

# 自己移入的 Koszul 多元環に対する有限条件 (Fg)

板場 綾子 (静岡大学)\*

## 概 要

本報告集は, [5] に基づいている.  $k$  を標数が 0 の代数的閉体,  $A$  を次数 1 で生成される連結次数付き  $k$ -多元環とする. 毛利出氏は, cogeometric な自己移入的 Koszul 多元環  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  が, Erdmann らによって導入された有限条件 (Fg) を満たすかどうかの判定法として, 以下のような予想を立てた. ただし,  $E$  は射影多様体,  $\sigma$  はその自己同型である.

予想  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし,  $k$  の complexity が有限であるとする. このとき,  $A$  が (Fg) 条件を満たすことの必要十分条件は,  $\sigma$  の位数が有限であることである.

上の予想は, 非可換代数幾何学と多元環の表現論の内容をつなぐものとなっている. 本報告集では, 上の予想の部分的解決を与える.

## 1. 序

代数的閉体  $k$  上の有限次元多元環  $\Lambda$  に対して, Erdmann, Holloway, Taillefer, Snashall と Solberg [3] は,  $\Lambda$  のホッホシルトコホモロジー環と Ext 多元環 (米田多元環) を用いて, サポート多様体の理論がうまく機能するために有限条件 (Fg) を導入した. さらに, Erdmann たち [3] は,  $\Lambda$  が (Fg) を満たすならば, Snashall と Solberg [8] によって定義されたサポート多様体が, 有限群の群環に対してのサポート多様体に類似した多くの性質を持つことを証明した.

以下では,  $k$  を標数が 0 である代数的閉体とし,  $A$  を次数 1 で有限生成されている  $k$  上の次数付き多元環とする. Artin, Tate と Van den Bergh [2] は, 非可換代数幾何において次数付き多元環  $A$  を研究する上で重要な役割を果たす, *point* 加群と呼ばれる加群を導入した. また, 毛利出氏 [6] は, *point* 加群の双対概念に相当する加群を定義し, これを *co-point* 加群と名付けた. *co-point* 加群は射影空間の部分集合  $E$  でパラメタライズされる.  $p \in E$  に対応する *co-point* 加群を  $M_p$  とすると,  $\Omega M_p$  も *co-point* 加群なので,  $\Omega M_p = M_{\sigma(p)}$  となるような写像  $\sigma : E \rightarrow E$  が存在する. この  $(E, \sigma)$  を  $A$  の cogeometric pair という. 特に,  $E$  が射影多様体,  $\sigma$  が  $E$  の自己同型になるとき,  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  を cogeometric と呼ぶ [6]. 毛利出氏は, cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  が (Fg) を満たすかどうかの判定法として, 以下のような予想を立てた.

予想  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし,  $k$  の complexity が有限であるとする. このとき,  $A$  が (Fg) を満たすことの必要十分条件は,  $\sigma$  の位数が有限であることである.

一般に, ホッホシルトコホモロジー環の計算をすることは容易ではない. しかし, この予想が正しいならば, 多元環  $A$  が (Fg) を満たすかどうかを直接  $A$  のホッホシルトコ

\* 静岡大学理学部数学科 〒422-8529 静岡県静岡市駿河区大谷 336  
e-mail: itaba.ayako@shizuoka.ac.jp

ホモロジー環および Ext 多元環を計算することなく,  $\sigma$  の位数を計算するのみで判定出来ることを意味する.

本研究の主結果は, この毛利出氏による予想に対して, 以下のような部分的解決を与えたものである. 自己移入的 Koszul 多元環  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  が cogeometric でかつ (Fg) を満たすならば,  $\sigma$  の位数が有限である. すなわち, この予想の一方向は常に成り立っている (Theorem 9). また,  $E$  が射影空間  $\mathbb{P}^{n-1}$  の場合, この予想は正しい (Theorem 10). さらに,  $A$  が  $(\text{rad } A)^4 = 0$  を満たす場合, この予想は正しい (Theorem 13).

## 2. 有限条件 (Fg)

この節では, [3] で導入された有限条件 (Fg) と加群の complexity の定義と性質を振り返ることにする.

代数的閉体  $k$  上の有限次元多元環  $\Lambda$  に対して, Erdmann, Holloway, Taillefer, Snashall と Solberg [3] は, 以下のような条件を導入した.

