

ルート系のゼータ関数について

松本耕二*

概要

ルート系のゼータ関数とは、Euler, Hoffman, Zagier らによって研究が開始された多重ゼータ関数と、Lie 代数に付随して定義される Witten のゼータ関数の双方を統合した、多変数の多重ゼータ関数である。本稿では、筆者が小森靖氏、津村博文氏と共に研究を進めて来た、ルート系のゼータ関数の理論の現状を解説する。

1 Euler-Zagier の多重和

多重ゼータ関数の理論の源流は、18 世紀の Euler の研究にまで遡ることができるし、また 20 世紀初頭に行なわれた Barnes や Mellin の研究、1970 年代の新谷卓郎氏の研究も重要なものである。しかし、多重ゼータ関数の研究が爆発的に発展し始めるのは 1990 年代になってからである。1990 年頃、Drinfel'd, Kontsevich, Zagier といった人々によって、ある種の多重ゼータ関数と数学や数理論理学のさまざまな分野との関連が見いだされ、多重ゼータ関数は一挙に多くの研究者の注目を集める対象となった。

この大発展初期の時点において、おそらくもっとも大きい影響を与えた論文は、Zagier が第一回ヨーロッパ数学会議の報告集に寄稿した [74] であろう。

この論文の中で Zagier は、二種類の極めて重要な多重ゼータ関数のクラスを導入している。そのひとつは、複素変数 s_1, \dots, s_r に対して定義される多変数の多重級数¹

$$\zeta_{EZ,r}(s_1, \dots, s_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} (m_1 + m_2)^{s_2} \cdots (m_1 + \cdots + m_r)^{s_r}} \quad (1.1)$$

である。この級数は

$$\Re s_r > 1, \Re(s_{r-1} + s_r) > 2, \dots, \Re(s_1 + \cdots + s_r) > r \quad (1.2)$$

においてコンパクト一様に絶対収束する ([39])。

*名古屋大学大学院多元数理科学研究科

¹Zagier は上のように多重和の順序を定めているが、これとは逆の順序で多重和を定義する流儀もあるので注意を要する。

ただし、Zagier がこの論文で議論しているのは s_1, \dots, s_r がすべて整数で、上記の絶対収束領域 (1.2) に入っている時の特殊値だけである。このような特殊値は**多重ゼータ値** (multiple zeta value, 略して MZV) と呼ばれ、Zagier 以降、今日に至るまで多くの数学者によって非常に精力的に研究されて来ている。このような特殊値は、 $r = 2$ のときには既に Euler が研究していた。そのことにちなんで、和 (1.1) を **Euler-Zagier の多重和**² と呼ぶ。

複素関数としての (1.1) は、 $r = 1$ のときは言うまでもなく、Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \quad (1.3)$$

に他ならない。Atkinson [6] は 1949 年、Riemann ゼータ関数の二乗平均値の考察、という文脈の中で $r = 2$ の場合の (1.1) に遭遇し、その解析接続を論じている。Atkinson の出発点になったのは**調和積公式**

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) + \zeta_{EZ,2}(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2) \quad (1.4)$$

である。この式自体は $\zeta(s)$ の定義式 (1.3) を左辺に代入して和を分割するだけで簡単に証明できる。

一般の r の場合の (1.1) の解析接続の研究史は少々錯綜しているので、この機会に少し詳しく述べておく。1995 年、Essouabri [11] は非常に一般的な形の、ただし一変数の多重 Dirichlet 級数の解析接続³ を論じ、その中で、彼の方法が多変数の場合にも適用できることを一言コメントしている。その場合、彼の方法は特に (1.1) の解析接続を与える。ただし [11] は未発表の学位論文であり、その理論を雑誌上で公表した [12] においては多変数の場合についてのコメントは述べられていない。多変数の場合の Essouabri の理論について初めて出版物上で詳しく記述したのはおそらく de Crisenoy [10] である。

Zagier らの研究に端を発する問題意識の流れの中では、例えば Goncharov のプレプリント [13] に (1.1) の解析接続の証明がある。また Zagier も早くから証明を持っていた、との説もある。荒川氏と金子氏の論文 [2] では変数 s_r のみについての解析接続が行なわれているが、筆者は生前の荒川氏から、この方法を他の変数にまで拡張することも可能である、と教えられた。

出版物上で (1.1) の多変数関数としての解析接続を初めて詳しく証明したのは、Zhao の論文 [75] と、またそれとは独立に秋山氏、江上氏、谷川氏の共著 [1] である。Zhao の証明は Gel'fand-Shilov の一般関数の理論に基づく⁴

²ただし、出版年としては Zagier [74] よりも早く、Hoffman [16] も同じ多重和を導入して考察しているので、本当は Hoffman の名前も付け加えるべきである。

³Essouabri の研究は、新谷氏による総実代数体の Hecke の L 関数の特殊値の研究を契機として、その後 Cassou-Noguès, Sargos, Lichtin など、主としてフランス学派によって展開されて来た、多重 Dirichlet 級数の理論の流れの中に位置づけることができる。

⁴ただし Zhao の議論は不完全であるとの批判もある。Zhao の積分表示に基づきながら古典的な解析の道具だけで行なう証明を後に小野塚氏 [61] が提示している。

もので、他方秋山氏たちは Euler-Maclaurin の和公式を用いる論法で証明を行なっている。

その後、Mellin-Barnes 積分を用いる筆者の証明 [40] [41]、二項展開に基づく簡明な Murty と Sinha の証明 [51]⁵、また高次元の contour 積分を使う小森氏の証明 [24] など現れ、(1.1) の解析接続は今日では種々の手法で証明できる基本的な事実となっている。

解析接続が確立されると、それを基盤として、さらに深い解析的な性質を追求しよう、とする動きが出てくるのは当然のことである。多重ゼータ関数の絶対値の大きさ、平均値、零点の分布ないしは zero-divisor の挙動、負の整数点の周りでの振舞いなどについて、とりあえず手がつけやすい $r = 2$ の場合などを当面の対象として、いくつかの研究がなされつつある。この方向は本稿のテーマからは外れるので詳しくは述べないことにするが、ただ、後節との関係で、 $r = 2$ の場合の関数等式についての結果だけ、ここで書き下しておく。まず

$$g_{EZ,2}(s_1, s_2) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) - \frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(s_2)} \Gamma(s_1 + s_2 - 1) \zeta(s_1 + s_2 - 1) \quad (1.5)$$

とおく。このとき筆者 [43] は、**関数等式**

$$\frac{g_{EZ,2}(s_1, s_2)}{(2\pi)^{s_1+s_2-1} \Gamma(1-s_1)} = \frac{g_{EZ,2}(1-s_2, 1-s_1)}{i^{s_1+s_2-1} \Gamma(s_2)} + 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}(s_1 + s_2 - 1)\right) F_+(s_1, s_2) \quad (1.6)$$

が成り立つことを証明した。ただしここに

$$F_{\pm}(s_1, s_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{s_1+s_2-1}(k) \Psi(s_2, s_1 + s_2; \pm 2\pi i k) \quad (1.7)$$

であり、 $\sigma_a(k) = \sum_{d|k} d^a$ 、また Ψ は

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty e^{i\phi}} e^{-xy} y^{a-1} (1+y)^{c-a-1} dy$$

($\Re a > 0, -\pi < \phi < \pi, |\phi + \arg x| < \pi/2$) で定義される合流型超幾何関数である。

この関数等式の右辺の第二項は、超平面

$$\Omega_{2k+1} = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \mid s_1 + s_2 = 2k + 1\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

の上では 0 になるので、 Ω_{2k+1} に制限したときの (1.6) は美しい対称的な形を与える。(ただし $k = 0$ のときは Ω_1 は $\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2)$ の singular locus に

⁵同じ着想による証明を、筆者は 2004 年頃、安田正大氏から口頭で聞かされたことがある。

なるので意味がないが。) この意味で (1.6) は無限枚の超平面上で成り立つ対称形関数等式を繋ぐ「メタ関数等式」とでも言うべきもの⁶である。

なお (1.7) で定義した F_{\pm} のうち、 F_{-} の方は (1.6) 式には現れないのであるが、実は

$$g_{EZ,2}(s_1, s_2) = \Gamma(1 - s_1)\{F_{+}(1 - s_2, 1 - s_1) + F_{-}(1 - s_2, 1 - s_1)\} \quad (1.8)$$

という式も成り立つ。この式も [43] の結果からすぐ導けるのだが、[43] においては述べられておらず、[45] において初めて明記された。実は筆者は、[43] を書いてからしばらくして、Hurwitz ゼータ関数のよく知られた関数等式との類推から、(1.8) の方が関数等式の本質を表している、と考えるようになり、[45] や [26] ではそのような記述の仕方をしている。

しかし最近になって、池田氏と松岡氏は [19] において、関数等式が $\zeta(s)$ を特徴付ける、という有名な Hamburger の定理の二重類似として、(1.6) が、調和積公式 (1.4) と合わせることにより $\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2)$ を特徴付ける、という興味深い定理を証明している。そんな事情もあって、最近では筆者は、(1.6) と (1.8) のどちらもが、二重ゼータ関数の関数等式⁷の一側面を表しているのだろう、と感じている。

2 Witten のゼータ関数

さて、Zagier の論文 [74] で導入されたもうひとつの重要な多重ゼータ関数のクラス、Witten のゼータ関数の話に進もう。

Zagier が [74] において **Witten のゼータ関数** と名付けたのは、 \mathbb{C} 上の半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に対して Dirichlet 級数

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = \sum_{\varphi} (\dim \varphi)^{-s} \quad (2.1)$$

で定義されるゼータ関数である。ここに和は \mathfrak{g} の \mathbb{C} 上の有限次元既約表現 φ の同値類全体にわたる。Witten は [73] において、この級数⁸の正の整数点での値が、彼のゲージ理論に登場するある種のモジュライ空間の体積を表すことを発見した。これが Witten の名を冠する理由である。

まず最初の注意として、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ となっているときには、

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = \zeta_W(s, \mathfrak{g}_1)\zeta_W(s, \mathfrak{g}_2)$$

⁶ただし筆者が [43] を書いたときにはこの認識には到達していなかった。この点を初めて明記した論文は [26] である。

⁷なお、周期的な数論的関数を分子に乗せたような二重級数への関数等式の一般化は、[31] にある。保型形式の Fourier 係数を乗せた場合については [8] [9] 参照。

