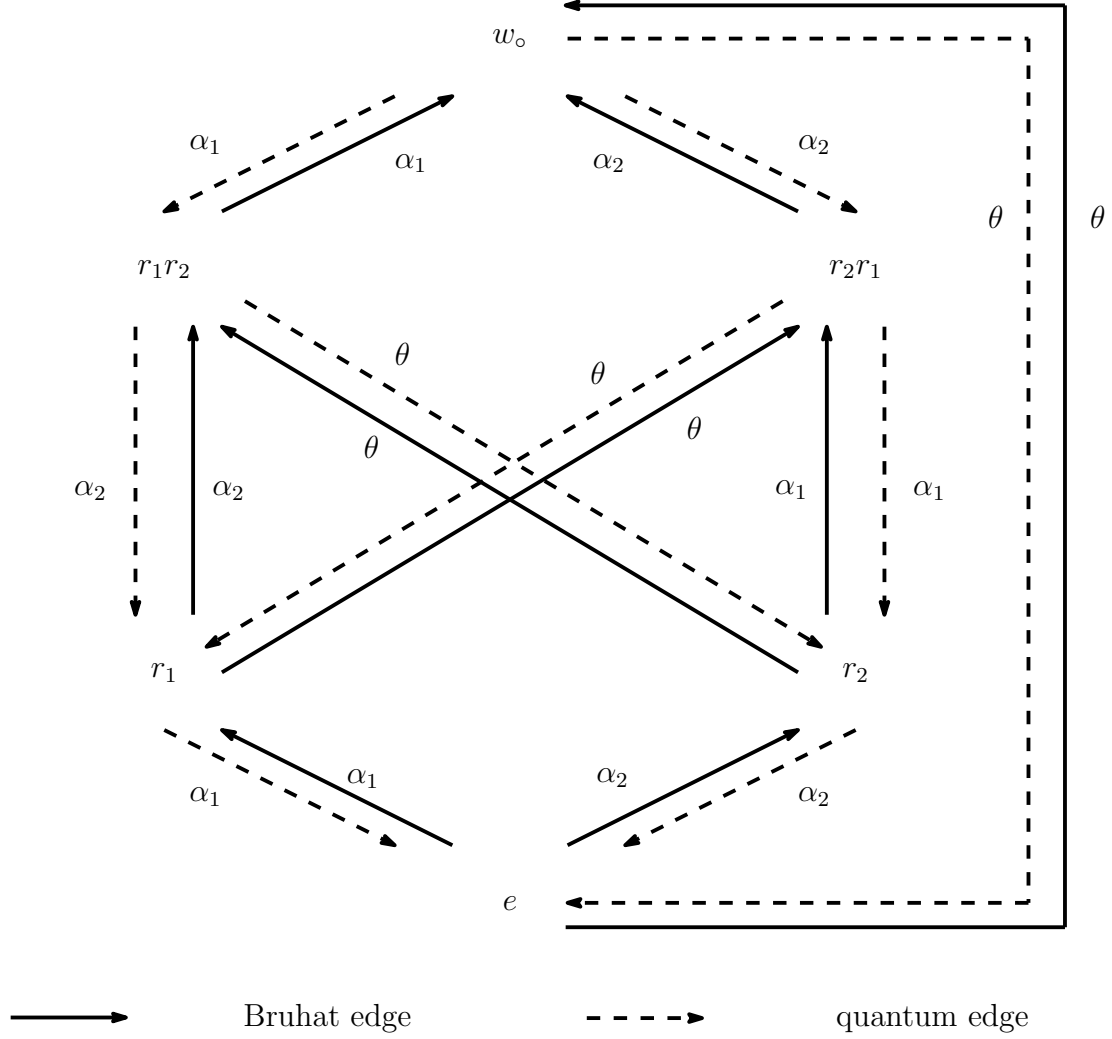
$$\text{directed edge} : v \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} vr_\beta, \quad v \in W, \beta \in \Delta^+;$$

ここで, directed edge  $v \xrightarrow{\beta} vr_\beta$  は

$$\begin{cases} \ell(vr_\beta) > \ell(v) \text{ のとき Bruhat edge,} \\ \ell(vr_\beta) < \ell(v) \text{ のとき quantum edge} \end{cases}$$

と呼ばれる.

例 2.1.  $A_2$  型の DBG.  $\mathfrak{g} : A_2$  型,  $\theta := \alpha_1 + \alpha_2$ .



