

Buchsbaum-Rim multiplicities of a direct sum of cyclic modules

早坂 太
(北海道教育大学)

本報告では、局所環上長さ有限な加群に付随する不変量であるブックスバウム・リム重複度とその一般化である随伴ブックスバウム・リム重複度について、基本性質の紹介とこれまでに得られた結果の紹介を、イデアルの重複度が持つ性質の類似を中心に行う。第1節では、イデアルの重複度について復習する。特に、Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数との関係を表す Serre の定理を思い出し、Buchsbaum が加群の重複度を考えるに至った動機を説明する。第2節では、Buchsbaum-Rim が導入した加群の重複度の概念とその基本性質をまとめる。また、巴系イデアルの重複度が持つ基本性質の類似について考察し、Hyry 氏との共同研究で得られた結果を紹介する。第3節では、Rees, Kleiman-Thorup によって導入された加群に付随する2変数ブックスバウム・リム関数および重複度の列（随伴ブックスバウム・リム重複度）の概念とその基本性質をまとめる。第4節では、随伴ブックスバウム・リム重複度の具体的計算を巡回加群の直和の場合に行い得られた最近の結果を報告する。これは、Kirby-Rees によって得られていた随伴ブックスバウム・リム重複度を混合重複度で表す公式の（一部の）一般化と考えられる。証明の概略についても触れる。最後の節では、Kleiman-Thorup によって指摘された2変数ブックスバウム・リム関数を記述する、ある標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環の構成法に触れる。

本稿は、第60回代数学シンポジウムにおける講演内容に、講演では詳しく触れることができなかった次の内容を付け加えてまとめたものです。

- 巡回加群の直和の随伴ブックスバウム・リム重複度公式 (定理 4.2) の証明の概略
- 2変数ブックスバウム・リム関数を記述する \mathbb{Z}^2 次数付き環の構成法

講演の機会を与えてくださったことに深く感謝いたします。

1 イデアルのヒルベルト・サミュエル重複度

局所環内のイデアルに付随する重複度の概念は、1950年代初頭に Samuel によって与えられた。イデアルの重複度は、Samuel, 永田らによってイデアル論を基礎にした基礎理論が完成されて以来、局所環論における重要な不変量のひとつとして現在までに多くの詳細な研究がある。Samuel によるイデアルの重複度の定義を復習しよう。

以下、 (R, \mathfrak{m}) はネーター局所環、 $d = \dim R > 0$ とし、 I は R の \mathfrak{m} -準素イデアルとする。このとき、イデアル I に付随する次の長さの関数が考えられる。

$$\lambda_I : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} ; p \mapsto \ell_R(R/I^p)$$

関数 λ_I を (R のイデアル) I のヒルベルト・サミュエル関数 (HS 関数) という. Samuel は, 関数 $\lambda_I(p)$ が十分大きい $p \gg 0$ で d 次多項式関数となることを示した. すなわち, 次数 d の多項式 $P_I(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在して

$$\lambda_I(p) = P_I(p) \text{ for all } p \gg 0$$

を満たす. 多項式 $P_I(x)$ の最高次係数を正規化して得られる正整数を I のヒルベルト・サミュエル重複度 (HS 重複度) と呼び, $e(R/I)$ または $e(I)$ で表す.

$$e(R/I) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_I(p)}{p^d} \times d!$$

イデアルの HS 重複度研究は, その節減をとることによって巴系イデアルのそれに帰着される場合が多く, 巴系イデアルの重複度は様々な良い性質を持つことが知られている. 中でも最も基本的かつ重要な結果として, Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数との関係を明らかにした次の Serre の定理がある.

定理 1.1. (Serre [17], Auslander-Buchsbaum [1])

$\underline{a} = a_1, a_2, \dots, a_n$ はイデアル I の極小生成系, $K_\bullet(\underline{a})$ は列 \underline{a} に関する Koszul 複体とし, $H_i(K_\bullet(\underline{a}))$ で $K_\bullet(\underline{a})$ の i 番目のホモロジー群を表す.