⁸ただし実は Witten は、より一般に、連結なコンパクト半単純 Lie 群 G に付随して同様に定義される級数を考えている。 G が単連結でなければ、対応する Lie 代数 \mathfrak{g} のゼータ関数 (2.1) とは一致しない。後述するルート系のゼータ関数の理論をこの立場に一般化した研究は [33] [37] でなされている。

であることが容易に分かる。従って、 \mathfrak{g} が単純 Lie 代数のときの構造さえ分かれば十分である。単純 Lie 代数はよく知られているように、Killing-Cartan によって A 型から G 型までに分類されている。そして、個々の具体的な Lie 代数が与えられれば、その既約表現の次元は Weyl の次元公式によって計算できる。従って個別の Lie 代数に対しては $\zeta_W(s, \mathfrak{g})$ のもっと explicit な表示を書き下すことができる。それによって、(2.1) が実は多重ゼータ関数の一種であることが分かるのである。

その記述のために、まずルート系の言葉を準備しよう。Lie 代数 \mathfrak{g} のすべてのルートがなす集合を $\Delta = \Delta(\mathfrak{g})$ と書くことにする。その部分集合としての基本系を $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ ($r = \text{rank } \mathfrak{g}$) とすると、任意のルートは基本系の元の整数係数一次結合として書け、その係数が非負なら正のルート、非正なら負のルートと呼ぶ。正のルートの全体を Δ_+ 、負のルートの全体を Δ_- と書けば $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ である。

ルートは \mathfrak{g} の Cartan 部分代数 \mathfrak{h} の双対空間 \mathfrak{h}^* の元であるが、 \mathfrak{h} と \mathfrak{h}^* は Killing form による内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で同一視できる。その同一視の下でルート α に対応する \mathfrak{h} の元を α' として、

$$\alpha^\vee = \frac{2}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} \alpha' \in \mathfrak{h}$$

を α に対応するコルートと呼ぶ。

次に基本ウェイト λ_i ($1 \leq i \leq r$) を、 $\lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ (右辺は Kronecker のデルタ) で定め、 $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ とおく。すると任意のウェイトは Λ の元の整数係数一次結合として表せ、その係数がすべて非負のものが支配的ウェイトである。つまり支配的ウェイトは

$$\lambda = n_1 \lambda_1 + \dots + n_r \lambda_r \quad (n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (2.2)$$

と書ける。特に $\rho = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$ とおく。

さて \mathfrak{g} の任意の有限次元既約表現 φ には、よく知られているように支配的ウェイト $\lambda = \lambda(\varphi)$ が一対一に対応する。Weyl の次元公式は φ の表現空間の次元を λ の言葉で書き下す式であって、

$$\dim \varphi = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha^\vee, \lambda + \rho \rangle}{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle} \quad (2.3)$$

で与えられる。ただし $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = \lambda(\alpha^\vee)$ である。式 (2.2) を代入すれば、

$$\dim \varphi = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha^\vee, (n_1 + 1)\lambda_1 + \dots + (n_r + 1)\lambda_r \rangle}{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle}$$

となる。これを (2.1) に代入すると、 φ がすべての既約表現をわたるということは上記の一対一対応により n_1, \dots, n_r がすべての非負整数をわたるとい

うことなので、

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=0}^{\infty} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha^\vee, (n_1+1)\lambda_1 + \cdots + (n_r+1)\lambda_r \rangle}{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle} \right)^{-s}$$

となる。ここで分母は n_1, \dots, n_r に無関係なので、

$$K(\mathfrak{g}) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, \rho \rangle \quad (2.4)$$

とおいて和の外に出す。さらに $n_j + 1 = m_j$ とおけば、

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = K(\mathfrak{g})^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r \rangle^{-s} \quad (2.5)$$

を得る。これが Witten のゼータ関数の次元公式を用いた explicit 表示である。

Zagier [74] は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(3), \mathfrak{so}(5)$ (すなわち対応するルート系がそれぞれ A_1, A_2, B_2 型) のときに、(2.5) による計算結果を書き下している。それは、 \mathfrak{g} のルート系が $\Delta = \Delta(\mathfrak{g})$ のときの Witten のゼータ関数を $\zeta_W(s, \Delta)$ と書くことにし、さらに Δ が X_r 型 (ただし $X = A, B, C, D, E, F$ または G) のルート系 $\Delta(X_r)$ のとき、 $\zeta_W(s, \Delta(X_r))$ を単に $\zeta_W(s, X_r)$ と書くことにすれば、

$$\zeta_W(s, A_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \zeta(s), \quad (2.6)$$

$$\zeta_W(s, A_2) = 2^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^s m_2^s (m_1 + m_2)^s}, \quad (2.7)$$

$$\zeta_W(s, B_2) = 6^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^s m_2^s (m_1 + m_2)^s (2m_1 + m_2)^s} \quad (2.8)$$

である。実際に A_r 型のときの (2.5) を計算してみよう。この場合、任意の正のルートは基本ルート $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を用いて

$$\alpha_{ij} = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k, \quad \alpha_{ij}^\vee = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k^\vee$$

の形に書けるから、(2.5) の右辺の積の部分は $\lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ に注意すれば

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} \langle \alpha_i^\vee + \cdots + \alpha_{j-1}^\vee, m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r \rangle^{-s} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s} \end{aligned}$$

で、従って

$$\zeta_W(s, A_r) = K(A_r)^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s} \quad (2.9)$$

となる。特に $r = 1, 2$ の場合が (2.6), (2.7) を与える。

ルート系が A_1 型のときは Witten のゼータ関数は Riemann のゼータ関数に他ならないわけだが、実は A_2 の場合も古典的である。上の (2.7) 式の二重和の部分、あるいはそれはさらに多変数化した

$$\zeta_{MT,2}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} (m_1 + m_2)^{s_3}} \quad (2.10)$$

なる級数の、絶対収束域内の整数点での値について、既に 1950 年に Tornheim [66] が研究を行っている。少し遅れて Mordell [50] もこの級数の $s_1 = s_2 = s_3$ の場合を論じ、 k が正の整数なら $\zeta_{MT,2}(2k, 2k, 2k)$ の値が π^{6k} の有理数倍になることを発見している。これは言うまでもなく、 $\zeta(2k)$ の値に関する Euler の古典的な結果の二重類似である。

本節の冒頭で述べた Witten の結果は、**Witten の体積公式**と言われるが、その結果から

$$\zeta_W(2k, \mathfrak{g}) = C_W(2k, \mathfrak{g}) \pi^{2kn} \quad (2.11)$$

と書けることがわかる。ここに $C_W(2k, \mathfrak{g})$ はある有理数、また n は \mathfrak{g} の正ルートの個数である。これは明らかに、上述した Mordell の結果をさらに一般化したものになっている。

なお筆者は 2002 年頃、[42] において、(2.10) を一般化した

$$\zeta_{MT,r}(s_1, \dots, s_{r+1}) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_r^{s_r} (m_1 + \cdots + m_r)^{s_{r+1}}} \quad (2.12)$$

を導入⁹し、**Mordell-Tornheim の r 重ゼータ関数**と名付けた。同じ頃、全く別の動機から、津村氏も同様の多重級数を考察¹⁰していた。このあたりの経緯については数理研講究録 1549 号 (2007) 所載の津村氏や筆者の記事を参照していただきたいが、こうして導入された Mordell-Tornheim の多重ゼータ関数もなかなか興味深いクラス¹¹を構成しており、本稿でもこの後しばしば登場する。

⁹ $s_1 = \cdots = s_r = 1$ で s_{r+1} が正の整数の場合のこの級数の値については Hoffman [16] も扱っている。全変数が 1 の場合は既に Mordell [50] が論じている。

¹⁰そういう成り行きではあるが、記号 $\zeta_{MT,r}$ の MT は "Mordell と Tornheim" であって、"Matsumoto と Tsumura" ではない。

¹¹なお同じ [42] において筆者は、(2.12) の和に条件 $m_1 < \cdots < m_r$ を付けた部分をも考え、**Apostol-Vu の多重ゼータ関数**と呼んだ。この名称は Apostol と Vu の論文 [5] にちなむが、その性質はその後、岡本氏 [54] [55] によって調べられている。

3 ルート系のゼータ関数

本稿の主題であるルート系のゼータ関数とは、Witten のゼータ関数の explicit 表示式 (2.5) の右辺における多重和の部分を変数化したものである。すなわち、 Δ を有限被約ルート系、 $\mathbf{s} = (s_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+} \in \mathbb{C}^n$ (n は Δ の正ルートの個数) として、

$$\zeta_r(\mathbf{s}, \Delta) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, m_1 \lambda_1 + \cdots + m_r \lambda_r \rangle^{-s_\alpha} \quad (3.1)$$

を**ルート系 Δ のゼータ関数**¹² と名付ける。また $\Delta = \Delta(X_r)$ のとき $\zeta_r(\mathbf{s}, \Delta(X_r))$ を単に $\zeta_r(\mathbf{s}, X_r)$ と書き、 X_r 型のゼータ関数、あるいは単に X_r のゼータ関数などと呼んだりもすることにする。明らかに

$$\zeta_W(\mathbf{s}, \mathfrak{g}) = K(\mathfrak{g})^s \zeta_r((s, \dots, s), \Delta(\mathfrak{g})) \quad (3.2)$$

である。

前節で述べたように、 $\Delta = \Delta(A_2)$ の場合には既に Tornheim [66] がこのような多変数の状況を考察していた。ただし Tornheim も、その後続いた何人かの研究者も、もっぱら特殊値のみを問題にしている。 A_2 のゼータ関数の \mathbb{C}^3 全体への解析接続は筆者の論文 [39] で初めて公表¹³された。

続いて筆者は [42] において、複素多変数関数としての $\zeta_2(\mathbf{s}, B_2)$ を導入し、その解析接続を示した。次いで筆者と津村氏が [47] で任意の正の整数 r に対する $\Delta = \Delta(A_r)$ の場合を論じ、最終的に [25] において一般のルート系に対する (3.1) が定義されたのである。

筆者がこのように多変数化を試みた理由は、Tornheim の論文に示唆されたからではなく、「多変数にして変数の自由度を増やす方が、解析的には扱いやすい」という、[38] 以来感じていた哲学¹⁴によるものである。(例えば 8 節で述べる Mellin-Barnes 積分による論法は、多変数化することで初めて滑らかに機能する。)