## §2.2 pQLS paths

以下では  $\lambda \in P^{++} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{>0} \varpi_i$  とする; これは説明を簡単にするためである. さて,

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1)$$

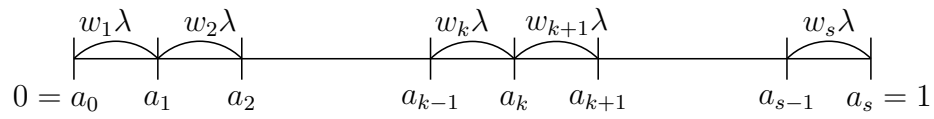
$$w_k \in W \ (1 \leq k \leq s), \quad a_k \in \mathbb{Q} \ (0 \leq k \leq s),$$

という形の列  $\eta$  が shape  $\lambda$  の pseudoQLS path (pQLS path) であるとは,  $1 \leq \forall k \leq s-1$  に対して, 次の様な directed  $a_k$ -path in DBG が (少なくとも1つ) 存在することである:

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \cdots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1},$$

$$\text{s.t. } a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq \forall l \leq m_k).$$

この状況を、次の様な図で表す:



例 2.2.  $\mathfrak{g} : A_2$  型,  $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ . このとき,

$$r_2 r_1 \xleftarrow{\theta} r_1$$

は Bruhat edge であり, また directed (1/2)-path in DBG である. 一方,

$$r_2 r_1 \xleftarrow{\alpha_2} w_0 \xleftarrow{\theta} e \xleftarrow{\alpha_1} r_1$$

は directed 1-path in DBG ではあるが, directed (1/2)-path in DBG ではない.

以下では,  $\text{pQLS}(\lambda)$  を shape  $\lambda$  の pQLS path の全体とする. また,

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

に対して,

$$\text{wt}(\eta) := \sum_{k=1}^s (a_k - a_{k-1}) w_k \lambda \in P$$

とおく ( $\eta$  の weight).

### §2.3 Crsytal structure on pQLS paths

ここでは、講演の際には述べられなかった、pQLS path の集合の上のクリスタル構造について簡単に説明する。今、 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$  を区分的に線形で連続な写像で、 $\pi(0) = 0$  かつ  $\pi(1) \in P$  を満たすものとする。このとき、(単純ルートとは限らない) 各ルート  $\alpha \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$  に対して、 $e_\alpha \pi$  を次の様に定義する: 先ず、

$$H(t) = H_\alpha^\pi(t) := \langle \pi(t), \alpha^\vee \rangle, \quad t \in [0, 1],$$

$$m = m_\alpha^\pi := \min\left(\{H_\alpha^\pi(t) \mid t \in [0, 1]\} \cap \mathbb{Z}\right),$$

とおく;  $H(0) = 0$  なので  $m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  であることに注意する。  $m = 0$  であれば  $e_\alpha \pi := 0$  とする。  $m \leq -1$  のときは、次の様に  $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$  を定める:

$$t_1 := \min\{t \in [0, 1] \mid H_\alpha^\pi(t) = m_\alpha^\pi\},$$

$$t_0 := \max\{t \in [0, t_1] \mid H_\alpha^\pi(t) = m_\alpha^\pi + 1\}.$$

そして、

$$(e_\alpha \pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & (0 \leq t \leq t_0), \\ \pi(t_0) + r_\alpha(\pi(t) - \pi(t_0)) & (t_0 \leq t \leq t_1), \\ \pi(t) + \alpha & (t_1 \leq t \leq 1). \end{cases}$$

とおく。このとき、各  $\lambda \in P^{++}$  に対して、shape  $\lambda$  の pQLS path の全体  $\text{pQLS}(\lambda)$  には (拡張された) クリスタルの構造が入り、さらにその (拡張された) クリスタル・グラフは連結である。より正確には、次の定理が成り立つ。

**定理 2.3.** (1)  $\pi \in \text{pQLS}(\lambda)$ ,  $\alpha \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$  とする。もし  $e_\alpha \pi \neq 0$  ならば、 $e_\alpha \pi \in \text{pQLS}(\lambda)$  である。

(2) 各  $\pi \in \text{pQLS}(\lambda)$  に対して、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$  であって、

$$e_{\beta_1} e_{\beta_2} \cdots e_{\beta_k} \pi = \pi_\lambda$$

を満たすものが存在する。

なお、Example として、Appendix に  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ,  $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$  の場合の  $\text{pQLS}(\lambda)$  の (拡張された) クリスタル・グラフを描いた; 但し、 $\alpha \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$  と  $\pi, \pi' \in \text{pQLS}(\lambda)$  に対して、記号  $\pi \xrightarrow{f_\alpha} \pi'$  は、 $e_\alpha \pi' = \pi$  と同じ意味である。