(1) Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数について次が成り立つ.

$$\chi(K_\bullet(\underline{a})) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_R(H_i(K_\bullet(\underline{a}))) = \begin{cases} e(R/I) & (n = d) \\ 0 & (n > d) \end{cases}$$

(2) Koszul 複体のホモロジー群の部分オイラー標数は非負である.

$$\chi_j(K_\bullet(\underline{a})) := \sum_{i \geq j} (-1)^{i-j} \ell_R(H_i(K_\bullet(\underline{a}))) \geq 0 \text{ for all } j \geq 0$$

よって, $n = d$, すなわち, I が巴系イデアルのとき, 不等式

$$e(R/I) \leq \ell_R(R/I)$$

が成り立つ.

特に, R が Cohen-Macaulay ならば, 任意の巴系イデアル I について, $e(R/I) = \ell_R(R/I)$ である. また, この逆も正しいことがよく知られている.

系 1.2. 次は同値である.

- (1) R は Cohen-Macaulay
- (2) 任意の巴系イデアル I について, $e(R/I) = \ell_R(R/I)$
- (3) ある巴系イデアル I について, $e(R/I) = \ell_R(R/I)$

Serre の定理が示唆する形式的な側面のひとつに、イデアルの重複度の概念は、自由加群の間の R 線形写像 $\varphi: R^n \rightarrow R$ に付随する概念、あるいはその余核である巡回加群 $\text{Coker } \varphi = R/I$ に付随する概念と見なすことが自然であることが挙げられる。この視点に立つとき、一般に自由加群の間の R 線形写像、あるいはその余核として現れる（巡回加群とは限らない）有限生成加群の場合に重複度の概念を拡張できないかという問題を考えることは自然である。これが 1960 年代初頭における Buchsbaum の問題であった。¹

問題 1.3. (Buchsbaum)

R 線形写像 $R^n \rightarrow R$ ($1 \times n$ 型行列) に付随する重複度 (および Koszul 複体) の概念を、一般の有限生成自由加群の間の R 線形写像 $R^m \rightarrow R^r$ ($r \times m$ 型行列) に付随する概念に拡張できないか? 言い換えると、 \mathfrak{m} -準素イデアル I から定義される巡回加群 R/I に付随する重複度の概念を、長さ有限な R 加群の場合に拡張できないか?

2 加群のブックスバウム・リム重複度

1964 年, Buchsbaum-Rim [6] は、イデアルの HS 重複度の拡張概念 (および Koszul 複体の一般化) である加群の重複度の概念 (および一般化された Koszul 複体) を得て、問題 1.3 に対する自然な解答を与えた。Buchsbaum-Rim による加群の重複度の定義を思い出そう。

以下、 C は長さ有限な R 加群とする。 C の極小な有限表示 φ をとり固定しよう。 C の 1 番目のシジジーを $M := \text{Im } \varphi \subset F := R^r$ とおく。

$$R^n \xrightarrow{\varphi} R^r \rightarrow C \rightarrow 0$$

C が長さ有限より、 $n \geq d + r - 1$ に注意する。 φ が導く対称代数の間の射を $\tilde{\varphi} := \text{Sym}_R(\varphi)$ とし、その余核を考える。

$$\text{Sym}_R(R^n) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S := \text{Sym}_R(F) \rightarrow \text{Coker } \tilde{\varphi} \rightarrow 0$$

$\text{Coker } \tilde{\varphi}$ は、 S の次数付き部分環 $R[M] := \text{Im } \tilde{\varphi}$ 上の次数付き加群で、各斉次成分は長さ有限である。よって、次の長さの関数が考えられる。

$$\lambda_M : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}; \quad p \mapsto \ell_R([\text{Coker } \tilde{\varphi}]_p)$$