ルート系のゼータ関数は、($K(\mathfrak{g})$ の因子を除いて) Witten のゼータ関数の多変数化であることは (3.2) から明らかだが、多変数化したことによって、Euler-Zagier の多重和もその特殊な場合として含む。実際、 $\Delta = A_r$ のときのルート系のゼータ関数は、前節と全く同様の計算により

$$\zeta_r(\mathbf{s}, A_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s_{ij}} \quad (3.3)$$

¹²Witten のゼータ関数は Lie 代数に付随して定義されたものであるが、ルート毎に変数を割り振る (3.1) は、ルート系と Lie 代数との繋がりをむしろ忘れて、抽象的、公理的にルート系を設定する立場で理解するのが妥当な概念なので、このように名付けたのである。

¹³ただし筆者より早く 1999 年頃、秋山氏と江上氏が、それぞれ異なる方法で $\zeta_2(\mathbf{s}, A_2)$ の解析接続に成功している (どちらも未公表)。筆者の方法はそのどちらとも異なる Mellin-Barnes 積分による方法 (8 節参照) である。

¹⁴特に、当時の筆者の問題意識は、フランス学派とも Zagier 的な視点とも異なり、むしろ Atkinson [6] や本橋洋一氏の研究、さらに桂田昌紀氏と筆者との共同研究など、ゼータ関数や L 関数の種々の平均値の解析的挙動の研究に触発されたもの ([45] の記述参照) であった。

(ただしルート α_{ij} に対応する変数を s_{ij} と書いた) となることがわかる。例えば (変数の名前は付け替えて)

$$\zeta_2((s_1, s_2, s_3), A_2) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} (m_1 + m_2)^{-s_3}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \zeta_3((s_1, \dots, s_6), A_3) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} m_3^{-s_3} \\ &\quad \times (m_1 + m_2)^{-s_4} (m_2 + m_3)^{-s_5} (m_1 + m_2 + m_3)^{-s_6} \end{aligned} \quad (3.5)$$

などとなる。この (3.3) において $s_{12}, s_{13}, \dots, s_{1,r+1}$ 以外のすべての変数を 0 とおけば、Euler-Zagier の多重和 (1.1) の形になる。

また、(3.4) は明らかに Tornheim の二重和 (2.10) そのものであるが、より一般の (2.12) も、(3.3) において変数 $s_{12}, s_{23}, \dots, s_{r,r+1}$ と $s_{1,r+1}$ のみを残すことによって得られる。すなわちルート系のゼータ関数という多変数関数のクラスは、Witten のゼータ関数、Euler-Zagier の多重和、Mordell-Tornheim の多重ゼータ関数のすべてを特殊な場合として含む概念であることがわかる。

まず基本的な事実として、任意の Δ に対するゼータ関数が解析接続できることを定理として述べておく。

定理 1 Δ を有限被約ルート系とすると、 $\zeta_r(\mathbf{s}, \Delta)$ は \mathbb{C}^n 全体に有理型に解析接続される。

この結果は実際、既述した Essouabri の (多変数の場合の) 一般論 [11] や小森氏の理論 [24] に含まれているし、筆者も Mellin-Barnes 積分による方法をこの場合を含むように拡張した ([42] [44])。筆者の方法については 8 節で再訪する。

4 Weyl 群の作用とルート系の Bernoulli 数

ルート系に付随したゼータ関数を定義したのであれば、Weyl 群を使って何か結果が導きだせるのではないかと考えるのは自然な着想であろう。既に Zagier [74] の中で、Weyl 群についての対称性を用いて、(2.11) の数論的な証明がスケッチされている。

W を Δ の Weyl 群として、 $\mathbf{s} = (s_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+} \in \mathbb{C}^n$ に対する W の作用を次のように定める。ルート α に付随する (すなわち α に直交する超平面に関する) 鏡映を σ_α と書けば、これら鏡映の全体が W を生成するから、 σ_α の作用だけ定義すればいいが、それを $(\sigma_\alpha \mathbf{s})_\beta = s_{\sigma_\alpha \beta}$ で定めるのである。(ただし、 $\sigma_\alpha \beta$ が負のルートになる可能性もあるが、その場合は $s_{\sigma_\alpha \beta} = s_{-\sigma_\alpha \beta}$ と約束する。) その上で、 \mathbf{s} の関数 $f(\mathbf{s})$ に対する $w \in W$ の作用を、 $(wf)(\mathbf{s}) = f(w^{-1}\mathbf{s})$ で定義する。

以上の定義の下で、

$$S(\mathbf{s}, \Delta) = \sum_{w \in W} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+ \cap w\Delta_-} (-1)^{-s_\alpha} \right) (w\zeta_r)(\mathbf{s}, \Delta) \quad (4.1)$$

というルート系のゼータ関数の「一次結合」を作ると、この $S(\mathbf{s}, \Delta)$ に対しては Weyl 群の対称性がうまく働いて、次の定理が成り立つ。

定理 2 ([30, III, Theorem 6])¹⁵ すべての $\alpha \in \Delta_+$ に対して $\Re s_\alpha > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} S(\mathbf{s}, \Delta) = & (-1)^n \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(2\pi i)^{s_\alpha}}{\Gamma(s_\alpha + 1)} \right) \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} \phi(s_\alpha, x_\alpha) \right) \\ & \times \left(\prod_{j=1}^r \phi \left(s_{\alpha_j}, - \sum_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} x_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda_j \rangle \right) \right) \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} dx_\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

が成り立つ。ただし上式において

$$\phi(s, x) = -\frac{\Gamma(s+1)}{(2\pi i)^s} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^s}$$

である。

特に $\mathbf{s} = \mathbf{k} = (k_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+}$, $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ のときには、よく知られているように

$$\phi(k_\alpha, x) = B_{k_\alpha}(\{x\}) \quad (4.3)$$

である。(ただし $B_k(\cdot)$ は k 次の Bernoulli 多項式で、 $\{x\}$ は x の小数部分。例えば [4, Theorem 12.19] を見よ。) よって

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{k}}(\Delta) = & \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} B_{k_\alpha}(x_\alpha) \right) \\ & \times \left(\prod_{j=1}^r B_{k_{\alpha_j}} \left(\left\{ - \sum_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} x_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda_j \rangle \right\} \right) \right) \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} dx_\alpha \end{aligned} \quad (4.4)$$

とおけば、定理 2 から直ちに

$$S(\mathbf{k}, \Delta) = (-1)^n \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!} \right) B_{\mathbf{k}}(\Delta) \quad (4.5)$$

¹⁵ この結果は 2006 年頃には既に得られていて、[25] にもアナウンスされているのだが、投稿した 2008 年の Edinburgh での国際会議の報告集の出版が大幅に遅れ、結局 2012 年によく出版された。

が言える。

$\Delta = \Delta(A_1)$ の場合、 $\Delta_+ = \Psi = \{\alpha_1\}$ である。この唯一の正ルート α_1 に対応する変数を $k = k_{\alpha_1}$ と書こう。この場合 $\Delta_+ \setminus \Psi$ は空集合なので、空和は 0、空積は 1 と理解すれば、(4.4) は $B_k(A_1) = B_k(0)$ で、これは古典的な Bernoulli 数 B_k (あるいは Seki-Bernoulli 数) に他ならない。従って (4.4) の $B_{\mathbf{k}}(\Delta)$ は Bernoulli 数のルート系的な一般化であり、**ルート系の Bernoulli 数**¹⁶ と呼ぶべきものである。

古典的な Bernoulli 数については、種々の定義の仕方が知られているが、そのうちのひとつが生成関数による定義

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \quad (4.6)$$

であった。ルート系の Bernoulli 数についても、同様の生成関数を見つけることができる。つまり、

$$F(\mathbf{t}, \Delta) = \sum_{\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} B_{\mathbf{k}}(\Delta) \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{t_{\alpha}^{k_{\alpha}}}{k_{\alpha}!} \quad (4.7)$$

(ただし $\mathbf{t} = (t_{\alpha})$, $\mathbf{k} = (k_{\alpha})$) となるような、explicit に書ける関数 $F(\mathbf{t}, \Delta)$ を求めることができる ([30, III, Theorem 7], [28, Theorem 4.1])。その一般式は少々複雑なのでここには書き下さないが、 $\Delta = \Delta(A_1)$ のときの $F(\mathbf{t}, A_1)$ はもちろん (4.6) の左辺と一致する。 $\Delta = \Delta(A_2)$ のときには、 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ と書くと

$$F(\mathbf{t}, A_2) = \frac{t_1 t_2 t_3 (e^{t_3} - e^{t_1+t_2})}{(e^{t_1} - 1)(e^{t_2} - 1)(e^{t_3} - 1)(t_3 - t_1 - t_2)} \quad (4.8)$$

で与えられる ([29, Example 9.2] [30, III, (251)])。その他の具体例は (さらに複雑になるが) C_2 と A_3 の場合が [30, III] に、 G_2 の場合が [30, IV] に述べられている。これらの生成関数を展開することにより、個々のルート系に対して、その Bernoulli 数 $B_{\mathbf{k}}(\Delta)$ の値を具体的に計算することができる。特にその値は有理数である。

さて $S(\mathbf{k}, \Delta)$ は (4.1) で $(w\zeta_r)(\mathbf{s}, \Delta)$ たちの一次結合として定義されていたが、ここでもしすべての s_{α} が同じ値ならば、 \mathbf{s} は Weyl 群の作用で不変である。そこで特に、すべての s_{α} が正の整数 $2k$ であれば、(4.1) における符号因子の寄与もなくなり、単に $S(2\mathbf{k}, \Delta) = |W|\zeta_r(2\mathbf{k}, \Delta)$ ($\mathbf{k} = (k, \dots, k)$) となる。従ってこの場合の (4.5) は、Witten の (2.11) を導くと同時に、そこに現れる定数 $C_W(2k, \mathfrak{g})$ の具体的な値の計算法¹⁷をも与えていることになる。

¹⁶実は [30, III] においては、(3.1) にさらに指数因子を付加した、Lerch 型とも言うべきゼータ関数が導入されており、対応して $B_{\mathbf{k}}(\Delta)$ を一般化した、**ルート系の Bernoulli 多項式**も定義されている。このように一般化しておいた方が技術的に都合が良い場面もある ([37, Remark 1] 参照) し、また特に [28] で考察したような、(3.1) を Dirichlet 指標で捻った**ルート系の L 関数**の特殊値の記述にはルート系の Bernoulli 多項式が不可欠である。