## §2.4 Ram-Yip formula in terms of pQLS paths

定理 2.4.  $\lambda \in P^{++}$  とする. このとき, Macdonald 多項式  $P_\lambda(q, t)$  は次の様に表される:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pQLS}(\lambda)} t^{\frac{1}{2}(\ell(w_1) - \ell(w_s))} \times e^{\text{wt}(\eta)} \\
& \times \prod_{k=1}^{s-1} \left( \sum_{\substack{w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}: \\ \text{label-increasing directed } a_k\text{-path in DBG}} \left( t^{-\frac{1}{2}}(1-t) \right)^{m_k} \right. \\
& \quad \times \prod_{1 \leq l \leq m_k} \frac{1}{1 - q^{a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} t^{\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle}} \\
& \quad \quad \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{Bruhat edge} \\
& \quad \times \left. \prod_{1 \leq l \leq m_k} \frac{q^{a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} t^{\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle}}{1 - q^{a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} t^{\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle}} \right) \\
& \quad \quad \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge}
\end{aligned}$$

但し, DBG における directed path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

が label-increasing であるとは,  $\Delta^+$  上の固定された (dual) reflection order  $\prec$  に関して

$$\beta_1^{(k)} \prec \beta_2^{(k)} \prec \dots \prec \beta_{m_k}^{(k)}$$

となっていることである; Ram-Yip formula の元々の形については, [RY], [L] を参照.

注意 2.5.  $\Delta^+$  上の全順序  $\prec$  が (dual) reflection order であるとは, 次の条件を満たすことである:

$$\gamma^\vee = \alpha^\vee + \beta^\vee \ (\alpha, \beta, \gamma \in \Delta^+) \implies \alpha \prec \gamma \prec \beta \ \text{or} \ \beta \prec \gamma \prec \alpha.$$

## §2.5 Hall-Littlewood 多項式 $P_\lambda(0, t)$

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

が pseudoLS path (pLS path) であるとは,  $1 \leq \forall k \leq s-1$  に対して, (DBG における) directed  $a_k$ -path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

であって, その全ての directed edge が Bruhat edge であるようなものが (少なくとも1つ) 存在することである.

さて,  $\text{pLS}(\lambda)$  を shape  $\lambda$  の pseudoLS path の全体とすると, Ram-Yip formula (定理 2.4) から次が従う.

系 2.6.  $\lambda \in P^{++}$  とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$P_\lambda(0, t) = \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pLS}(\lambda)} t^{\frac{1}{2}(\ell(w_1) - \ell(w_s))} \times e^{\text{wt}(\eta)}$$

$$\times \prod_{k=1}^{s-1} \left( \sum_{\substack{w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}: \\ \text{label-increasing directed } a_k\text{-path in DBG} \\ \text{s.t. } v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} \text{ is a Bruhat edge } (1 \leq \forall l \leq m_k)} \left( t^{-\frac{1}{2}}(1-t) \right)^{m_k} \right).$$

## §2.6 Jacobi 多項式 $J_\lambda^{(\gamma)}$

Ram-Yip formula (定理 2.4) から, 次が従う.

系 2.7.  $\lambda \in P^{++}$  とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
J_\lambda^{(\gamma)}(x) &= \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pQLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} \\
&\times \prod_{k=1}^{s-1} \left( \sum_{\substack{w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}: \\ \text{label-increasing directed } a_k\text{-path in DBG}} \right. \\
&\quad \left. \prod_{l=1}^{m_k} \frac{1}{\gamma^{-1} a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle + \langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} \right).
\end{aligned}$$

## §2.7 Examples

ここでは,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  ( $A_2$  型),  $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$  とする. そして,  $\eta_w := (w; 0, 1)$ ,  $w \in W$ , とおく. このとき, 通常  $\text{Lakshmibai-Seshadri path of shape } \lambda$  の全体  $\mathbb{B}(\lambda)$  は, 次の 8 個の元からなる:

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}(\lambda) &= \{ \eta_e, \eta_{r_1}, \eta_{r_2}, \eta_{r_1 r_2}, \eta_{r_2 r_1}, \eta_{w_\circ}, \\
&\quad \eta_3 := (r_2 r_1, r_1; 0, 1/2, 1), \eta_4 := (r_1 r_2, r_2; 0, 1/2, 1) \}.
\end{aligned}$$