関数 λ_M を (F の部分加群) M に付随するブックスバウム・リム関数 (BR 関数) という。 Buchsbaum-Rim は、関数 λ_M が十分大きい $p \gg 0$ で $d + r - 1$ 次多項式関数となることを示した。すなわち、次数 $d + r - 1$ の多項式 $P_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在して、

$$\lambda_M(p) = P_M(p) \text{ for all } p \gg 0$$

を満たす。多項式 $P_M(x)$ の最高次係数を正規化して得られる正整数を C のブックスバウム・リム重複度 (BR 重複度) と呼び、 $e(C)$ または $e(M)$ で表す。

$$e(C) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_M(p)}{p^{d+r-1}} \times (d+r-1)!$$

¹Buchsbaum は次のように述べている。 It was natural at the time that the paper [5, 6] were being written, to try to generalize the notions of Hilbert-Samuel polynomials and multiplicity to the situation of finitely generated modules rather than just cyclic modules, that is, to modules of the form $\text{Coker}(f: R^m \rightarrow R^n)$, $m \geq n$, rather than those of the form $\text{Coker}(f: R^m \rightarrow R)$. ([3, p.69])

BR 重複度 $e(C)$ は, C の有限表示 φ の取り方によらない長さ有限な加群に付随する不変量である. BR 重複度研究は, イdealの場合同様, M の節減をとることで $n = d + r - 1$ を満たす加群のそれに帰着される場合が多い. $n = d + r - 1$ を満たす行列 (R 線形写像) φ を巴系行列, その像 $M = \text{Im } \varphi \subset F = R^r$ を (F における) 巴系加群という.

問題 2.1. 巴系イdealの重複度の場合同様, 巴系加群の BR 重複度を, ある複体のホモロジー群のオイラー標数で表示すること (Serre の定理の類似) は可能か?

Buchsbaum-Rim [6] は, 問題 2.1 に良い解答を与えてくれる複体を構成し, Serre の定理の類似を証明した. 主張を述べる前に, この複体 (BR 複体と呼ばれる) がもつ基本性質を復習しておく. BR 複体は, R 上の $r \times n$ 型行列 $\varphi = (a_{ij})$ (R 線形写像 $\varphi: R^n \rightarrow R^r$) に付随する長さが $n - r + 1$ の自由複体 $BR_{\bullet}(\varphi)$ で次の性質をもつ.

- $r = 1$ ならば, $BR_{\bullet}(\varphi) \cong K_{\bullet}(\varphi)$
- $H_0(BR_{\bullet}(\varphi)) \cong \text{Coker } \varphi =: C$
- grade sensitivity を満たす. すなわち,

$$n - r + 1 = \text{grade } I_r(\varphi) + \max\{i \mid H_i(BR_{\bullet}(\varphi)) \neq (0)\}$$

が成り立つ. ただし, $I_r(\varphi)$ ($= \text{Fitt}_0(C)$) は行列 φ の r 次小行列式で生成される R のイdealを表す.

- $\text{grade } I_r(\varphi)$ が取り得る最大値 $n - r + 1$ をもつとき, $BR_{\bullet}(\varphi)$ は C の自由分解を与える.

ただし, $H_i(BR_{\bullet}(\varphi))$ は φ の BR 複体 $BR_{\bullet}(\varphi)$ の i 番目のホモロジー群を表す.

定理 2.2.² (Buchsbaum-Rim [6])

(1) BR 複体のホモロジー群のオイラー標数について次が成り立つ.

$$\chi(BR_{\bullet}(\varphi)) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_R(H_i(BR_{\bullet}(\varphi))) = \begin{cases} e(C) & (n = d + r - 1) \\ 0 & (n > d + r - 1) \end{cases}$$

(2) 次は同値.

- (i) R は Cohen-Macaulay
- (ii) 任意の巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C について, $e(C) = \ell_R(C)$

イdealの場合の類似で自然に次の問題が考えられる.

問題 2.3. 巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C に対し, 一般に不等式

$$e(C) \leq \ell_R(C)$$

が成り立つか? また, 等号成立なら R は Cohen-Macaulay か?

