

対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面について

小島秀雄

0. 序

飯高茂氏による対数的小平次元の理論 (cf. [7], [10] 等) により, 開代数多様体 (完備でない代数多様体) に対してもその完備化を考えることにより, 完備な場合と同様に研究できることが期待できるようになった. これは特にアフィン代数多様体の研究には有用であり, 代数幾何の手法を用いたアフィン代数多様体の研究が進展している. 開代数曲面については, 代数曲面の研究の深化に伴い, 特に研究が進展している. 開代数曲面の研究成果については, 宮西 [24], [25], [26] に 10 年位前までの主要な結果が紹介されている. 近年も, 特に対数的小平次元が 2 の \mathbb{Q} ホモロジー平面 (注. \mathbb{Q} ホモロジー平面とは, 複素アフィン平面と \mathbb{Q} 係数ホモロジー群が等しくなる非特異アフィン代数曲面である) に関する研究が飛躍的に進歩しており, その応用として, 尖点平面有理曲線 (全ての特異点が解析的に既約となる平面有理曲線) の研究が K. Palka 氏を中心に精力的に進められている.

本稿は対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面の研究成果に関する概説である. 対数的小平次元がゼロとなる代数多様体のクラスは特殊なもののように思われるかも知れないが, 小平次元がゼロとなる代数多様体のクラスには興味深い性質を持つものが多くあることと同様に, 対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面にも興味深いものがある, と筆者は考えている. また, 対数的小平次元がゼロとなる代数多様体は飯高ファイバー空間の一般ファイバーとして現れる.

シンポジウムでの発表では, 対数的小平次元がゼロでない場合の構造定理も紹介したが, 本稿ではそれは掲載しない. 尚, 本稿は既に筆者が発表した報告 [17] と [19] とかなり重複している. 本稿では, [17] と [19] で触れられていない結果も紹介する. 特に, 正標数の場合の結果にも言及している. 更に, [17] と [19] には分類結果に不備があった結果も含まれているので, それも修正する.

1. 基本的結果と極小モデルの構成

いくつか用語を定義する. k を代数閉体とし, 以下, 基礎体として固定する. S を非特異開代数曲面とする. このとき, 非特異射影代数曲面 X とその上の被約単純正規交差因子 (今後, SNC 因子と呼ぶ) B で, $X \setminus \text{Supp} B \cong S$ となるものが存在する. この対 (X, B) を S の SNC 完備化と呼ぶ. S の対数的 n 種数 $\bar{P}_n(S)$ と対数的小平次元 $\bar{\kappa}(S)$ を次のように定義する:

$$\bar{P}_n(S) := h^0(X, n(B + K_X)) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \bar{\kappa}(S) := \kappa(X, B + K_X).$$

ここで, $\kappa(X, B + K_X)$ は X の $(B + K_X)$ 次元である. 上記の定義は S の SNC 完備化のとり方には依存しない. $\bar{p}_g(X) = \bar{P}_1(S)$ と書いて, これを対数的幾何種数と呼ぶこともある. ここまでは, 基礎体 k の標数が正となる場合も定義される (上林 [11]).

S を研究するためには S の SNC 完備化 (X, B) を研究すると有用であることが多い. また, (X, B) を研究するためには, (X, B) の (ある種の) 極小モデルを考えると構造を調べやすい. 非特異射影代数曲面とその上の SNC 因子の対に関する極小モデル理論は川又氏, 藤田氏, 角田氏等によって確立された. また, この極小モデル理論は 3 次元以上の場合や, SNC 因子ではなく \mathbb{R} 因子との対の場合等に拡張されている. ただ, 非特異射影代数曲面とその上の SNC 因子の対に関する極小モデル理論は (一見すると大分異なる) いくつかのヴァージョンがある. ここでは, 非特異射影代数曲面とその上の SNC 因子の対に関する極小モデル理論は [25, Chapter 2] にあるものを利用する. [25, Chapter 2] は角田 [35] で展開されているものを, 対数的小平次元が $-\infty$ の場合にも成り立つようにしたものである. [25, Chapter 2] にあるものは極小モデルの構成方法が具体的であるため, 極小モデルから元の曲面の状況を知るのに便利である. その反面, やや複雑な組み合わせ論的議論が含まれているため, 一見すると難しく感じられるかも知れない.