**定義 1.** ([3]) 有限次元  $k$ -多元環  $\Lambda$  が有限条件 (Fg) (以下, 単に (Fg) 条件と記す) を満たすとは,  $\Lambda$  のホッホシルトコホモロジー環  $\text{HH}^*(\Lambda)$  の次数付き部分多元環  $H$  が存在し, 次の 2 条件 (Fg1), (Fg2) を満たすことである:

**(Fg1)**  $H$  は,  $H^0 = \text{HH}^0(\Lambda) (= Z(\Lambda) : \Lambda \text{ の中心})$  を満たす可換ネーター環である.

**(Fg2)**  $\Lambda$  の Ext 多元環

$$E(\Lambda) := \text{Ext}_{\Lambda}^*(\Lambda/\text{rad } \Lambda, \Lambda/\text{rad } \Lambda) = \bigoplus_{i \geq 0}^{\infty} \text{Ext}_{\Lambda}^i(\Lambda/\text{rad } \Lambda, \Lambda/\text{rad } \Lambda)$$

は有限生成  $H$ -加群である.

ここで,  $\Lambda$  のホッホシルトコホモロジー環  $\text{HH}^*(\Lambda)$  とは, 次数付き多元環

$$\text{HH}^*(\Lambda) := \text{Ext}_{\Lambda^e}^*(\Lambda, \Lambda) = \bigoplus_{i \geq 0}^{\infty} \text{Ext}_{\Lambda^e}^i(\Lambda, \Lambda)$$

をいう. ただし,  $\Lambda^e$  は  $\Lambda$  の包絡多元環  $\Lambda \otimes_k \Lambda^{\text{op}}$  を表す.

例えば, 体  $k$  上の有限群の群環  $kG$  は (Fg) を満たすことが知られている. また,  $\Lambda$  を  $n$  変数の外積代数  $k\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle / (x_i^2, x_i x_j - \alpha_{i,j} x_j x_i) (0 \leq i, j \leq n, \alpha_{i,j} \in k \setminus \{0\})$  とする. このとき,  $\Lambda$  が (Fg) を満たすことの必要十分条件は,  $\alpha_{i,j}$  が 1 の原始べき乗根となることである ([4]). この 2 つの例の多元環は, ともに自己移入的多元環であることを注意しておく.

**注意 2.** 有限次元多元環  $\Lambda$  が (Fg) を満たすならば, べき零元を法とするホッホシルトコホモロジー環  $\text{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}_{\Lambda}$  と Ext 多元環  $E(\Lambda)$  はともに多元環として有限生成となる.

次に,  $k$ -多元環  $\Lambda$  の極小射影分解を用いて定められる左  $\Lambda$ -加群  $M$  の complexity を定義しよう. これは, 極小射影分解の増大度を測る指標である. 以下の列を  $M$  の極小射影分解とする:

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

$M$  の complexity  $\text{cx}(M)$  を

$$\min \{b \in \mathbb{N}_0 \mid a \in \mathbb{R} \text{ が存在し, 任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } \dim_k P_n \leq an^{b-1} \text{ を満たす} \}$$

で定める. また,  $M$  が周期的であるとは, ある自然数  $m$  が存在し,  $\Omega^m M \cong M$  が成り立つことをいう. ただし,  $\Omega^m M$  は,  $M$  の  $m$  次 syzygy を表す. 定義より以下の2つの注意がすぐに導かれる.

**注意 3.** (1) 左  $\Lambda$ -加群  $M$  の complexity が 0 であることの必要十分条件は,  $M$  が有限な射影次元を持つことである. (2)  $M$  が周期的であるならば,  $M$  の complexity が 1 になる. 一般にはこの逆は成り立たない. しかし,  $\Lambda$  が (Fg) を満たすならば,  $M$  が周期的であることと,  $M$  の complexity が 1 になることは同値になる.

### 3. Cogeometric pair と cogeometric algebra

この節では, co-point 加群, cogeometric pair, cogeometric algebra の定義と性質を [6] より振り返る.

Artin, Tate と Van den Bergh [2] は, 非可換代数幾何において次数付き多元環  $A$  を研究する上で重要な役割を果たす, point 加群と呼ばれる加群を導入した. また, 毛利出氏 [6] は, point 加群の双対概念に相当する加群を定義し, これを co-point 加群と名付けた.