²Kirby は, 行列 φ と整数 $t \in \mathbb{Z}$ に付随する自由複体の族 $\{K_{\bullet}(\varphi, t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ で $K_{\bullet}(\varphi, 1) \cong BR_{\bullet}(\varphi)$ なるものを構成し ([11]), そのオイラー標数について定理 2.2 の類似が成り立つことを証明した ([12]). 特に, $K_{\bullet}(\varphi, 0) \cong EN_{\bullet}(\varphi)$ が Eagon-Northcott 複体であることから, Cohen-Macaulay 局所環上の任意の巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C について, $e(C) = \ell_R(R/I_r(\varphi))$ が成り立つ.

この問題 2.3 に対し, Hyry 氏との共同研究で次を得た.

定理 2.4. ³ (H-Hyry [9])

(1) BR 複体のホモロジー群の部分オイラー標数は非負である.

$$\chi_j(BR_\bullet(\varphi)) := \sum_{i \geq j} (-1)^{i-j} \ell_R(H_i(BR_\bullet(\varphi))) \geq 0 \text{ for all } j \geq 0$$

よって, $n = d + r - 1$, すなわち, φ が巴系行列のとき, 不等式

$$e(C) \leq \ell_R(C)$$

が成り立つ.

(2) 次は同値.

(i) R は Cohen-Macaulay

(ii) ある巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C について, $e(C) = \ell_R(C)$

この定理 2.4 の BR 重複度に関する不等式および Cohen-Macaulay 局所環の特徴付けは, 次のように BR 関数に関するそれに拡張された. これは, イデアルの HS 関数の場合にも新しい内容を含むと思われる.

定理 2.5. (H-Hyry [10])

(1) $n = d + r - 1$, すなわち, φ が巴系行列のとき, 不等式

$$\lambda_M(p) \geq e(C) \binom{p + d + r - 2}{d + r - 1} \text{ for all } p > 0$$

が成り立つ.

(2) 次は同値. ⁴

(i) R は Cohen-Macaulay

(ii) 任意の巴系行列をもつ R 加群 C について, $\lambda_M(p) = e(C) \binom{p + d + r - 2}{d + r - 1}$ for all $p > 0$

(iii) ある巴系行列をもつ R 加群 C について, $\lambda_M(p) = e(C) \binom{p + d + r - 2}{d + r - 1}$ for some $p > 0$

3 加群の随伴ブックスバウム・リム重複度

加群の重複度 (BR 重複度) の概念は, 1964 年に Buchsbaum-Rim によって導入されて以降, しばらくの間注目されることはなかったが, 1980 年代に Kirby [12] によって見直され, その後, Gaffney によって特異点論分野における研究で用いられ始めたのを契機に本格的な研究が再開された. Gaffney [7] は, BR 重複度と加群の節減の関係について, イデアルの場合と

³定理 2.4(1) の非負性は, $t \geq -1$ に付随する一般化された Koszul 複体 $K_\bullet(\varphi, t)$ に対して成り立つ. 特に, $K_\bullet(\varphi, 0) \cong EN_\bullet(\varphi)$ の部分オイラー標数の非負性から, φ が巴系行列なら $e(C) \leq \ell_R(R/I_r(\varphi))$ も正しい ([9]).

⁴(i) から (ii) は Brennan-Ulrich-Vasconcelos [4] によって最初に証明された.

類似の性質が成り立つことを予想した. この問題に対し, Rees は加群に付随する 2 変数関数を用いて, これを肯定的に解決し, Kirby との共同研究 [13, 14] で BR 重複度を含む一般的な重複度理論を展開した. Kleiman-Thorup [15, 16] は, Kirby-Rees とは異なる手法で, 同時独立に一般的な重複度理論を展開した. これら理論の過程で導入された加群に付随する不変量の列 (BR 重複度をその一部に含む) を随伴ブックスバウム・リム重複度という.