また,

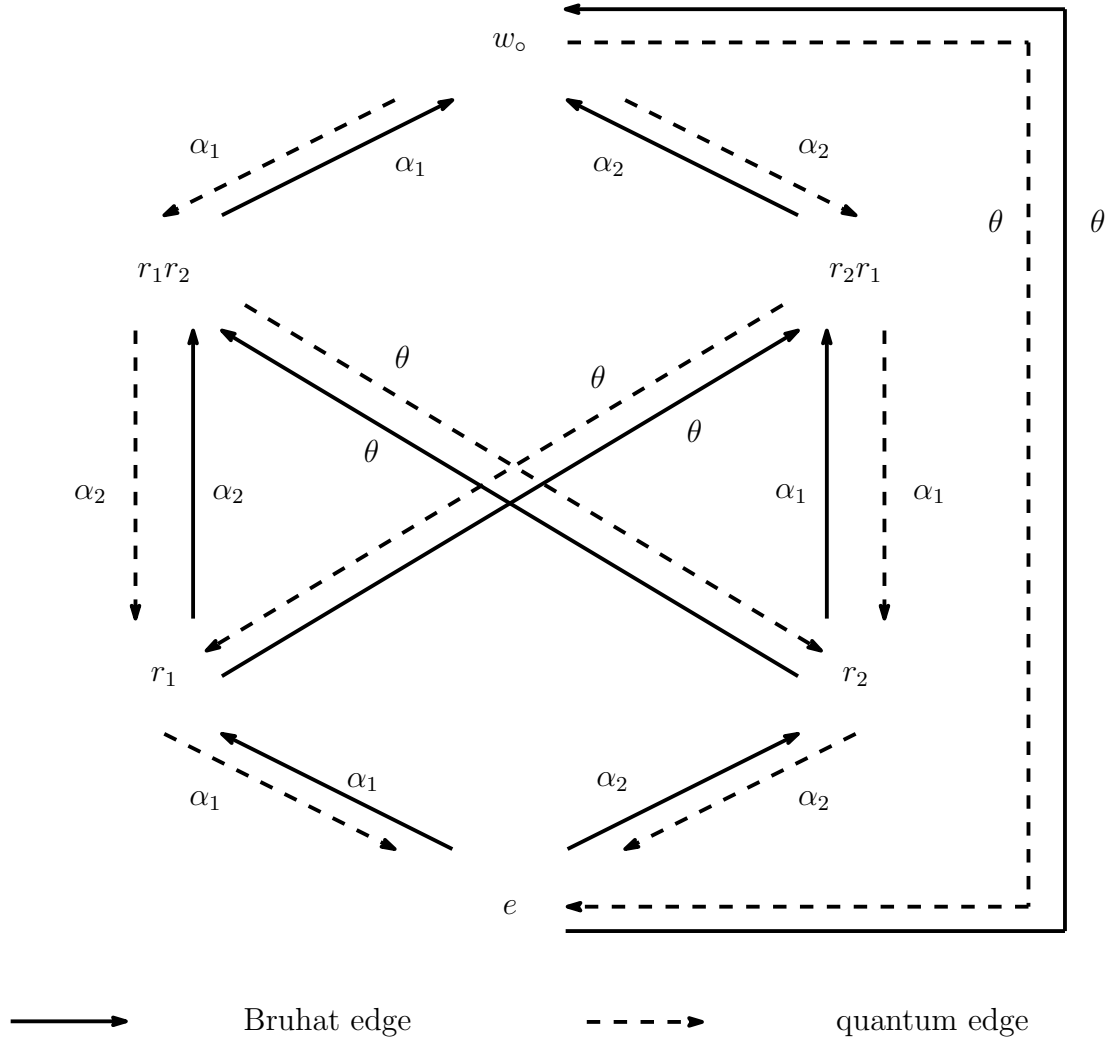
$$\begin{aligned}
\text{QLS}(\lambda) &= \mathbb{B}(\lambda) \cup \{ \eta_1 := (e, w_\circ; 0, 1/2, 1) \}, \\
\text{pLS}(\lambda) &= \mathbb{B}(\lambda) \cup \{ \eta_6 := (w_\circ, e; 0, 1/2, 1) \}, \\
\text{pQLS}(\lambda) &= \text{QLS}(\lambda) \cup \\
&\quad \{ \eta_2 := (r_1, r_2 r_1; 0, 1/2, 1), \eta_5 := (r_2, r_1 r_2; 0, 1/2, 1), \eta_6 \}
\end{aligned}$$