ここで,  $A = k\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle / I$  とする. ただし,  $I$  は  $A$  の両側イデアルとする.  $n-1$  次射影空間  $\mathbb{P}^{n-1}$  の各点  $p = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  に対して, 記号の乱用であるが,  $A$  から  $A$  への左  $A$ -加群準同型  $p$  の 1 の行き先を  $p(1) := a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  と定める. このとき, 任意の  $f \in A$  に対して,  $p(f) = f \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)$  となる. また, Coker  $p$  を  $M_p$  とおく.

**定義 4.** ([6]) 左  $A$ -加群  $M$  が co-point 加群であるとは, 任意の自然数  $i$  に対して, ある点  $p_i \in \mathbb{P}^{n-1}$  が存在し,  $M$  の最小自由分解が次のようになることである:

$$\dots \xrightarrow{p_{m+1}} A \xrightarrow{p_m} A \xrightarrow{p_{m-1}} \dots \xrightarrow{p_2} A \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{p_0} A \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

**注意 5.** co-point 加群  $M$  の最小自由分解に関して, 各項の自由加群の階数が 1 であり, かつ各 differential が一次式であるということである. 各項の自由加群の階数が 1 であることより, co-point 加群  $M$  の complexity は 1 となる. また, 最小自由分解は完全列であるので,  $M = M_{p_0}$ ,  $\Omega^m M = M_{p_m}$  ( $\forall m \geq 1$ ) となる.

co-point 加群は射影空間の部分集合  $E$  でパラメタライズされる.  $p \in E$  に対応する co-point 加群を  $M_p$  とすると,  $\Omega M_p$  も co-point 加群なので,  $\Omega M_p = M_{\sigma(p)}$  となるような写像  $\sigma: E \rightarrow E$  が存在する. つまり,  $p \in E$  に対応する co-point 加群  $M_p$  の最小自由分解が

$$\dots \xrightarrow{\sigma^{m+1}(p)} A \xrightarrow{\sigma^m(p)} A \xrightarrow{\sigma^{m-1}(p)} \dots \xrightarrow{\sigma^2(p)} A \xrightarrow{\sigma(p)} A \xrightarrow{p} A \xrightarrow{\varepsilon} M_p \longrightarrow 0$$

となるような写像  $\sigma: E \rightarrow E$  が存在する.

**定義 6.** ([6]) 特に, 上の  $E$  が射影多様体,  $\sigma$  が  $E$  の自己同型になるとき, 幾何的組  $(E, \sigma)$  を  $A$  の cogeometric pair と呼び, また  $A$  を cogeometric algebra という. この場合,  $\mathcal{P}^1(A) = (E, \sigma)$  and  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  と各々書くことにする.

[2], [7], [6] を用いると, 定理を得る.

**定理 7.** 次数付き多元環  $A$  を自己移入的 Koszul とし,  $k$  の complexity が有限, かつ  $(\text{rad } A)^4 = 0$  とする. このとき,  $k$  の complexity は 3 以下であり,  $A$  は cogeometric である.

**例 8.**  $A$  を以下の次数付き  $k$ -多元環とする:

$$A = k\langle x, y \rangle / (x^2, \alpha xy + yx, y^2) \quad (\alpha \in k \setminus \{0\}).$$

多元環  $A$  は自己移入的多元環で,  $\text{cx}(k) = 2$  である. 定理 7 より,  $A$  は co-geometric である. よって, 計算することにより,  $A$  の cogeometric pair  $\mathcal{P}^1(A)$  は  $(\mathbb{P}^1, \sigma)$  となる. ただし,

$$\sigma := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aut } \mathbb{P}^1 = \text{PGL}_2(k).$$

#### 4. 主結果

この節では, 毛利出氏による予想に関する本研究の主結果とその例を述べていく. ここで, 有限条件 (Fg) と cogeometric algebra  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  との関係に関する予想を再掲する.

**予想**  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし,  $k$  の complexity が有限であるとする. このとき,  $A$  が (Fg) を満たすことの必要十分条件は,  $\sigma$  の位数が有限であることである.

以下, この予想に関する本研究の主結果を述べていく. 最初の定理は, 予想の一方が常に成り立っていることを示している. これは特に Koszul 性を仮定しなくても成立している.