以下, 第 2 節同様, C は長さ有限な R 加群とし, C の自由加群による極小な有限表示 φ を取って固定し, C の 1 番目のシジジーを $M := \text{Im } \varphi \subset F := R^r$ とおき, F の対称代数を $S := \text{Sym}_R(F) = \bigoplus_{p \geq 0} S_p$ とする. $R[M] = \bigoplus_{p \geq 0} M^p$ で M の元が定義する S の 1 次式で生成される S の部分 R 代数 (M の Rees 環) を表す. このとき, 次の 2 変数関数が考えられる.

$$\Lambda_M : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} ; (p, q) \mapsto \ell_R(S_{p+q}/M^p S_q)$$

関数 Λ_M を (F の部分加群) M に付随する 2 変数ブックスバウム・リム関数 (2 変数 BR 関数) という. Kleiman-Thorup, Kirby-Rees は, 関数 Λ_M は十分大きい $p, q \gg 0$ で全次数 $d+r-1$ 次 2 変数多項式関数となることを示した. すなわち, 全次数 $d+r-1$ の 2 変数多項式 $P_M(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して,

$$\Lambda_M(p, q) = P_M(p, q) \text{ for all } p, q \gg 0$$

を満たす. 多項式 $P_M(x, y)$ の最高次単項式 $x^{d+r-1-j}y^j$ の係数を正規化して得られる整数を C の随伴ブックスバウム・リム重複度 (随伴 BR 重複度) と呼び, $e^j(C)$ または $e^j(M)$ で表す.

$$P_M(x, y) = \frac{e^j(C)}{(d+r-1-j)!j!} x^{d+r-1-j}y^j + (\text{全次数が } d+r-2 \text{ 以下の項})$$

随伴 BR 重複度 $e^j(C)$ は, C の有限表示 φ の取り方によらない長さ有限な R 加群 C の不変量である.

注意 3.1. (1) 2 変数 BR 関数 $\Lambda_M(p, q)$ を $q = 0$ に固定した関数 $\Lambda_M(p, 0)$ が, BR 関数 $\lambda_M(p)$ である.

(2) 2 変数 BR 関数 $\Lambda_M(p, q)$ は, 加群 $M \subset F$ から自然に構成される, ある標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環のヒルベルト関数に一致する.

2 変数 BR 関数は通常の BR 関数とその一部に完全に含む関数であるが, その漸近挙動を表す多項式の間には自明な関係はない. しかし, Kleiman-Thorup, Kirby-Rees は同時独立に随伴 BR 重複度と通常の BR 重複度の上に次の著しい関係があることを証明した.

定理 3.2. (Kleiman-Thorup [15], Kirby-Rees [14])

(1) 最初の随伴 BR 重複度 $e^0(C)$ は BR 重複度 $e(C)$ に一致する.

$$e^0(C) = e(C)$$

(2) 随伴 BR 重複度は非負整数減少列で, $e^{r-1}(C)$ は正, $e^r(C)$ 以降は 0 である.

$$e^0(C) \geq e^1(C) \geq \dots \geq e^{r-1}(C) > e^r(C) = \dots = e^{d+r-1}(C) = 0$$

4 巡回加群の直和の随伴 BR 重複度の計算

加群の BR 重複度および随伴 BR 重複度の具体的研究は、イデアルの HS 重複度の場合のそれと比べあまり進んでいないが、巡回加群の直和の場合には、イデアルの混合重複度との関係を明らかにした Kirby-Rees による次の結果がある。⁵

定理 4.1. (Kirby-Rees [14])

I_1, \dots, I_r は R の \mathfrak{m} -準素イデアルとし、 $C = R/I_1 \oplus \dots \oplus R/I_r$ とおく。

(1) C の BR 重複度はイデアル I_1, \dots, I_r の混合重複度全ての和と一致する。

$$e(C) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = d \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} e_{i_1 \dots i_r}(I_1, \dots, I_r)$$

(2) $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_r$ と仮定する。このとき、 C の随伴 BR 重複度について次が成り立つ。

$$e^j(C) = e(R/I_{j+1} \oplus \dots \oplus R/I_r) \text{ for all } j = 0, 1, \dots, r-1$$