となっている. そして, Macdonald 多項式  $P_\lambda(q, t)$  と, その特殊化である Hall-Littlewood 多項式  $P_\lambda(0, t)$ , Jack 多項式  $J_\lambda^{(\gamma)}(x)$  は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
P_\lambda(q, t) &= (e^\lambda + e^{r_1 \lambda} + e^{r_2 \lambda} + e^{r_1 r_2 \lambda} + e^{r_2 r_1 \lambda} + e^{w_\circ \lambda}) \\
&\quad + e^0 \times \frac{1-t}{1-qt^2} + e^0 \times \frac{1-t}{1-qt^2} + e^0 \times q \times \frac{1-t}{1-qt^2} \\
&\quad + e^0 \times qt \times \frac{1-t}{1-qt^2} + e^0 \times qt \times \frac{1-t}{1-qt^2} \\
&\quad + e^0 \times t \times \frac{1-t}{1-qt^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_\lambda(0, t) &= (e^\lambda + e^{r_1\lambda} + e^{r_2\lambda} + e^{r_1r_2\lambda} + e^{r_2r_1\lambda} + e^{w_0\lambda}) \\
&\quad + (1-t)e^0 + (1-t)e^0 + t(1-t)e^0, \\
J_\lambda^{(\gamma)}(x) &= (e^\lambda + e^{r_1\lambda} + e^{r_2\lambda} + e^{r_1r_2\lambda} + e^{r_2r_1\lambda} + e^{w_0\lambda}) + 6 \times \frac{1}{\gamma^{-1} + 2} e^0.
\end{aligned}$$

但し,  $A_2$  型の DBG は, 次の形であった; ここで,  $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$ . である.



### §3 特殊化 $t = 0$

#### §3.1 Quantum Bruhat graph

$W$  と  $\Delta^+$  に付随する quantum Bruhat graph (QBG) とは,  $W$  を頂点の集合とし, 次の2種類の directed edge を持つ directed graph のことである:

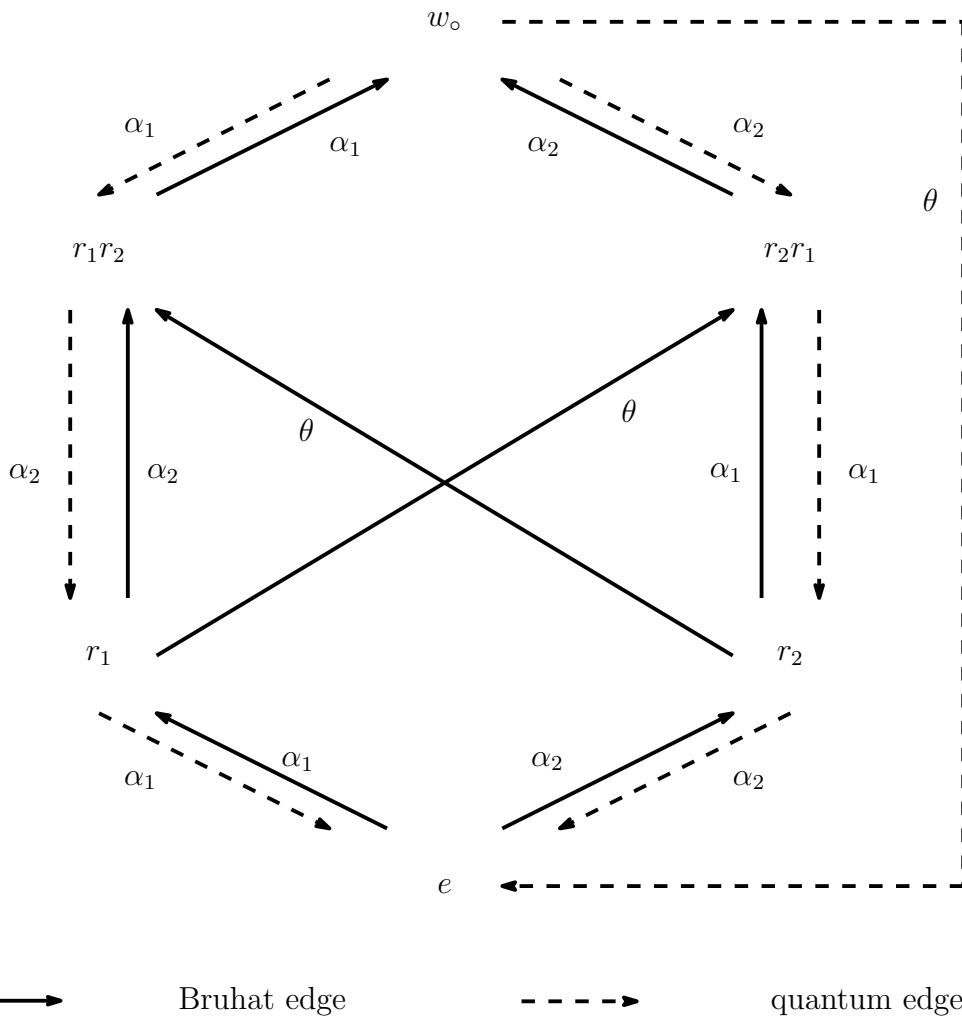
directed edge :  $v \xrightarrow{\beta} vr_{\beta}$ ,  $v \in W$ ,  $\beta \in \Delta^+$ ;