¹⁷Witten ゼータ関数の特殊値の計算法としては Szenes [65] や Gunnells-Sczech [14] によって提案されたものもある。

A, D, E 型のルート系ではルートの長さはすべて同じ (simply-laced) だが、他のルート系では、ルートの長さに長短が生じる。この場合、Weyl 群の軌道は長さの等しいルートの全体になる。従って、すべての s_α が同じ値でなくても、長さの等しいルートに対応する変数の値が一致していれば、やはり上述と同様の不変性が成り立つ。以上の議論は、結局、次の結果を導く。

定理 3 ([30, III, Theorem 8]) Δ は既約とし、 $\mathbf{k} = (k_\alpha)$ 、ただし長さの等しいルートに対応する k_α の値はすべて等しいものとする。このとき

$$\zeta_r(2\mathbf{k}, \Delta) = \frac{(-1)^n}{|W|} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(2\pi i)^{2k_\alpha}}{(2k_\alpha)!} \right) B_{2\mathbf{k}}(\Delta) \quad (4.9)$$

が成り立つ。

具体例を少し述べよう。変数の値がすべて等しい場合としては、例えば

$$\zeta_2((2, 2, 2), A_2) = \frac{\pi^6}{2835} \quad (\text{Mordell [50] が得ていた結果}),$$

$$\zeta_2((2, 2, 2, 2), C_2) = \frac{\pi^8}{302400},$$

$$\zeta_3((2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2), C_3) = \frac{19}{8403115488768000} \pi^{18}$$

などとなる。軌道毎に変数の値が一致している場合の例としては

$$\zeta_2((2, 4, 4, 2), C_2) = \frac{53}{6810804000} \pi^{12}$$

を挙げておこう。ただしここで C_2 型、 C_3 型のゼータ関数の具体形はそれぞれ

$$\begin{aligned} \zeta_2((s_1, s_2, s_3, s_4), C_2) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \\ &\quad \times (m_1 + m_2)^{-s_3} (m_1 + 2m_2)^{-s_4}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \zeta_3((s_1, \dots, s_9), C_3) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} m_3^{-s_3} \\ &\quad \times (m_1 + m_2)^{-s_4} (m_2 + m_3)^{-s_5} (2m_2 + m_3)^{-s_6} (m_1 + m_2 + m_3)^{-s_7} \\ &\quad \times (m_1 + 2m_2 + m_3)^{-s_8} (2m_1 + 2m_2 + m_3)^{-s_9} \end{aligned} \quad (4.11)$$

で与えられる。

5 整数点における値とそれらの間の関係式

前節の定理 3 は、正の偶数点におけるルート系のゼータ関数の特殊値を与える結果だったが、変数の値に奇数が含まれる場合はどうであろうか。古典

的な Riemann ゼータ関数の場合ですら、奇数点での値は未だによく分かっていないことから考えれば、変数がすべて偶数である場合の状況より問題は相当に困難になることが予想される。一般的にはたしかにその通りであるが、それでも実は、奇数を含む場合でも種々の結果を得ることができる。

$\Delta = \Delta(A_2)$ の場合には、既に Tornheim [66] が、 $m_1 + m_2 + m_3$ が奇数のとき、 $\zeta_2((m_1, m_2, m_3), A_2)$ が Riemann ゼータ関数の整数点での値の有理数係数の多項式で書けることを証明している。(後に [17] がより明示的な形の式を与えている。) これはいわゆる ”parity result” (すなわち、 r と $m_1 + \dots + m_r$ の偶奇が異なるとき、その r 重ゼータ値を $r-1$ 重以下の多重ゼータ値で表す類の結果¹⁸⁾) の一種であって、後に津村氏 [70] によって一般の r 重 Mordell-Tornheim ゼータ関数の場合に一般化されている。多重三角関数の対数を含む積分表示を用いた小野寺氏の研究 [60] もある。

一方 Subbarao と Sitaramachandrarao [64] は

$$\zeta_2((2l, 2m, 2n), A_2) + \zeta_2((2l, 2n, 2m), A_2) + \zeta_2((2n, 2m, 2l), A_2)$$

の明示的な式を示し、続いて津村氏 [67] が奇数を含む場合への拡張を与えた。すなわち津村氏は、 $k, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k+m \geq 2$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とするとき

$$\zeta_2((k, l, m), A_2) + (-1)^k \zeta_2((k, m, l), A_2) + (-1)^l \zeta_2((l, m, k), A_2) \quad (5.1)$$

が Riemann ゼータ関数の整数点での値の有理数係数の多項式で書ける¹⁹⁾ ことを示した。この論文で津村氏が用いた方法は、考えている Dirichlet 級数 (例えば $\sum m^{-s}$) にまず収束を早くする因子 (例えば $(-u)^{-m}$, $u > 1$) を付け加えて、収束の良い状態で式変形をしておいてから最後に $u \rightarrow 1$ とするもので、Riemann ゼータ関数の負の偶数点での値が 0 になる、という事実が議論の途中で本質的な役割を果たす。この方法を我々は *u-method* と呼ぶことにしよう。この津村氏の結果と方法は、次節で述べる関数関係式の理論への道を開くことになった先駆的なものである。

他のルート系の場合にも、parity result の研究は行われている。その嚆矢は B_2 の場合を扱った津村氏の論文 [68] であろう。(B_2 については Zhao [76] もある。) A_3 型については筆者と津村氏の [47] や、Zhao-Zhou [78] がある。 G_2 型の場合は Zhao [77] が先鞭をつけ、続いて岡本氏 [56] [57] が、先行する [53], [60], [68] のアイデアを融合させた理論を構築して、その中で特に、 G_2 型のルート系のゼータ関数のある種の特値が Riemann ゼータ関数と Clausen 関数の値で書けることを示した。その後、[30, V] においても G_2 型の parity result が論じられているが、その論文の最終節で提起されているように、 G_2 型の parity result は、Dirichlet の L 関数や Clausen 関数を含めた形で定式化する必要があるのかもしれない。

¹⁸⁾Euler-Zagier 和の場合の parity result は Euler に遡る歴史を持ち、津村氏 [69] と、また独立に井原氏、金子氏、Zagier の共著 [18] によって一般的な定理が得られた。

¹⁹⁾上式は、[67] の Theorem 1 で文字 (r, s, t) を (k, m, l) に置き換え、 $(-1)^k$ をかけたものである。

論文 [30, V] においては、前節で紹介した一般論を奇数を含む特殊値の場合に適用しようとする試みが提示されている。偶数点を扱っている限り、前節でも述べたように、(4.1) 式において符号部分を考える必要はない。しかし変数に奇数値が含まれると符号部分が自明ではなくなり、多くの項がキャンセルしてしまう可能性がある。そうなってしまうと (4.1) からは何の情報も取り出せない。論文 [30, V] では、どのような場合に非自明な情報が取り出せるかについて、ルート系の理論の立場からある程度の解答が与えられており、その応用として、奇数変数を含む G_2 のゼータ関数の特殊値についての結果が述べられている。一例だけ挙げておこう：

$$\zeta_2((2, 1, 1, 5, 3, 3), G_2) = \frac{5}{4}\zeta(4)\zeta(11) + \frac{1043857}{23328}\zeta(2)\zeta(13) - \frac{41971473}{559872}\zeta(15), \quad (5.2)$$

ただし G_2 のゼータ関数の具体形は

$$\zeta_2((s_1, \dots, s_6), G_2) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} (m_1 + m_2)^{-s_3} \times (m_1 + 2m_2)^{-s_4} (m_1 + 3m_2)^{-s_5} (2m_1 + 3m_2)^{-s_6} \quad (5.3)$$

である。

6 関数関係式

前節で述べたような「特殊値間の関係式」は、Euler-Zagier 型の多重和の場合には（特殊値、すなわち MZV が \mathbb{Q} 上で張るベクトル空間の次元についての Zagier の予想などを動機付けとして）遥かに多くの研究²⁰がなされて来ている。そして、MZV の間になりたつ非常に多くの関係式が発見されている。

すると、解析的な立場から見たときに自然に浮かぶひとつの疑問は、それらの関係式が整数点においてだけ成立しているものであるのか、それとも複素関数としての $\zeta_{EZ,r}$ たちの間に成り立っている関係式を整数点のところで見ているに過ぎないのか、どちらであろう、ということである。筆者はこの疑問について 2000 年頃から、しばしば研究集会の場などで発言²¹してきた。

もちろん、調和積公式 (1.4)（と、その r 重への一般化）は明らかにそのひとつの解答を与えている。筆者の疑問を正確に言えば、MZV の間の関係式が関数としての関係式になっているのは、調和積公式の類以外にはないのか、ということである。この疑問に最初から強い興味を示してくれた方もいらっしやった²²が、この問題を考えようとするとき大きな障害となるのは、

²⁰例えば [3] 参照。

²¹文献上での言及は [44] が最初である。

²²例えば伊原康隆先生。

MZV の関係式の多くが Drinfel'd-Kontsevich 型の反復積分表示を基盤にして示されている、ということであった。この積分表示は整数の値そのものが積分の回数を与えるので、整数点以外には拡張のしようがないのである。

しかし、前節で言及した津村氏の u -method は、反復積分表示を用いない、関係式の導出方法を与えている。従ってこの方法で得られた結果は整数点以外への拡張が可能かもしれない。津村氏 [71] はこのことに着目して考察を行ない、筆者の疑問に対する最初の非自明な解答を見いだした。それは (5.1) を複素変数を含む形に一般化した、次のような結果²³ である。

定理 4 ([71]) $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $s \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \zeta_2((k, l, s), A_2) + (-1)^k \zeta_2((k, s, l), A_2) + (-1)^l \zeta_2((l, s, k), A_2) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k+l-2j-1}{l-1} \zeta(2j) \zeta(s+k+l-2j) \\ & \quad + 2 \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \binom{k+l-2j-1}{k-1} \zeta(2j) \zeta(s+k+l-2j) \end{aligned} \quad (6.1)$$

が成り立つ。

この定理では s が複素変数なので、関数としての関係式、つまり**関数関係式**を与えている。そして $s = m \in \mathbb{Z}$ と特殊化すると左辺は (5.1) に一致するので、[67] で得られた値の関係式を含む式になっているわけである。

また、定理 1 によって (6.1) の両辺は s について \mathbb{C} 全体に解析接続できることがわかるから、上式自身も (特異点を除く) \mathbb{C} 全体で成り立つ。

上の定理において $(k, l) = (3, 2)$ ととると

$$\begin{aligned} & \zeta_2((3, s, 2), A_2) - \zeta_2((3, 2, s), A_2) - \zeta_2((2, s, 3), A_2) \\ &= 10\zeta(s+5) - 6\zeta(2)\zeta(s+3) \end{aligned}$$