一般の巡回加群の直和の場合にも随伴 BR 重複度を通常の BR 重複度で表す公式はあるか? この問題に対し、次の部分的解答を得た。

定理 4.2. I_1, \dots, I_r は R の \mathfrak{m} -準素イデアルとし、 $C = R/I_1 \oplus \dots \oplus R/I_r$ とおく。このとき、次が成り立つ。

$$e^{r-1}(C) = e(R/I_1 + \dots + I_r)$$

特に、 $I_1, \dots, I_{r-1} \subset I_r$ のとき、 $e^{r-1}(C) = e(R/I_r)$ である。

証明. (概略) $M := I_1 \oplus \dots \oplus I_r \subset F := R^r$, $S := R[t_1, \dots, t_r] = \bigoplus_{p \geq 0} S_p$ とおく。随伴 BR 重複度を計算するには、 $R[M] = R[I_1 t_1, \dots, I_r t_r] = \bigoplus_{p \geq 0} M^p \subset S$ としてよい。 $p, q \geq 0$ に対し、

$$H_{p,q} := \{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid |\ell| := \ell_1 + \dots + \ell_r = p + q\}$$

とおく。 $\ell \in H_{p,q}$ に対し、 R のイデアル $J_{p,q}(\ell)$ を次で定める。

$$J_{p,q}(\ell) := \sum_{\substack{|\mathbf{i}|=p \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \ell}} \mathbf{I}^{\mathbf{i}} = \sum_{\substack{|\mathbf{i}|=p \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \ell}} I_1^{i_1} \dots I_r^{i_r}$$

このとき、 $\Lambda_M(p, q) = \sum_{\ell \in H_{p,q}} \ell_R(R/J_{p,q}(\ell))$ である。 $\Lambda_M(p, q)$ の漸近挙動を調べるには、 $q \geq (r-1)p \gg 0$ としてよい。このとき、任意の $\ell \in H_{p,q}$ について、少なくともひとつは $\ell_i \geq p$ なる成分をもつことに注意する。 $k = 1, \dots, r$ に対し、

$$H_{p,q}^{(k)} := \{\ell \in H_{p,q} \mid \#\{i \mid \ell_i \geq p\} = k\}$$

と定め、 $H_{p,q}$ をこれらで分割すると、

$$\Lambda_M(p, q) = \sum_{k=1}^r \sum_{\ell \in H_{p,q}^{(k)}} \ell_R(R/J_{p,q}(\ell))$$

⁵この他の BR 重複度および 2 変数 BR 関数の具体的研究として、例えば [2] や [8] などがある。

である. $\Lambda_M^{(k)}(p, q) := \sum_{\ell \in H_{p,q}^{(k)}} \ell_R(R/J_{p,q}(\ell))$ とおくと次が正しい.

Claim 任意の $q \geq (r-1)p \gg 0$ について,

$$(1) \Lambda_M^{(r)}(p, q) = \binom{q-(r-1)(p-1)}{r-1} \ell_R(R/(I_1 + \cdots + I_r)^p)$$

$$(2) \Lambda_M^{(r-1)}(p, q) = \binom{q-(r-2)(p-1)}{r-2} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=0}^{p-1} \ell_R(R/(I_1 + \cdots + \widehat{I}_j + \cdots + I_r)^{p-i} (I_1 + \cdots + I_r)^i) \right) + (q \text{ の次数が } r-3 \text{ 以下})$$

(3) 任意の $1 \leq k \leq r-2$ に対し, $\deg_y g_k(x, y) \leq k-1$ なる多項式 $g_k(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して, $\Lambda_M^{(k)}(p, q) \leq g_k(p, q)$ を満たす.