ここで, directed edge  $v \xrightarrow{\beta} vr_{\beta}$  は

$$\begin{cases} \ell(vr_{\beta}) = \ell(v) + 1 & (\text{Bruhat edge}), \\ \ell(vr_{\beta}) = \ell(v) - 2\langle \rho, \beta^{\vee} \rangle + 1 & (\text{quantum edge}) \end{cases}$$

のどちらか一方の条件を満たす.

例 3.1.  $A_2$  型の QBG.  $\mathfrak{g} : A_2$  型,  $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$ .



### §3.2 Quantum LS paths

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

が quantum LS path (QLS path) であるとは,  $1 \leq \forall k \leq s-1$  に対して, QBG における directed  $a_k$ -path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

が (少なくとも1つ) 存在することである.

但しここで, 上の directed path が  $a_k$ -path であるとは, 条件

$$a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq \forall l \leq m_k)$$

が満たされていることである. 以下では,  $\text{QLS}(\lambda)$  を shape  $\lambda$  の QLS path の全体とする.

**注意 3.2.**  $\forall w \neq \forall w' \in W$  に対して, QBG における  $w$  から  $w'$  への (固定された reflection order に関する) label-increasing directed path は唯一つ存在する.

よって, QLS path

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1)$$

に対しては,  $1 \leq \forall k \leq s-1$  で, QBG における label-increasing directed  $a_k$ -path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

は, 唯一つ存在する.

### §3.3 特殊化 $t = 0$ における公式

$\lambda \in P^{++}$  とする.  $P_\lambda(q, t)$  についての Ram-Yip formula (定理 2.4) において, 各

$$\eta = (w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

に対応する項の  $t$  のべき指数 は、次の通りとなる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s-1} \left( \sum_{1 \leq l \leq m_k} \underbrace{(\ell(v_l^{(k)}) - \ell(v_{l-1}^{(k)}) - 1)}_{\geq 0} \right) \\ & \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{Bruhat edge} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s-1} \left( \sum_{1 \leq l \leq m_k} \underbrace{(\ell(v_l^{(k)}) - \ell(v_{l-1}^{(k)}) - 1 + 2\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle)}_{\geq 0} \right) \\ & \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge} \end{aligned}$$

これから、特殊化  $t = 0$  において残る項は、quantum LS path  $\eta \in \text{QLS}(\lambda)$  に対応する項のみであることが分かる。従って、Ram-Yip formula (定理 2.4) から次が導かれる; 詳しくは、[LNS<sup>3</sup>2] を参照。

**定理 3.3.**  $\lambda \in P^{++}$  とする。このとき、次の等式が成り立つ:

$$P_\lambda(q, 0) = \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{QLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} q^{\sum_{k=1}^{s-1} (*)};$$

但しここで、

$$(*) = \sum_{1 \leq l \leq m_k} a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle.$$

$$v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge}$$

**例 3.4.**  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ,  $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$  に対して

$$P_\lambda(q, 0) = (e^\lambda + e^{r_1\lambda} + e^{r_2\lambda} + e^{r_1r_2\lambda} + e^{r_2r_1\lambda} + e^{w_0\lambda}) + e^0 + e^0 + qe^0.$$

**注意 3.5.** 上の定理において、各  $k$  ( $1 \leq k \leq s-1$ ) に対して QBG における  $w_{k+1}$  から  $w_k$  への (label-increasing とは限らない) 最短の directed path は複数個有り得るが、そのうちのどれを用いても

$$\sum_{1 \leq l \leq m_k} \beta_l^{(k)\vee} \in Q^{\vee,+} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^\vee$$

$$v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge}$$

は同一の元となる。

そこで、この元を  $\underline{\underline{\text{wt}(w_{k+1} \Rightarrow w_k)} \in Q^{\vee,+}}$  と書く。この記号の下で、次が成り立つ:

$$P_\lambda(q, 0) = \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{QLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} q^{\sum_{k=1}^{s-1} a_k \langle \lambda, \text{wt}(w_{k+1} \Rightarrow w_k) \rangle}.$$