S の対数的小平次元はゼロ以上であると仮定する. このとき, $B + K_X$ は pseudo-effective であるので, $B + K_X$ の Zariski 分解が存在する. $B + K_X$ の Zariski 分解を次のように表す:

$$B + K_X = (B + K_X)^+ + (B + K_X)^-.$$

ここで, $(B + K_X)^+$ は nef \mathbb{Q} 因子で (通常, $B + K_X$ の nef 部分と呼ばれる), $(B + K_X)^-$ は 0 でなければ正因子でその交叉行列は不定値行列となる. 次の定理は対数的小平次元がゼロ以上となる開代数曲面を調べる上で, 基本的な結果である.

定理 1.1. (川又 [12], 藤田 [6]) 上記の仮定と記号の下, $(B + K_X)^+$ は半豊富である. 特に, $\bar{\kappa}(S) = 0$ ならば, 正の整数 n で $n(B + K_X)^+ \sim 0$ となるものが存在する.

尚, 定理 1.1 は k の標数がゼロの場合は [12] で, 一般の場合は [6] で示されている.

このとき, (X, B) の極小モデルは次のようにして構成される. $f : X \rightarrow W$ を $\text{Supp}(B + K_X)^-$ 内の (-1) 曲線を順次ブローダウンしたものとする (つまり, $\text{Supp}f_*((B + K_X)^-)$ が (-1) 曲線を含まなくなるまでブローダウンを繰り返す). $C := f_*(B)$ と置く. このとき, 次が成り立つ.

補題 1.2. (cf. [35], [25, Chapter 2, §3]) 上記の仮定と記号の下, 次の (1)–(4) が成り立つ.

- (1) C は SNC 因子である.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\bar{P}_n(W \setminus \text{Supp}C) = \bar{P}_n(X \setminus \text{Supp}B)$ となる. 特に, $\bar{\kappa}(W \setminus \text{Supp}C) = \bar{\kappa}(X \setminus \text{Supp}B)$ となる.
- (3) $f_*((B + K_X)^+) = (C + K_W)^+$ となり (注. $C + K_W$ は (2) より pseudo-effective となるので, その Zariski 分解の nef 部分を $(C + K_W)^+$ とする), $C^\# := C - (C + K_W)^- \geq 0$ となる.

- (4) $\pi : W \rightarrow \overline{W}$ を $\text{Supp}(C + K_W)^-$ の縮約とすると, $(\overline{W}, \pi_*(C))$ は高々対数的末端特異点しか持たない.

上記の対 (W, C) は (X, B) の極小モデルで, 通常, 概極小モデル (almost minimal model) と呼ばれる. 尚, [35] では基礎体の標数がゼロであることを仮定しているが, 上記は正標数の場合も成り立つことを注意する.

$\bar{\kappa}(S) = 0$ の場合, 定理 1.1 と補題 1.2 (3) により $n(C + K_W)^+ \sim 0$ となる正の整数 n が存在する. 特にそのような n の最小値を求めることは重要である. 今の場合, $n(C + K_W)^+ \sim 0$ となることと $\bar{P}_n(S) = 1$ となることが同値である. (注. $\bar{\kappa}(S) = 0$ の場合, S の対数的 n 種数は 0 または 1 である.) 以下, $I(S)$ を $\bar{P}_n(S) > 0$ となる正の整数 n の中で最小のものとする. (この記号は以降でも用いる.) k の標数がゼロの場合は, 次の結果がある.

定理 1.3. $\bar{\kappa}(S) = 0$ で, k の標数はゼロであると仮定する. このとき, 次の (1) と (2) が成り立つ.

- (1) (Blache [4]) $1 \leq I(S) \leq 21$.
- (2) ([35]) $[C^\#] \neq 0$ ($[C^\#]$ は \mathbb{Q} 因子 $C^\#$ の切り下げ) ならば, $I(S) \leq 6$.

さて, 上記の (W, C) について, $[C^\#] = 0$ となる場合は C の各連結成分は対数的末端特異点につぶれる. この場合は, これで極小モデルが得られたと考えて良い. しかし, $[C^\#] \neq 0$ となる場合では, (W, C) はそれほど極小的ではないことが分かる. これは, 概極小モデルの構成方法から分かるのだが, その感覚を次の例で説明する.

例 1.4. V を非特異射影代数曲面, D を V 上の非特異既約曲線で, $\bar{\kappa}(V \setminus D) \geq 0$ で更に, D は有理曲線ではないと仮定する. (V, D) が概極小的ではないとすると, $D + K_V$ は nef ではないことになるので, $E \cdot (D + K_V) < 0$ となる既約曲線 E が存在する. このとき, D が有理曲線でないことと $D + K_V$ が pseudo-effective であることから, E は (-1) 曲線で, $E \cdot D = 0$ となる. つまり, この場合は (V, D) の概極小モデルは D と交わらない (-1) 曲線を順次ブローダウンすることにより得られる. しかしながら, この場合には $E \cdot D = 1$ となる (-1) 曲線をつぶしても (像を (V', D') とする), 任意の正の整数 n に対して $\bar{P}_n(V \setminus D) = \bar{P}_n(V' \setminus D')$ となることが分かる.