従って, $\deg_y g(x, y) \leq r-2$ なる多項式 $g(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して, $\Lambda_M(p, q) - \Lambda_M^{(r)}(p, q) \leq g(p, q)$ for all $q \geq (r-1)p \gg 0$ とできる. 故に, $\deg_y f(x, y) \leq r-2$ なる多項式 $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して, $\Lambda_M(p, q) - \Lambda_M^{(r)}(p, q) = f(p, q)$ for all $q \geq (r-1)p \gg 0$ を満たす. $\Lambda_M(p, q) = \Lambda_M^{(r)}(p, q) + f(p, q)$ の両辺の $p^d q^{r-1}$ の係数を比較して, 定理の主張を得る. \square

この証明から, $r=3$ の場合には残る $e^1(C)$ についても次の公式が成り立つことがわかる.

系 4.3. $I := I_1 + I_2 + I_3, I_{ij} := I_i + I_j$ ($1 \leq i < j \leq 3$) とおくと, 次が成り立つ.

$$e^1(R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus R/I_3) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} e(R/I_{ij} \oplus R/I) - 2(d+1)e(R/I)$$

A 次数付き環拡大に付随する次数環

2変数BR関数 $\Lambda_M(p, q)$ は加群 $M \subset F$ から自然に構成される, ある標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環のヒルベルト関数に一致する (注意 3.1(2)). これは, Kleiman-Thorup [16] によって指摘され, BR 重複度理論の一部が大幅に簡略化された. この節では, この標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環の構成法を一般の次数付き環拡大の場合に与える.

以下, $A \subset B$ は標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環拡大で $A_0 = B_0 = R$ なるものとする. $\mathcal{R} := \mathcal{R}(A_1 B) = B[A_1 T] \subset B[T]$ を B のイデアル $A_1 B$ の Rees 環とし, $\mathcal{R}' := \mathcal{R}'(A_1 B) = B[A_1 T, T^{-1}] \subset B[T, T^{-1}]$ を拡大 Rees 環, $G := \mathcal{R}'/T^{-1}\mathcal{R}'$ を随伴次数環とする. ここで, T は不定元である. 多項式環 $B[T]$ を $\deg T = (1, -1)$, B_n の元の次数を $(0, n)$ と定めることで \mathbb{Z}^2 次数付き環とみなす.

命題 A.1. (1) \mathcal{R} は $B[T]$ の標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き部分環で,

$$\mathcal{R}_{(p,q)} \cong \begin{cases} A_p B_q & (p, q \geq 0) \\ (0) & (other) \end{cases}$$

(2) \mathcal{R}' は $B[T, T^{-1}]$ の \mathbb{Z}^2 次数付き部分環で,

$$\mathcal{R}'_{(p,q)} \cong \begin{cases} A_p B_q & (p, q \geq 0) \\ B_{p+q} & (p < 0, q \geq -p) \\ (0) & (other) \end{cases}$$

(3) G は標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環で,

$$G_{(p,q)} \cong \begin{cases} A_p B_q / A_{p+1} B_{q-1} & (p, q \geq 0) \\ (0) & (\text{other}) \end{cases}$$

G 上の多項式環 $G[u]$ を, $G_{(1,0)}$ の元の次数を $(1, 0, 0)$, $G_{(0,1)}$ の元の次数を $(0, 1, 0)$, $\deg u = (0, 0, 1)$ と定めることで \mathbb{Z}^3 次数付き環とみなす.

$$\mathcal{C} := \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

とおき,

$$\mathcal{H} := \sum_{\iota(i,j,k) \in \mathcal{C}} G[u]_{(i,j,k)} \subset G[u]$$

と定める.

命題 A.2. (1) \mathcal{H} は $G[u]$ の \mathbb{Z}^3 次数付き部分環で, $\mathcal{H} = R[G_{(1,0)}u, G_{(0,1)}u, G_{(0,1)}]$ である.