## §4 ある Demazure 加群の次数付き指標

### §4.1 Extremal weight 加群

ここでは、 $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  を untwisted な affine リー環、 $\mathfrak{h}_{\text{af}} \subset \mathfrak{g}_{\text{af}}$  をその Cartan 部分代数とする。そして、 $\Lambda_i \in \mathfrak{h}_{\text{af}}^*$ ,  $i \in I_{\text{af}} = I \cup \{0\}$ , を (affine) 基本ウェイト、 $\varpi_i = \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0$ ,  $i \in I$ , をレベル・ゼロ基本ウェイトとし、 $E_i, F_i$ ,  $i \in I_{\text{af}}$ , を  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の Chevalley 生成元とする。また、 $W_{\text{af}} = W \times Q^\vee$  を  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の (affine) Weyl 群とする。

ここで、 $\mathfrak{g}_{\text{af}} = (\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ ,  $\mathfrak{h}_{\text{af}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$  であった事を思い出そう; 但し、 $c = \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i^\vee \alpha_i^\vee$  は  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の中心元、 $\delta = \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i \alpha_i \in (\mathfrak{h}_{\text{af}})^*$  は  $\mathfrak{g}_{\text{af}}$  の null root である。

今、 $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ , を level-zero regular dominant weight,  $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$  をアフィン量子群とし、 $V(\lambda)$  を extremal weight  $\lambda$  を持つ extremal weight  $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群とする。即ち、 $V(\lambda)$  は、 $v_\lambda$  を生成元 (over  $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ ) とし、次の基本関係により定義される  $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群である:

基本関係 :  $v_\lambda$  は “extremal vector of weight  $\lambda$ ” である;

つまり、 $\exists \{S_w v_\lambda\}_{w \in W_{\text{af}}} \subset V(\lambda)$  で、以下の条件を満たすものが存在する:

$S_e v_\lambda = v_\lambda$  であり、勝手な  $w \in W_{\text{af}}$  と  $i \in I_{\text{af}}$  に対して、次が成り立つ。

$$\begin{cases} E_i S_w v_\lambda = 0, & F_i^{\langle w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle} S_w v_\lambda = S_{r_i w} v_\lambda & (\langle w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0), \\ F_i S_w v_\lambda = 0, & E_i^{\langle -w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle} S_w v_\lambda = S_{r_i w} v_\lambda & (\langle w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0). \end{cases}$$

但し、ここでの  $E_i, F_i$ ,  $i \in I_{\text{af}}$ , はアフィン量子群  $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$  の Chevalley 生成元であり、 $i \in I_{\text{af}}$  と  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して  $E_i^{(n)} := E_i^n / [n]_i!$ ,  $F_i^{(n)} := F_i^n / [n]_i!$  はそれらの  $q$ -divided power である; 詳しくは、[K] を参照。



## §4.2 Demazure 加群

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$  を level-zero regular dominant weight とする. そして,  $U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}})$  を  $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$  の positive part とする. この時, 各  $x \in W_{\text{af}}$  に対して, Demazure 加群  $V_x^+(\lambda) \subset V(\lambda)$  を次の様に定義する:

$$V_x^+(\lambda) := U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}}) S_x v_\lambda \subset V(\lambda);$$

但し,  $S_x v_\lambda \in V(\lambda)$  は weight  $x\lambda$  の extremal vector である; 詳しくは, [NS] を参照.

## §4.3 Demazure 加群の次数付き指標

$\lambda \in P^{++}$  とする.  $W$  の最長元  $w_0$  に付随する Demazure 加群  $V_{w_0}^+(\lambda)$  の ( $\mathfrak{h}_{\text{af}}$  に関する) weight 空間分解

$$V_{w_0}^+(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q \\ k \in \mathbb{Z}}} V_{w_0}^+(\lambda)_{\lambda + \gamma + k\delta}$$

を考える. そして,  $V_{w_0}^+(\lambda)$  の次数付き指標  $\text{gr-ch}(V_{w_0}^+(\lambda))$  を, 次の様に定義する.

$$\text{gr-ch}(V_{w_0}^+(\lambda)) := \sum_{\substack{\gamma \in Q \\ k \in \mathbb{Z}}} (\dim_{\mathbb{C}(v)} V_{w_0}^+(\lambda)_{\lambda + \gamma + k\delta}) e^{\lambda + \gamma} q^k.$$