を得る。ここでさらに $s = 0$ とすると、 $\zeta_2((k, 0, l); A_2) = \zeta_{EZ,2}(k, l)$ および $\zeta_2(3, 2, 0), A_2) = \zeta(3)\zeta(2)$ に注意すれば

$$\zeta_{EZ,2}(3, 2) - \zeta_{EZ,2}(2, 3) = 10\zeta(5) - 5\zeta(2)\zeta(3)$$

となる。これと、(1.4) で $(s_1, s_2) = (3, 2)$ とおいた

$$\zeta_{EZ,2}(3, 2) + \zeta_{EZ,2}(2, 3) = \zeta(2)\zeta(3) - \zeta(5)$$

とを合わせれば、

$$\zeta_{EZ,2}(3, 2) = \frac{9}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3), \quad \zeta_{EZ,2}(2, 3) = -\frac{11}{2}\zeta(5) + 3\zeta(2)\zeta(3) \quad (6.2)$$

²³ただし、[71] における original statement では右辺はもっと複雑な形をしている。しかし [46] の Lemma 2.1 を適用することにより、ここで述べた形になる。論文 [27] の Theorem 3.1 を参照。

が示される。この (6.2) はもともとは Euler-Zagier 和の理論の枠内で、二重シャッフル関係式として示されていたものであるが、我々はそれが関数関係式 (6.1) の特殊化として得られることを知った。これはつまり、本節冒頭で述べた筆者の疑問に対するひとつの解答となっている。

定理 4 を巡るひとつのエピソードに触れておこう。津村氏の論文をプレプリント段階で読んだ中村氏は、(4.3) などの Bernoulli 多項式の性質を巧妙に用いた、定理 4 の別証明 [52]²⁴ に成功した。当時まだ名古屋大学の大学院生だった氏は、2005 年の年末 (12 月 26 日)、名大の解析数論セミナーでこの別証明について報告した。このセミナーの席上、筆者は中村氏の議論をルート系の立場から見て一般化できないか、という点を問題にした。すると、セミナーが終わった後しばらくして、小森氏が筆者の研究室にやってきた。セミナーでの報告の中で中村氏は、 $\zeta_2(s, A_2)$ の二重和をいかに分割するか、二次元の座標平面上で図示して解説したのだが、たまたまこのセミナーに出席していた小森氏は、それが A_2 型ルート系の Weyl chamber への分割に他ならないことを指摘したのである。この会話が 4 節で述べた、ルート系のゼータ関数への Weyl 群の作用に関する理論の出発点であり、定理 4 の左辺は (4.1) の $S(s, \Delta)$ の原型を与えるものであった。

A_3 の場合の関数関係式は [47] [25] [27] で論じられた。[47] においては一部の変数が 0 であるような特殊な場合しか扱われていないが、これは技術的な理由によるもので、[25] [27] では u -method を単純に適用するだけでなく、分子にある種の parameter を付加する工夫を加味することによってこの技術的困難を打破し、より一般的な形の関数関係式を得ることに成功している。また [27] の Section 7 で、同様の方法によって一般に A_r 型のルート系のゼータ関数の関数関係式が得られるであろうことが示唆されており、実際に A_4 の場合のある結果が証明抜きでアナウンスされている。

さらに [27] では $C_2 (\simeq B_2)$, B_3 , C_3 の場合の関数関係式も得られている。 G_2 型の場合の関数関係式は [30, IV] [30, V] で示されている。また中村氏も彼の方法を発展させて、[53] において A_2 型、 A_3 型、 B_2 型のゼータ関数の関数関係式を論じている。 A_3 型のゼータ関数についての Zhou, Bradley と Cai の研究 [79] もある。その研究をさらに発展させて、池田氏と松岡氏は [20] において、 A_2 , A_3 , A_4 型のゼータ関数の関数関係式を得ている。

上述の定理 4 においては、式に含まれている複素変数は s 一個だけであった。しかし、その後得られたいろいろな関数関係式の中には、複素変数を複数個含む形のものも存在する。(例えば [47, Theorem 5.10], [25, Theorem 3.4], [27, Theorem 9.3]、また [53], [79] など。) A_3 型の例をひとつだけ引用しておこう。

定理 5 ([25, Theorem 3.4]) 正の整数 p, q と非負整数 r 、そして複素数

²⁴Zagier の九州大学での講義録に述べられているアイデアが元になっている。

s_1, s_2, s_3 に対して、

$$\begin{aligned}
& \zeta_3((2p, 2r, 2q, s_1, s_3, s_2), A_3) + \zeta_3((2p, s_1, s_3, 2r, 2q, s_2), A_3) \\
& + \zeta_3((2q, 2r, 2p, s_2, s_3, s_1), A_3) + \zeta_3((2q, s_2, s_3, 2r, 2p, s_1), A_3) \\
& = 2 \sum_{j=0}^p \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2p-2j} \binom{2q-1+k}{k} \binom{2p+2r-2j-k-1}{2p-2j-k} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1+2p+2r-2j-k, s_3+2q+k, s_2), A_2) \\
& + 2 \sum_{j=0}^q \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2q-2j} \binom{2p-1+k}{k} \binom{2q+2r-2j-k-1}{2q-2j-k} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1, s_3+2q+k, s_2+2q+2r-2j-k), A_2) \\
& + 2 \sum_{j=0}^r \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2q-1+k}{k} \binom{2p+2r-2j-k-1}{2p-k-1} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1+2p+2r-2j-k, s_3+2q+k, s_2), A_2) \\
& + 2 \sum_{j=0}^r \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2q-1} \binom{2p-1+k}{k} \binom{2q+2r-2j-k-1}{2q-k-1} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1, s_3+2q+k, s_2+2q+2r-2j-k), A_2) \tag{6.3}
\end{aligned}$$

がなりたつ。

我々は 4 節において、(5 節で論じたような) 特殊値の間の関係式が成り立つ理由を与える、Weyl 群の作用に関する結果を紹介した。同様の理由付けは関数関係式に対しても可能であり、それは事実、定理 2 のある種の一般化 ([30, III, Theorem 5], [30, V, Theorem 2.1]) によって与えられる。

ここで強調しておきたいことは、Euler-Zagier 和の枠内のみで考えた場合には、依然として筆者の疑問は未解決のまま、ということである。Euler-Zagier 和の枠内では、調和積公式以外には非自明な関数関係式は全く存在しない²⁵ のかもしれない。筆者の知る限り、こうした可能性はおそらく中村隆氏が初めて言い出したのだと思うが、印刷物上でこういうことを論じた文献はまだ書かれていないようである。

7 ルート系のゼータ関数としての Euler-Zagier 和

前節の末尾で述べたように、関数関係式を考察するには、Euler-Zagier 和の枠内に留まらず、ルート系のゼータ関数という、より広い枠組みを視座に据えるのが適当なのであった。

²⁵超平面 Ω_{2k+1} に制限すれば関数等式 (1.6) が Euler-Zagier 和の枠内での関数関係式を与える、と言えるかもしれないが、これでは満足できる解答とは言えないだろう。

これ以外にも、ルート系のゼータ関数という広い立場から眺めることによって、Euler-Zagier 和の理論に対してもいろいろと新しい結果を導き出せることが次第にわかってきた。本節ではこうした話題について解説する。

既に 3 節で、 A_r 型のルート系のゼータ関数のいくつかの変数を 0 とおくと Euler-Zagier の多重和になることを注意した。この立場からシャッフル積について論じた論文が [32] である。

MZV は Drinfel'd の反復積分表示を持っているので、ふたつの MZV の積はふたつの反復積分の積になるが、これはいくつかの反復積分の和に書き直せることが知られている。この事実を MZV の言葉に翻訳すれば MZV の積を MZV の和で書く関係式が得られるが、これが**シャッフル積**、と呼ばれる手法である。

調和積とシャッフル積は、MZV の積のそれぞれ異なる表示を与えるので、このふたつを等置すると MZV たちの間に成り立つ関係式が導出される。こうして得られる関係式を**二重シャッフル関係式**と総称する。

シャッフル積はこのように Drinfel'd の積分表示に持ち込んで、それを Hoffman 代数という代数的な枠組みで捉え、代数的操作で変形してから再び MZV の世界に戻る、というのが本来の手法であったため、エレガントではあるが、解析的に何をやっているのかがわからなくなってしまう問題点があった。特に Drinfel'd の表示が存在するのは整数点に限られるので、前節でも言及したように、この手法に頼ってはい関数関係式は決して示せない。

しかし [32] において、ルート系のゼータ関数の範囲にまで拡げて考察すると、シャッフル積のプロセスは単なる部分分数分解として解釈できることが見いだされた。これは二重シャッフル関係式の新しい証明を与えたことにもなる。このアイデアは最近、小野氏と山本氏 [59] によって、有限多重ポリログの研究にも応用された。

また、部分分数展開は整数点以外の状況にも容易に拡張できるので、我々の手法を使えば、二重シャッフル関係式を特殊な場合として含む関数関係式の導出も可能になる。例えば

定理 6 ([32, Theorem 3]) 任意の $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k-1+i}{i} \zeta_{EZ,3}(s, l-i, k+i) \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{l-1+i}{i} \zeta_3((k-i, s, 0, 0, 0, l+i), A_3) \\ & = \zeta_{EZ,3}(s, k, l) + \zeta_{EZ,3}(s, l, k) + \zeta_{EZ,3}(k, s, l) + \zeta_{EZ,2}(s, k+l) \\ & \quad + \zeta_{EZ,2}(k+s, l) \end{aligned} \tag{7.1}$$

が成り立つ。

これが二重シャッフフル関係式を含むことは、実際に (7.1) の特殊化として、

$$6\zeta_{EZ,3}(1, 1, 3) + \zeta_{EZ,3}(1, 2, 2) = \zeta_{EZ,2}(1, 4) + \zeta_{EZ,2}(3, 2)$$

のような二重シャッフフル関係式が導かれることからわかる。

さて [32] では、Euler-Zagier 和を A 型のルート系のゼータ関数の特殊化として考察したわけだが、これが可能な唯一の観点というわけではない。論文 [35] では、今度は Euler-Zagier 和を C 型ルート系のゼータ関数の特殊化と見る理論が展開されている。