強極小モデルの構成

(W, C) を上記の S の SNC 完備化 (X, B) の概極小モデルとする. $C' := C - [C^\#]$ とおく. 補題 1.2 (4) より, C' の各連結成分は対数的末端特異点につぶれる. $\pi : W \rightarrow \overline{W}$ を $\text{Supp} C'$ の縮約とする. ここで, \overline{W} に対して対数的極小モデルプログラムを実行し, \overline{W} の対数的極小モデルを \overline{V} とする. $\bar{g} : \overline{W} \rightarrow \overline{V}$ を対応する双有理射とする. $C' = C$ ならば (つまり, $[C^\#] = 0$ ならば), $\bar{\kappa}(S) \geq 0$ より \overline{W} の標準因子は nef なので, \bar{g} は恒等写像である.

もっと詳しく言うと, 上記の \overline{V} は次のようにして構成される. \overline{W} 上の曲線 \overline{C} で, $\overline{C}^2 < 0$ かつ $\overline{C} \cdot K_{\overline{W}} < 0$ ($K_{\overline{W}}$ は \overline{W} の標準因子で, 交点数は特異点解消した上での引き戻したものの交点数のことである (詳しくは [34] をみよ)) となるものが存在した

とする。 \bar{C} の自己交点数は負であることから、 \bar{C} を縮約することができるが、 \bar{C} を縮約することによりできる曲面 \bar{W}_1 は (\bar{W} が高々対数的末端特異点しか持たないことから) 高々対数的末端特異点しか持たない正規射影代数曲面であることが分かる (詳しくは極小モデル理論を説明している文献を参照せよ。 [25, Chapter 2, §4] にもある)。 \bar{V} は $\bar{C}^2 < 0$, $\bar{C} \cdot K_{\bar{W}} < 0$ となる曲線 \bar{C} を順次縮約することによって得られる。

$\pi_1 : V \rightarrow \bar{V}$ を \bar{V} の最小特異点解消とすると、双有理射 $g : W \rightarrow V$ で、 $\bar{g} \circ \pi = \pi_1 \circ g$ となるものが存在する。 $D := g_*(C)$ とおく。通常、 D は SNC 因子ではなくなるが、次の補題が成り立つ。

補題 1.5. S が $\bar{\kappa}(S) = \bar{p}_g(S) = 0$ となる非特異開有理曲面であると仮定する。このとき、次の (1)–(4) が成り立つ。

- (1) D は SNC 因子である。
- (2) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、 $\bar{P}_n(V \setminus \text{Supp}D) = \bar{P}_n(W \setminus \text{Supp}C)$ となる。特に、 $\bar{\kappa}(V \setminus \text{Supp}D) = \bar{\kappa}(W \setminus \text{Supp}C) (= 0)$ となる。
- (3) (V, D) は almost minimal (つまり、 (V, D) 自身が (V, D) の概極小モデルになる) で、 $D^\# + K_V \equiv g_*(C^\# + K_W) \equiv 0$ になる。 ($D^\#$ の定義は補題 1.2 の $C^\#$ と同じ。)

本稿では、上記の対 (V, D) を (X, B) の強極小モデルと呼ぶ。実は、 (V, D) は (W, C) からどのような曲線を縮約することにより得られるか、ということも分かる。

2. 極小モデルはどの位分類されているか?

§1 で、対数的小平次元が非負の非特異開代数曲面に対して、その SNC 完備化の概極小モデルと強極小モデルの構成を説明した。本節では、対数的小平次元がゼロの場合に、それらの極小モデルの分類がどの位分かっているかについて説明する。分類結果が複雑であるので、個々の分類結果を紹介するのではなく、大雑把な紹介をするだけにする。また、筆者の能力不足で、全ての結果を紹介できていない (特に対数的 Enriques 曲面に関する結果)。

以後、 k を標数 $p(\geq 0)$ の代数閉体とし、基礎体として固定する。 S を対数的小平次元ゼロの非特異開代数曲面とし、 (X, B) を S の SNC 完備化とする。 (W, C) と (V, D) をそれぞれ、 (X, B) の概極小モデルと強極小モデルとする。(複雑になってしまうが、個々の設定において、 (W, C) を決定する場合と (V, D) の方を決定する場合に分かれるので、分けて書く。) $C^\#, D^\#$ の記号については、補題 1.2 と補題 1.5 をみよ。