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 4.1.  $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$  とすると, 次の等式が成り立つ:

$$\text{gr-ch}(V_{w_0}^+(\lambda)) = \frac{P_\lambda(q, 0)}{\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{m_i} (1 - q^r)}.$$

注意 4.2. 上の定理の証明には, §3 の最後で述べた等式

$$P_\lambda(q, 0) = \sum_{\eta = (w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{QLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} q^{\sum_{k=1}^{s-1} a_k \langle \lambda, \text{wt}(w_{k+1} \Rightarrow w_k) \rangle}$$

を用いる; 詳しくは, [INS], [NS] を参照.

## §5 アフィン量子群のレベル・ゼロ基本表現との関係

### §5.1 Demazure 加群 $V_{w_0}^+(\lambda)$ の商加群

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$  として,  $U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群  $V_{w_0}^+(\lambda)$  の商加群  $W_{w_0}(\lambda)$  を, 次の様に定義する:

$$W_{w_0}(\lambda) := V_{w_0}^+(\lambda) / \sum_{\mathbf{c}_0 \in \overline{\text{Par}}(\lambda) \setminus \{\emptyset\}} U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}}) S_{\mathbf{c}_0} S_{w_0} v_\lambda;$$

ここで,  $S_{\mathbf{c}_0} S_{w_0} v_\lambda \in V(\lambda)$  は weight  $w_0 \lambda + |\mathbf{c}_0| \delta$  の extremal vector である. また,  $\overline{\text{Par}}(\lambda)$  は, 分割  $\rho^{(i)}$ ,  $i \in I$ , の組  $(\rho^{(i)})_{i \in I}$  であって, 各  $\rho^{(i)}$  の長さが  $m_i$  以下であるものの全体である; 詳しくは, [BN] を参照.

このとき, 次の定理が成り立つ; 詳しくは, [INS], [NS] を参照.

**定理 5.1.**  $\lambda \in P^{++}$  とすると, 次の等式が成り立つ:

$$\text{gr-ch}(W_{w_0}(\lambda)) = P_\lambda(q, 0).$$

### §5.2 レベル・ゼロ基本表現との関係

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$  とする.  $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}}) := U_v((\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c) \subset U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$  とおき,  $W(\varpi_i) := V(\varpi_i)/(z_i - 1)V(\varpi_i)$  を  $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$  のレベル・ゼロ基本表現 (有限次元既約表現) とする; 但し,  $z_i : V(\varpi_i) \rightarrow V(\varpi_i)$  は,  $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -同型である; 詳しくは, [K] を参照.

**Fact 5.2.**  $U_v(\mathfrak{g})$  ( $\subset U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ )-加群としての次の同型が成り立つ:

$$W_{w_0}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I} W(\varpi_i)^{\otimes m_i}.$$

また,  $U_v(\mathfrak{g})$ -crystal としての次の同型が成り立つ:

$$\mathcal{B}(W_{w_0}(\lambda)) \cong \text{QLS}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I} \text{QLS}(\varpi_i)^{\otimes m_i};$$

後者の同型は,  $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -crystal としての同型でもある.

## 参考文献

- [BN] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335–402.
- [INS] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, preprint 2014, arXiv:1402.3884.
- [K] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.
- [L] C. Lenart, On combinatorial formulas for Macdonald polynomials, *Adv. Math.* **220** (2009), 324–340.
- [LNS<sup>3</sup>1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, *Int. Math. Res. Not.* **2015** (2015), 1848–1901.
- [LNS<sup>3</sup>2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and  $P = X$ , preprint 2014, arXiv:1402.2203.
- [LNS<sup>3</sup>3] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators, arXiv:1308.3529, to appear in the Proceedings of the 5th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute: Schubert Calculus, Osaka, Japan.
- [LNS<sup>3</sup>4] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Explicit description of the degree function in terms of quantum Lakshmibai-Seshadri paths, arXiv:1504.04707, to appear in *Toyama Math. J.* **37** (2015).
- [LNS<sup>3</sup>5] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: Nonsymmetric Macdonald polynomials at  $t = 0$  and Demazure characters, preprint 2015, arXiv:1511.00465.
- [M1] I. G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials”, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
- [M2] I. G. Macdonald, “Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials”, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 157, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [NS] S. Naito and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, preprint 2014, arXiv:1404.2436.
- [RY] A. Ram and M. Yip, A combinatorial formula for Macdonald polynomials, *Adv. Math.* **226** (2011), 309–331.