既に 4 節で C_2 型、 C_3 型のルート系のゼータ関数の具体形を紹介したが、ここで一般の C_r 型ルート系のゼータ関数の具体形を書き下そう。

そのために、まず C_r 型ルート系の構造を思い出す。実 r 次元ベクトル空間の任意のベクトルにその i 番目の座標を対応させる座標関数を ε_i と書けば、基本ルートは $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{r-1} = \varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r$ と $\alpha_r = 2\varepsilon_r$ で与えられる。そして正のルートの全体は

$$\{2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq r\}$$

である。ここで明らかに $2\varepsilon_i$ たちの方が $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ たちよりも長いルートである。対応するコルートは、 e_i を第 i 成分だけが 1 の単位ベクトルとすると、それぞれ e_i ($1 \leq i \leq r$), $e_i \pm e_j$ ($1 \leq i < j \leq r$) となる。これらは基本コルート $\alpha_1^\vee = e_1 - e_2, \alpha_2^\vee = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{r-1}^\vee = e_{r-1} - e_r, \alpha_r^\vee = e_r$ を用いて

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{i \leq k \leq r} \alpha_k^\vee, & e_i - e_j &= \sum_{i \leq k < j} \alpha_k^\vee, \\ e_i + e_j &= \sum_{i \leq k < j} \alpha_k^\vee + 2 \sum_{j \leq k \leq r} \alpha_k^\vee \end{aligned}$$

と書けるので、(3.1) にこれらのデータを入れて書き下せば、一般の C_r 型ルート系のゼータ関数は次の式で与えられることがわかる：

$$\begin{aligned} \zeta_r(\mathbf{s}, C_r) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i \leq r} (m_i + \cdots + m_r)^{-s_i} \\ &\times \prod_{1 \leq i < j \leq r} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s_{ij}^-} \\ &\times \prod_{1 \leq i < j \leq r} (m_1 + \cdots + m_{j-1} + 2(m_j + \cdots + m_r))^{-s_{ij}^+}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

ただし $\mathbf{s} = ((s_i), (s_{ij}^-), (s_{ij}^+))$ であつて、 s_i, s_{ij}^-, s_{ij}^+ はそれぞれルート $2\varepsilon_i, \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j$ に対応させた複素変数である。

上で注意したように、長いルートは $2\varepsilon_i$ たちであつた。そこで、これらに対応する変数 s_i だけを残して他の変数をすべて 0 とおくと、上式は

$$\zeta_r(((s_i), \mathbf{0}, \mathbf{0}), C_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i \leq r} (m_i + \cdots + m_r)^{-s_i} \quad (7.3)$$

となり、これは再び Euler-Zagier 和に他ならない。つまり Euler-Zagier 和は C 型のルート系のゼータ関数の特殊化とも見なせるのである。

この観点の持つひとつの重要性は、Weyl 群の軌道が長さの等しいルートの全体であるという、4 節でも触れた事実である。(7.3) において残っているのは長さが等しいルートに対応する変数のみであるから、この立場では Euler-Zagier 和に対する Weyl 群の作用を論じることが可能になる。そして [35] ではこのことを実際に用いて、Euler-Zagier 和に関する新しい「制限された和公式」²⁶ を証明することに成功している。

また、 B 型ルート系と C 型ルート系とは、互いに「双対」とも言うべき密接な関係にある。従って C 型ルート系のゼータ関数に対して展開した上の議論と類似した議論を、 B 型の場合に展開することもできるはずである。このアイデアを実行してみると、 B 型のルート系のゼータ関数で、今度は短いルートに対応する変数だけ残したものが、

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i \leq r} (2(m_{r-i+1} + \cdots + m_{r-1}) + m_r)^{-s_i} \quad (7.4)$$

の形になることがわかる。これは言わば Euler-Zagier 和の「双対」であり、この和についても Euler-Zagier 和に対するものと平行した理論が建設できると思われる。事実、我々は [35] において (7.4) に対するある種の parity result を証明したし、その結果はまた、二重ゼータ値の張る空間の次元に関する最近の金子氏と田坂氏の研究 [21] に応用されている。

8 積分表示と帰納的構造

以上の各節で見て来たように、ルート系のゼータ関数は種々の興味深い性質を持ち、さらに深い研究が望まれる研究対象である。我々は 1 節において、Euler-Zagier 和の解析的な研究を進めたい、という問題意識を述べたが、同様にルート系のゼータ関数についても、その真の理解のためには、解析的な方向からの研究が必要不可欠である。

ルート系のゼータ関数の解析接続に関する定理は既に 3 節で述べたが、本節ではその証明法のうち、筆者が提出した Mellin-Barnes 積分による方法を紹介し、その方法を適用することによって浮かび上がる、ルート系のゼータ関数たちとの帰納的な関係について述べる。

本稿で **Mellin-Barnes の積分公式**と呼んでいるのは、 $s, \lambda \in \mathbb{C}$, $\Re s > 0$, $\lambda \neq 0$, $|\arg \lambda| < \pi$ に対して

$$\Gamma(s)(1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(s+z)\Gamma(-z)\lambda^z dz \quad (8.1)$$

²⁶Hoffman [16] 参照。

で与えられる式²⁷である。ただし $-\Re s < c < 0$ で、積分路は $c - i\infty$ から $c + i\infty$ に至る、鉛直方向の直線である。

ゼータ関数、 L 関数の平均値の研究にこの (8.1) を応用した桂田氏の研究 [22] [23] に触発された筆者は、(8.1) を用いれば、Euler-Zagier 和や Mordell-Tornheim の多重ゼータ関数、さらにルート系のゼータ関数などの多重級数の解析接続ができることを発見した ([39] [40] [41] [42] [44])。その方法を、 A_2 型のルート系のゼータ関数 (3.4) を例にとって説明しよう。

まず $\Re s_j > 1$ ($1 \leq j \leq 3$) とすると、(3.4) の級数は明らかに絶対収束している。この式の分母の $(m_1 + m_2)^{-s_3}$ を

$$m_1^{-s_3} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{-s_3}$$

と変形してから、この第二の因子に ($\lambda = m_2/m_1$ として) (8.1) を適用すると

$$(m_1 + m_2)^{-s_3} = m_1^{-s_3} \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^z dz$$

($-\Re s_3 < c < 0$) となる。これを (3.4) に代入し、積分と和の順序を交換すれば

$$\zeta_2(\mathbf{s}, A_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{-s_1 - s_3 - z} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_2^{-s_2 + z} dz$$

である。条件 $\Re s_j > 1$, $-\Re s_3 < c < 0$ の下で右辺のふたつの級数は絶対収束し、順序交換も正当化されて、

$$\zeta_2(\mathbf{s}, A_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \zeta(s_1 + s_3 + z)\zeta(s_2 - z) dz \quad (8.2)$$

を得る。この変形のポイントは、定義式 (3.4) においては $(m_1 + m_2)^{-s_3}$ なる因子のせいで分離が不可能だった、 m_1 に関する和と m_2 に関する和を、(8.1) の効力によって分離できた点にある。

さて (8.2) の被積分関数は $z = -s_3 - l$, $z = l$, $z = 1 - s_1 - s_3$, $z = s_2 - 1$ (ただし $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に極を持つ。これらのうち、積分路を右に動かした時に遭遇するのは $z = l$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) と $z = s_2 - 1$ である。そこで積分路を $\Re z = M - \varepsilon$ (M は十分大きい正整数) まで平行移動し、途中で通過する極の留数を数え上げれば、

$$\begin{aligned} \zeta_2(\mathbf{s}, A_2) &= \frac{\Gamma(s_2 + s_3 - 1)\Gamma(1 - s_2)}{\Gamma(s_3)} \zeta(s_1 + s_2 + s_3 - 1) \\ &+ \sum_{k=0}^{M-1} \binom{-s_3}{k} \zeta(s_1 + s_3 + k)\zeta(s_2 - k) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{(M-\varepsilon)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \zeta(s_1 + s_3 + z)\zeta(s_2 - z) dz \quad (8.3) \end{aligned}$$

²⁷この式は例えば [72, Section 14.51] に紹介されているが、超幾何関数の Barnes による積分表示 [7] の特殊な場合である。Barnes の研究には Pincherle, Mellin らの先行者がいるが、特に Mellin [48] [49] は既に、この種の積分を多重ゼータ関数の研究に応用している。

となる。この右辺の積分は、上述した被積分関数の極のリストからわかるように、

$$\Re s_3 > -M + \varepsilon, \Re(s_1 + s_3) > 1 - M + \varepsilon, \Re s_2 < 1 + M - \varepsilon \quad (8.4)$$

において収束して正則となる。また右辺の残りの項はガンマ関数と Riemann ゼータ関数で書けているから、もちろん有理型に解析接続できる。 M をいくらでも大きくとっていいことに注意すれば、以上の議論で $\zeta_2(s, A_2)$ の \mathbb{C}^3 全空間への有理型接続ができたことになる。しかも (8.3) から、特異点がどこにあるかも容易に見て取ることができる。

同様の議論を、任意のルート系に対して適用することができる。例えば A_r 型のゼータ関数であれば、(8.1) を使って m_1 に関する和を分離することにより、Riemann ゼータ関数と A_{r-1} 型のルート系のゼータ関数を含む積分（一般には多重積分になるが）で書けることがわかる。そこで、 A_{r-1} 型のゼータ関数の解析接続が既に言っていると仮定すれば、積分路を変形する議論により、 A_r 型のゼータ関数の解析接続も示すことができる。

ただし、上では積分路の変形は単純な平行移動だったが、それだけで常に十分なわけではない。一般にはより複雑な積分路を考える必要があることを、筆者は [42] で最初に指摘²⁸した。 A_3 型を考えるときに既にそうした複雑な積分路が必要になることは [47] で詳述されている。

また、この方法は当然、 $s_1 = \dots = s_r = s$ と置くことで Witten のゼータ関数の解析接続も与えるが、このように一変数にした状況でも、積分の中に現れるのは多変数のルート系のゼータ関数である。つまり多変数化しなければこの議論は成り立たないのであって、これが多変数化したことの大きいメリットのひとつである。

ここで A_r 型ルート系の Dynkin 図形を思い出してみると、上の積分表示は、Dynkin 図形の一番左にある辺を切断することに対応している、と見なすこともできるであろう。一番左側の辺を切り離せば、残るのはその左に A_1 型の Dynkin 図形、右には A_{r-1} 型の Dynkin 図形であり、積分の中に出てくるゼータ関数とうまく対応している。