**定理 9.** ([5]) 有限次元自己移入的  $k$ -多元環  $A$  が cogeometric かつ (Fg) 条件を満たすならば,  $\sigma$  の位数が有限である.

次の定理は,  $A$  の cogeometric pair を与える  $E$  が  $n - 1$  次射影空間  $\mathbb{P}^{n-1}$  の場合, 上の予想が成り立つことを示したものである.

**定理 10.** ([5])  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし,  $k$  の complexity が有限であるとする. このとき,  $A = \mathcal{A}^1(\mathbb{P}^{n-1}, \sigma)$  ならば,  $A$  が (Fg) を満たすことの必要十分条件は  $\sigma$  の位数が有限であることである.

[1], [6], [7] を用いることにより, 以下のような,  $\text{cx}(k) < \infty$  である自己移入的 Koszul 多元環  $A$  の分類を得る:

(i)  $\text{rad } A = 0 \rightsquigarrow A \cong k$  (次数付き  $k$ -多元環として),  $\mathcal{P}^1(A) = (\phi, \text{id});$

(ii)  $(\text{rad } A)^2 = 0 \rightsquigarrow A \cong k[x]/(x^2)$   $\mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^0, \text{id});$

(iii)  $(\text{rad } A)^3 = 0 \rightsquigarrow$   

$$\begin{cases} A \cong k\langle x, y \rangle / (x^2, \alpha xy + yx, y^2) \ (\alpha \in k \setminus \{0\}), \ \mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^1, \sigma_1), \\ A \cong k\langle x, y \rangle / (-x^2 + xy, xy + yx, y^2), \ \mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^1, \sigma_2), \end{cases}$$

ただし,  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  である.

$(\text{rad } A)^3 = 0$  の場合,  $E$  は射影空間になっていることが分かる. 上の分類と定理 10 より, 以下の系を得る.

**系 11.** ([5])  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  を *cogeometric* で, 自己移入的 *Koszul* 多元環とし,  $k$  の *complexity* が有限であるとする. このとき,  $A$  が  $(\text{rad } A)^3 = 0$  を満たすならば,  $A$  が (Fg) を満たすことの必要十分条件は  $\sigma$  の位数が有限であることである.

以下において, 系 11 の例を与える.

**例 12.** 次のような次数付き  $k$ -多元環  $A$  を考える:

$$A = k\langle x, y \rangle / (ax^2 + byx, cx^2 + axy + dyx + by^2, cxy + dy^2) \quad (a, b, c, d \in k).$$

このとき,  $A$  が自己移入的 *Koszul* 多元環であることの必要十分条件は,  $ad - bc \neq 0$  が成り立つことである. また,  $A$  は *cogeometric* であるので, 以下のような  $A$  の *cogeometric pair*  $\mathcal{P}^1(A)$  を得る:

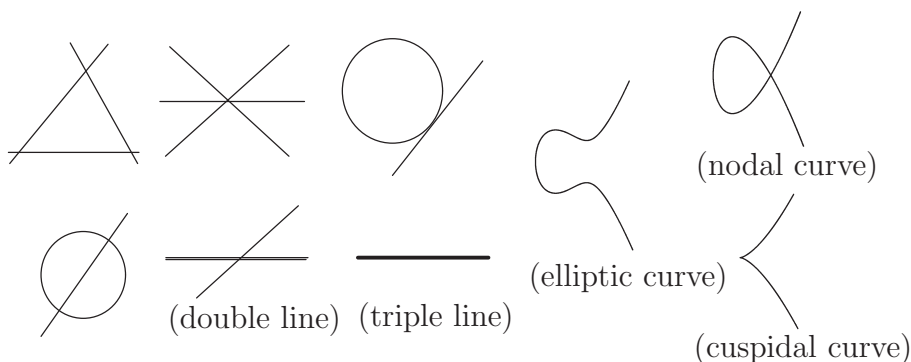
$$\mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^1, \sigma) \quad \left( \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \in \text{PGL}_2(k) = \text{Aut } \mathbb{P}^1.$$

さらに, 系 11 を用いると,  $A$  が (Fg) を満たすことの必要十分条件は, ある自然数  $n \in \mathbb{N}$  が存在し,  $\sigma^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を満たすことである.

系 11 より一般的な主張を述べたものが, 次の定理である.

**定理 13.** ([5])  $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$  を *cogeometric* で, 自己移入的 *Koszul* 多元環とし,  $k$  の *complexity* が有限であるとする. このとき,  $A$  が  $(\text{rad } A)^4 = 0$  を満たすならば,  $A$  が (Fg) を満たすことの必要十分条件は  $\sigma$  の位数が有限であることである.