(2) \mathcal{H} は, $G_{(1,0)}u$ および $G_{(0,1)}u$ の元の次数を $(1, 0)$, $G_{(0,1)}$ の元の次数を $(0, 1)$ と定めることで標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環の構造をもつ. このとき, 任意の $p, q \geq 0$ について,

$$\mathcal{H}_{(p,q)} \cong \bigoplus_{\substack{i+j=p+q \\ 0 \leq i \leq p}} A_i B_j / A_{i+1} B_{j-1}$$

である. ここで, 次のフィルトレーションがあることに注意する.

$$B_{p+q} \supset A_1 B_{p+q-1} \supset \cdots \supset A_p B_q \supset A_{p+1} B_{q-1}$$

ここまでの議論を (前節までの記号・状況で) $A = R[M] \subset B = S$ として適用すると,

$$\begin{aligned} \Lambda_M(p, q) &= \ell_R(S_{p+q}/M^p S_q) \\ &= \ell_R(S_{p+q}/M S_{p+q-1}) + \ell_R(M S_{p+q-1}/M^2 S_{p+q-2}) + \cdots + \ell_R(M^{p-1} S_{q+1}/M^p S_q) \\ &= \ell_R(\mathcal{H}_{(p-1, q+1)}) \end{aligned}$$

となり, $\Lambda_M(p, q)$ は $\mathcal{H}(-1, 1)$ のヒルベルト関数に一致することがわかる.

参考文献

- [1] M. Auslander and D. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, Ann. of Math. (2) 68 (1958), 625–657
- [2] C. Biviá-Ausina, The integral closure of modules, Buchsbaum-Rim multiplicities and Newton polyhedra, J. London Math. Soc. (2) 69 (2004), 407–427
- [3] G. Boffi and D. A. Buchsbaum, Threading homology through algebra: selected patterns, Oxford Mathematical Monographs 2006

- [4] J. Brennan, B. Ulrich and W. V. Vasconcelos, The Buchsbaum-Rim polynomial of a module, *J. Algebra* 241 (2001), 379–392
- [5] D. A. Buchsbaum, A generalized Koszul complex. I. *Trans. Amer. Math. Soc.* 111 (1964), 183–196
- [6] D. A. Buchsbaum and D. S. Rim, A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 111 (1964), 197–224
- [7] T. Gaffney, Multiplicities and equisingularity of ICIS germs. *Invent. Math.* 123 (1996), 209–220
- [8] F. Hayasaka, A computation of Buchsbaum-Rim functions of two variables in a special case, to appear in *Rocky Mountain J. Math*
- [9] F. Hayasaka and E. Hyry, A note on the Buchsbaum-Rim multiplicity of a parameter module, *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010), 545–551
- [10] F. Hayasaka and E. Hyry, On the Buchsbaum-Rim function of a parameter module, *J. Algebra* 327 (2011), 307–315
- [11] D. Kirby, A sequence of complexes associated with a matrix, *J. London Math. Soc.* (2) 7 (1974), 523–530
- [12] D. Kirby, On the Buchsbaum-Rim multiplicity associated with a matrix, *J. London Math. Soc.* (2) 32 (1985), no. 1, 57–61
- [13] D. Kirby and D. Rees, Multiplicities in graded rings. I. The general theory. *Commutative algebra: syzygies, multiplicities, and birational algebra* (South Hadley, MA, 1992), 209–267, *Contemp. Math.*, 159, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994
- [14] D. Kirby and D. Rees, Multiplicities in graded rings. II. Integral equivalence and the Buchsbaum-Rim multiplicity. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 119 (1996), no. 3, 425–445
- [15] S. Kleiman and A. Thorup, A geometric theory of the Buchsbaum-Rim multiplicity, *J. Algebra* 167 (1994), no. 1, 168–231
- [16] S. Kleiman and A. Thorup, Mixed Buchsbaum-Rim multiplicities, *Amer. J. Math.* 118 (1996), no. 3, 529–569
- [17] J.-P. Serre, *Algèbre Locale. Multiplicités*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 11. Springer, Berlin 1965

〒070-8621 北海道旭川市北門町9丁目
 北海道教育大学旭川校 数学教育専攻
 E-mail : hayasaka.futoshi@a.hokkyodai.ac.jp