同様のことが他の系列のルート系に対しても成り立つ。すなわち、(8.1) を適用することで、 $X = B, C, D$ などに対しても、 X_r 型のゼータ関数を、Riemann ゼータ関数と X_{r-1} 型ゼータ関数の積を含む積分で表示でき、それによって解析接続も証明できる。対応する Dynkin 図形の分割は図 1 の通りである。

逆に、Dynkin 図形の任意の切断に対して、対応する Mellin-Barnes 積分表示を求めることができる。例えば B_r 型、 C_r 型の場合、二重線になっている辺があるが、ここを切断する操作に対応して、 B_r, C_r 型のゼータ関数を

²⁸[42] ではかなり凝縮した書き方がなされているので、読みにくいかもしれない。[44] や [47] の方が記述が丁寧である。

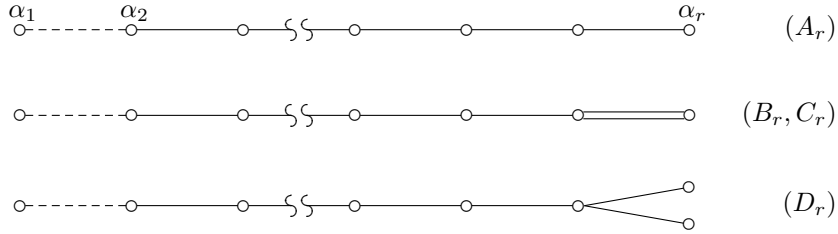


図 1:

A_{r-1} 型ゼータ関数と Riemann ゼータ関数で書く積分表示が可能である。同様に D_r 型についても A 型に帰する積分表示ができる (図 2)。

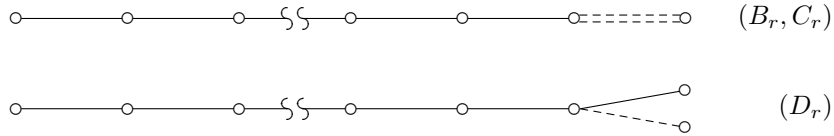


図 2:

また、 B_r, C_r 型の二重線のところを、そのうちの一本だけ切断すると、Dynkin 図形はふたつに分離はせず、 A_r 型のルート系の Dynkin 図形となる。これに対応する積分表示として、 B_r, C_r 型のゼータ関数の、 A_r 型ゼータ関数のみを含む積分表示も成り立つ (図 3)。



図 3:

一般には次の定理が成り立つ (図 4)。

定理 7 ([30, II, Theorem 5.4]) ルート系 Δ の Dynkin 図形の任意の辺を切断したとき、 Δ のゼータ関数は、切断してできる図形の各連結成分に対応するゼータ関数を含む (多重) 積分として表示できる。

この定理は、ルート系のゼータ関数の族が内包する、Mellin-Barnes 積分によって実現される帰納的構造を提示している。この関係により、すべてのルート系のゼータ関数は、最終的には A_1 型のゼータ関数、つまり Riemann ゼータ関数に行き着く。Riemann ゼータ関数の解析的な性質はかなり詳しく知られているから、その知識を出発点にして帰納構造を逆に遡ることにより、

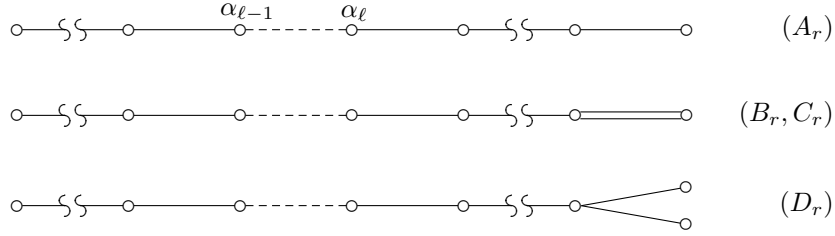


図 4:

原理的には任意のルート系のゼータ関数の解析的性質が導き出せるはずである。もちろん現実には、多重積分の扱いが複雑になっていくため、解析的挙動を調べるのは簡単ではない。それでも r が小さいいくつかの場合には、特異点集合の構造が調べられている。

A_2 型のゼータ関数の場合、(8.3) から直ちに、特異点集合は $s_1 + s_3 = 1 - l$, $s_2 + s_3 = 1 - l$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), $s_1 + s_2 + s_3 = 2$ であること ([39]) がわかる。 A_3 型については [47] において次の結果が証明されている。

定理 8 ([47, Theorem 3.5]) A_3 型のゼータ関数 $\zeta_3((s_1, \dots, s_6), A_3)$ の特異点集合は

$$\begin{aligned}
s_1 + s_4 + s_6 &= 1 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
s_3 + s_5 + s_6 &= 1 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
s_2 + s_4 + s_5 + s_6 &= 1 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
s_1 + s_2 + s_4 + s_5 + s_6 &= 2 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
s_1 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 &= 2 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 &= 2 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 &= 3
\end{aligned}$$

で尽くされる。

また C_2, B_3, C_3 型については [30, II], G_2 型については [30, IV] で特異点集合が論じられている。ただし、(8.3) の類の式から特異点集合の候補者は直ちに見つかるが、それらが実際に特異点集合であること（つまり特異性が別の因子によってキャンセルされてしまっていないこと）を確かめるのは必ずしも容易ではない。上の定理 8 ではこのリストの各超平面が実際に特異点集合であることを丁寧に検証しているが、その他の論文中の結果の中には、特異点集合の候補者のリストを挙げるに留まっているものもある。

9 最近の結果

前節で述べた結果は、解析的な方向からの研究としてはいわば第一段階に過ぎない。前節の結果を土台にして、解析的にもより深いレベルにまで研究を進めることが望まれることは言うまでもない。

解析接続が言えたとなると、自然に生じる次の疑問は、果たして関数等式はあるのか、ということであろう。Euler-Zagier 型の場合²⁹には、少なくとも二重和の場合、1節で紹介したような関数等式が知られている。

岡本氏と小野塚氏は最近のプレプリント [58] において、(1.6) を特別な場合として含むような、 A_2 のゼータ関数の関数等式を証明した。まず、(1.5) の一般化として

$$g_2((s_1, s_2, s_3), A_2) = \zeta_2((s_1, s_2, s_3), A_2) - \frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(s_2+s_3-1)}{\Gamma(s_3)}\zeta(s_1+s_2+s_3-1) \quad (9.1)$$

とおく。また (1.7) に対応して

$$F_{\pm}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{s_1+s_2+s_3-1}(k) \Psi(s_3, s_2+s_3; \pm 2\pi ik),$$

$$F_{\pm}^{\#}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_{s_1+s_2+s_3-1}(k)}{k^{s_1}} \Psi(s_3, s_2+s_3; \pm 2\pi ik)$$

とおけば、彼らの結果は

定理 9 ([58])

$$\begin{aligned} & \frac{g_2((s_1, s_2, s_3), A_2)}{(2\pi)^{s_2+s_3-1}\Gamma(1-s_2)} + e^{-\pi i(s_2+s_3-1)/2} (F_+(s_1, s_2, s_3) + F_-(s_1, s_2, s_3)) \\ &= \frac{g_2((-s_1, 1-s_3, 1-s_2), A_2)}{i^{s_2+s_3-1}\Gamma(s_3)} + e^{\pi i(s_2+s_3-1)/2} F_+^{\#}(s_1, s_2, s_3) \\ & \quad + e^{-\pi i(s_2+s_3-1)/2} F_-^{\#}(s_1, s_2, s_3) \end{aligned} \quad (9.2)$$

というものである。

さらに、 A_2 のゼータ関数は Mordell-Tornheim の二重和 (2.10) と一致していたが、岡本氏と小野塚氏は同じ論文で、一般の Mordell-Tornheim 型 r 重ゼータ関数にまで彼らの結果を拡張している。Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数がルート系のゼータ関数の特殊化であることを考えれば、彼らの結果はルート系のゼータ関数の一般的な関数等式を探索するためのひとつの鍵を与えるものであるかもしれない。

他方、前節で述べたように Mellin-Barnes 積分表示はルート系のゼータ関数の解析的な挙動について精密に研究することを可能にするが、Romik は最近の

²⁹他のタイプの多重ゼータ関数の関数等式としては、Barnes の多重ゼータ関数についての [34] [63] がある。また新谷 L 関数についての広瀬氏と佐藤氏の結果 [15] も興味深い。

プレプリント [62] において、Mellin-Barnes 積分表示を用いて $\zeta_2((s, s, s), A_2)$ の極の位置などを精密に研究し、その結果として $SU(3)$ の n 次元表現の個数についての精密な漸近式を証明した。

$SU(2)$ の場合、その n 次元表現の個数は n の分割数に他ならないので、その個数については古典的な Hardy-Ramanujan の漸近公式が知られているが、Romik の得た結果は Hardy-Ramanujan の式の $SU(3)$ でのアナロジーを与える。従って、同様の分析を他の群に対して実行すれば、他の群の n 次元表現の個数についても同じような漸近式を得る可能性がある。既に C_2 の場合について、筆者は [62] と類似の計算を実行して、そのゼータ関数の極の位置の精密な情報を得ている。

また、5 節、6 節で論じたような話題に関しては、筆者と小森氏、津村氏は最近、Poincaré 多項式との関連を迫及している。多少の結果は既に得られていて、2014 年秋の立教大学での日仏共同研究集会でアナウンスし、関連する論文もひとつ公表している ([36]) が、根幹部分の内容はまだ論文としてまとめられていない。

以上のように、現在進行中の研究も多々あるが、筆者の印象としては、ルート系のゼータ関数の研究はまだ「最低限の基礎工事」が終わった段階に過ぎない。ルート系のゼータ関数の理論の本格的な発展へ向けて、成すべきことはまだまだ膨大に残されていると思われる。

謝辞 筆者に代数学シンポジウムでの講演の機会を与えてくださった方々や、会場となった静岡大学でお世話になった方々に、この場を借りてお礼申し上げます。また、長期間に亘っての共同研究者であり、本稿に対しても多くの貴重なコメントをくださった小森靖氏、津村博文氏の両氏、およびミスプリントを指摘してくださった佐藤信夫氏にも感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, *Acta Arith.* **98** (2001), 107-116.
- [2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 189-209.
- [3] 荒川恒男・金子昌信 (編), 多重ゼータ値入門、Math-for-industry Lecture Note **23**, 九州大学、2010.
- [4] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

- [5] T. M. Apostol and T. H. Vu, Dirichlet series related to the Riemann zeta function, *J. Number Theory* **19** (1984), 85-102.
- [6] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, *Acta Math.* **81** (1949), 353-376.
- [7] E. W. Barnes, A new development of the theory of the hypergeometric functions, *Proc. London Math. Soc.* (2)**6** (1908), 141-177.
- [8] Y.-J. Choie and K. Matsumoto, Functional equations for double series of Euler type with coefficients, preprint, arXiv:1306.0987.
- [9] Y.-J. Choie and K. Matsumoto, Functional equations for double series of Euler-Hurwitz-Barnes type with coefficients, preprint, arXiv:1403.1940, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.
- [10] M. de Crisenoy, Values at T -tuples of negative integers of twisted multi-variable zeta series associated to polynomials of several variables, *Compositio Math.* **142** (2006), 1373-1402.
- [11] D. Essouabri, Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications à la théorie analytique des nombres, Thèse, Univ. Nancy I, 1995.
- [12] D. Essouabri, Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications en théorie analytique des nombres, *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), 429-483.
- [13] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, preprint, arXiv:math/0103059.
- [14] P. E. Gunnells and R. Sczech, Evaluations of Dedekind sums, Eisenstein cocycles, and special values of L -functions, *Duke Math. J.* **118** (2003), 229-260.
- [15] M. Hirose and N. Sato, On the functional equation of the normalized Shintani L -function of several variables, *Math. Z.* **280** (2015), 1085-1092.
- [16] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 275-290.
- [17] J. G. Huard, K. S. Williams and N.-Y. Zhang, On Tornheim's double series, *Acta Arith.* **75** (1996), 105-117.