**注意 14.**  $(\text{rad } A)^3 \neq 0$  かつ  $(\text{rad } A)^4 = 0$  の場合,  $E$  の候補としては, 射影平面  $\mathbb{P}^2$  または以下のような  $\mathbb{P}^2$  内の 3 次曲線になることが知られている ([2]).



最後に, 定理 13 に対する例を挙げ, 本報告集を終えることにする.

**例 15.**  $(E, \sigma)$  を *cogeometric pair* とする. ただし,  $E$  は  $\mathbb{P}^2$  の 3 つの直線がなす三角形,  $\sigma \in \text{Aut } E$  は 3 つの直線を回すものとする. つまり, 以下を仮定するものとする:

$$E := \mathcal{V}(xyz) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y) \cup \mathcal{V}(z),$$

$\sigma(\mathcal{V}(x)) := \mathcal{V}(y), \sigma(\mathcal{V}(y)) := \mathcal{V}(z), \sigma(\mathcal{V}(z)) := \mathcal{V}(x)$ . このとき,  $E$  の自己同型  $\sigma \in \text{Aut } E$  を決定すると, 次を得る.

$$\begin{cases} \sigma(0, b, c) = (\alpha c, 0, b), \\ \sigma(a, 0, c) = (c, \beta a, 0), \\ \sigma(a, b, 0) = (0, a, \gamma b), \end{cases}$$

ただし,  $\alpha\beta\gamma \neq 0, 1$  である. さらに,  $(E, \sigma)$  に対応する cogemetric algebra  $A = \mathcal{A}^!(E, \sigma)$  を計算すると,

$$A = k\langle x, y, z \rangle / \begin{pmatrix} x^2 + \beta zy, & xy, \\ y^2 + \gamma xz, & yz, \\ z^2 + \alpha yx, & zx \end{pmatrix}$$

となる. ただし,  $\alpha\beta\gamma \neq 0, 1$  である. この多元環  $A$  は,  $k$  の complexity が有限な, 自己移入的 Koszul 多元環で,  $(\text{rad } A)^4 = 0$  を満たすことが分かる.

一方,  $\sigma^3 \in \text{Aut } E$  を計算すると,

$$\begin{cases} \sigma^3(0, b, c) = (0, b, \alpha\beta\gamma c), \\ \sigma^3(a, 0, c) = (\alpha\beta\gamma a, 0, c), \\ \sigma^3(a, b, 0) = (a, \alpha\beta\gamma b, 0). \end{cases}$$

を得る. このとき,

$$|\sigma^3| < \infty \iff |\sigma| < \infty \iff \alpha\beta\gamma : 1 \text{ のべき乗根.}$$

よって, 定理 13 を用いると,  $A$  が  $(Fg)$  を満たすことの必要十分条件は,  $\alpha\beta\gamma$  が 1 のべき乗根であることである.

## 参考文献

- [1] M. Artin and W. Schelter, *Graded algebras of global dimension 3*, Adv. Math. **66** (1987), 171–216.
- [2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Mathematics vol. **86** (Birkhäuser, Basel, 1990) 33–85.
- [3] K. Erdmann, M. Holloway, R. Taillefer, N. Snashall and Ø. Solberg, *Support varieties for selfinjective algebras*, K-Theory **33** (2004), no. 1, 67–87.
- [4] K. Erdmann and Ø. Solberg, *Radical cube zero weakly symmetric algebras and support varieties*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 185–200.
- [5] A. Itaba, *Finiteness condition (Fg) for self-injective Koszul algebras*, submitted.
- [6] I. Mori, *Co-point modules over Koszul algebras*, J. London Math. Soc. **74** (2006), 639–656.
- [7] S. P. Smith, *Some finite dimensional algebras related to elliptic curves*, in Representation Theory of Algebras and Related Topics (Mexico City, 1994), CMS Conf. Proc. **19**. Amer. Math. Soc., Providence, (1996), 315–348.
- [8] N. Snashall and Ø. Solberg, *Support varieties and Hochschild cohomology rings*, Proc. London Math. **81** (2004), 705–732.
- [9] Ø. Solberg, *Support varieties for modules and complexes*, Trends in representation theory of algebras and related topics, Contemp. Math., **406**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2006), 239–270.