- [18] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.* **142** (2006), 307-338.
- [19] S. Ikeda and K. Matsuoka, Double analogue of Hamburger's theorem, *Publ. Math. Debrecen* **86** (2015), 89-98.
- [20] S. Ikeda and K. Matsuoka, On functional relations for Witten multiple zeta-functions, *Tokyo J. Math.*, to appear.
- [21] M. Kaneko and K. Tasaka, Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, *Math. Ann.* **357** (2013), 1091-1118.
- [22] M. Katsurada, An application of Mellin-Barnes' type integrals to the mean squares of Lerch zeta-functions, *Collect. Math.* **48** (1997), 137-153.
- [23] M. Katsurada, An application of Mellin-Barnes type of integrals to the mean square of L -functions, *Liet. Mat. Rink.* **38** (1998), 98-112.
- [24] Y. Komori, An integral representation of multiple Hurwitz-Lerch zeta functions and generalized multiple Bernoulli numbers, *Quart. J. Math. (Oxford)* **61** (2010), 437-496.
- [25] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta functions of root systems, in *The Conference on L-Functions*, L. Weng and M. Kaneko (eds.), World Scientific, 2007, pp.115-140.
- [26] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations and functional relations for the Euler double zeta-function and its generalization of Eisenstein type, *Publ. Math. Debrecen* **77** (2010), 15-31.
- [27] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations for zeta-functions of root systems, in *Number Theory, Dreaming in Dreams*, Proc. 5th China-Japan Seminar, T. Aoki et al. (eds.), World Scientific, 2010, pp.135-183.
- [28] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On multiple Bernoulli polynomials and multiple L -functions of root systems, *Proc. London Math. Soc.* (3)**100** (2010), 303-347.
- [29] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, An introduction to the theory of zeta-functions of root systems, in *Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions*, G. Bhowmik et al. (eds.), MSJ Memoirs **21**, Math. Soc. Japan, 2010, pp.115-140.

- [30] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras,
 II, *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), 355-394.
 III, in *Multiple Dirichlet Series, L-functions and Automorphic Forms*, D. Bump et al. (eds.), Progress in Math. **300**, Birkhäuser, 2012, pp.223-286.
 IV, *Glasgow Math. J.* **53** (2011) , 185-206.
 V, *ibid.* **57** (2015), 107-130.
- [31] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations for double L -functions and values at non-positive integers, *Intern. J. Number Theory* **7** (2011), 1441-1461.
- [32] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, *Math. Z.* **268** (2011), 993-1011.
- [33] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations for zeta-functions of weight lattices of Lie groups of type A_3 , in *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*, Proc. 5th Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, A. Laurinćikas et al. (eds.), TEV, 2012, pp.151-172.
- [34] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, *J. Ramanujan Math. Soc.* **28** (2013), 49-69.
- [35] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, A study on multiple zeta values from the viewpoint of zeta-functions of root systems, *Funct. Approx. Comment. Math.* **51** (2014), 43-76.
- [36] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Lattice sums of hyperplane arrangements, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **63** (2014), 161-213.
- [37] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of weight lattices of compact connected semisimple Lie groups, in *Proc. 5th Intern. Conf. on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*, *Šiauliai Math. Semin.* **10(18)** (2015), 149-179.
- [38] K. Matsumoto, Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L -functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **123** (1998), 385-405; Corrigendum and addendum, *ibid.* **132** (2002), 377-384.

- [39] K. Matsumoto, On the analytic continuation of various multiple zeta-functions, in *Number Theory for the Millennium II*, Proc. Millennial Conf. on Number Theory, M. A. Bennett et al. (eds.), A K Peters, 2002, pp.417-440.
- [40] M. Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, *Nagoya Math. J.* **172** (2003), 59-102.
- [41] K. Matsumoto, The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I, *J. Number Theory* **101** (2003), 223-243.
- [42] K. Matsumoto, On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions, in *Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations*, D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), Bonner Math. Schriften **360**, Bonn, 2003, n.25, 17pp.
- [43] K. Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **136** (2004), 1-7.
- [44] K. Matsumoto, Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables, in *Number Theory, Tradition and Modernization*, Proc. 3rd China-Japan Seminar, W. Zhang and Y. Tanigawa (eds.), Springer, 2006, pp.153-173.
- [45] K. Matsumoto, The analytic theory of multiple zeta-functions and its applications, *Sūgaku* **59** (2007), 24-45 (in Japanese); English transl. *Sugaku Expositions* **23** (2010), 143-167.
- [46] K. Matsumoto, T. Nakamura, H. Ochiai and H. Tsumura, On value-relations, functional relations and singularities of Mordell-Tornheim and related triple zeta-functions, *Acta Arith.* **132** (2008), 99-125.
- [47] K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras I, *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), 1457-1504.
- [48] H. Mellin, Eine Formel für den Logarithmus transcendentener Funktionen von endlichem Geschlecht, *Acta Soc. Sci. Fenn.* **29**, no.4 (1900).
- [49] H. Mellin, Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, *Acta Math.* **28** (1904), 37-64.

- [50] L. J. Mordell, On the evaluation of some multiple series, *J. London Math. Soc.* **33** (1958), 368-371.
- [51] M. Ram Murty and K. Sinha, Multiple Hurwitz zeta functions, in *Multiple Dirichlet series, Automorphic Forms, and Analytic Number Theory*, S. Friedberg et al. (eds.), Proc. Sympos. Pure Math. **75**, Amer. Math. Soc., 2006, pp.135-156.
- [52] T. Nakamura, A functional relation for the Tornheim double zeta function, *Acta Arith.* **125** (2006), 257-263.
- [53] T. Nakamura, Double Lerch value relations and functional relations for Witten zeta functions, *Tokyo J. Math.* **31** (2008), 551-573.
- [54] T. Okamoto, Generalizations of Apostol-Vu and Mordell-Tornheim multiple zeta functions, *Acta Arith.* **140** (2009), 169-187.
- [55] T. Okamoto, Some relations among Apostol-Vu double zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers, *Tokyo J. Math.* **34** (2011), 353-366.
- [56] T. Okamoto, Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type B_r , *JP J. Alg. Number Theory Appl.* **22** (2011), 1-44.
- [57] T. Okamoto, Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type A_2 , B_2 and G_2 , *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **61** (2012), 9-27.
- [58] T. Okamoto and T. Onozuka, Functional equation for the Mordell-Tornheim multiple zeta-function I, preprint.
- [59] M. Ono and S. Yamamoto, Shuffle product of finite multiple polylogarithms, preprint, arXiv:1502.06693.
- [60] K. Onodera, Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 1463-1485.
- [61] T. Onozuka, Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers, *Funct. Approx. Comment. Math.* **49** (2013), 331-348.
- [62] D. Romik, On the number of n -dimensional representations of $SU(3)$, the Bernoulli numbers, and the Witten zeta function, preprint, arXiv:1503.03776.

- [63] G. Shibukawa, Bilateral zeta functions and their applications, *Kyushu J. Math.* **67** (2013), 429-451.
- [64] M. V. Subbarao and R. Sitaramachandrarao, On some infinite series of L. J. Mordell and their analogues, *Pacific J. Math.* **119** (1985), 245-255.
- [65] A. Szenes, Iterated residues and multiple Bernoulli polynomials, *Intern. Math. Res. Notices* **18** (1998), 937-958.
- [66] L. Tornheim, Harmonic double series, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 303-314.
- [67] H. Tsumura, On some combinatorial relations for Tornheim's double series, *Acta Arith.* **105** (2002), 239-252.
- [68] H. Tsumura, On Witten's type of zeta values attached to $SO(5)$, *Arch. Math.* **82** (2004), 147-152.
- [69] H. Tsumura, Combinatorial relations for Euler-Zagier sums, *Acta Arith.* **111** (2004), 27-42.
- [70] H. Tsumura, On Mordell-Tornheim zeta values, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 2387-2393.
- [71] H. Tsumura, On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **142** (2007), 395-405.
- [72] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1927.
- [73] E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, *Commun. Math. Phys.* **141** (1991), 153-209.
- [74] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in *First European Congress of Mathematics, Vol. II*, A. Joseph et al. (eds.), *Progr. Math.* **120**, Birkhäuser, 1994, pp.497-512.
- [75] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta function, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 1275-1283.
- [76] J. Zhao, Alternating Euler sums and special values of the Witten multiple zeta function attached to $\mathfrak{so}(5)$, *J. Austral. Math. Soc.* **89** (2010), 419-430.

- [77] J. Zhao, Multi-polylogs at twelfth roots of unity and special values of Witten multiple zeta function attached to the exceptional Lie algebra \mathfrak{g}_2 , *J. Alg. Appl.* **9** (2010), 327-337.
- [78] J. Zhao and X. Zhou, Witten multiple zeta values attached to $\mathfrak{sl}(4)$, *Tokyo J. Math.* **34** (2011), 135-152.
- [79] X. Zhou, D. M. Bradley and T. Cai, Depth reduction of a class of Witten zeta functions, *Electr. J. Combin.* **16** (2009), Issue 1, Notes #N27.