$\bar{\kappa}(S) = 0$ より、 X の小平次元はゼロ以下である。 X の小平次元がゼロのときは、定理 1.1 と補題 1.2 により、次の結果を得る。

命題 2.1. X の小平次元がゼロのとき、 (W, C) について、次の結果が成り立つ。

- (1) W は極小的である。従って、 $K_W \equiv 0$ となる。
- (2) $C^\# = 0$ である。特に、 C の各連結成分は標準特異点につぶれる (C の各既約成分は (-2) 曲線である)。

この場合の S の分類は小平次元ゼロの非特異射影代数曲面の分類に帰着される。

以後, X の小平次元が $-\infty$ であるとする. この場合, これまでのところ, 次の場合の概極小モデル (W, C) の分類が完成している.

- (1) 有理曲面でない曲面 (つまり, 非有理線織曲面) の分類. $p = 0$ の場合は飯高 [8] [9], 酒井 [33] 等で分類されている. 最近, $p > 0$ の場合も分類された. 詳しくは, [20, §2] をみよ.
- (2) $p = 0$ で $\bar{p}_g(S) > 0$ となる場合の分類. (飯高 [9], Zhang [36].) 有理曲面でない場合は上記 (1) で分類されているので, ここでは, S が有理曲面であることを仮定している. [36] では論文の題名にある通り, この場合の対 (W, C) を飯高曲面と呼んでいる.
- (3) C が連結 ($\text{Supp}C$ が連結) となる場合の分類. (藤田 [5, §8], [14].) 例えば, S がアフィン代数曲面の場合は, S の無限遠境界 B が連結になり, 自動的に C も連結になるので, この仮定をつけても意味がある. 尚, この場合は $p > 0$ の場合も確立している ([14]).

尚, 上記の分類結果は膨大であるため, 分類結果の詳細は省略する.

以後, S は有理曲面で $\bar{p}_g(S) = 0$ (つまり, 定理 1.3 の前で定義した $I(S)$ を使うと, $I(S) > 1$) となる場合を考える. また, この節では以後, $p = 0$ であると仮定する. (以下の部分では部分的には $p > 0$ のときも成り立つ結果があるが, 全て分かっている訳ではないので, $p = 0$ とする.) この場合, 次の 2 つの場合が考えられる.

I. $[C^\#] = 0$ となる場合. この場合は, 補題 1.2 (4) により, C の各連結成分は対数的末端特異点につぶれる. $\pi : W \rightarrow \bar{W}$ を $\text{Supp}C$ の縮約とする. このとき, \bar{W} の標準因子は数値的に自明である. このような曲面 \bar{W} は対数的 Enriques 曲面と呼ばれ, 現在まで様々な興味深い研究が行われている. 詳しくは, Blache [4], Kudryavtsev [21] [22], 小木曾-Zhang [29] [30] [31], Zhang [37] [38] [39] [40] [41] 等を参照せよ. 簡単にいうと, \bar{W} の標準被覆はアーベル曲面が高々有理 2 重点のみを持つ $K3$ 曲面となる. 標準被覆がアーベル曲面になる場合は Blache [4] で分類されており, $K3$ 曲面の場合も, 分類は完全には分かっていないものの, とても興味深い研究成果が得られている.

II. $[C^\#] \neq 0$ となる場合. 本節では以後, この場合の考察を行う. この場合は先の I の場合よりも面白くない対象のように思われる. しかし, この場合もある程度意味がある. 例えば, \bar{S} を高々対数的末端特異点のみを持つ正規アフィン代数曲面で \bar{S} の非特異部分 $\bar{S} \setminus \text{Sing}\bar{S}$ の対数的小平次元と対数的幾何種数が共にゼロであったと仮定する. $S = \bar{S} \setminus \text{Sing}\bar{S}$ として, 上の記号を用いると, この場合の概極小モデル (W, C) は II の仮定をみたとす.

この場合は, 強極小モデル (V, D) を考えると上手くいく. §1 でも書いたが, (W, C) からどのような曲線をつぶして (V, D) が得られるかが大体分かっているので, (V, D) が分類できれば, (W, C) も分かる. 更に, 補題 1.5 により, D は SNC 因子で対 (V, D) は概極小的であるので, 考察しやすい. 以後, (V, D) を調べることにする.

$\pi_1 : V \rightarrow \bar{V}$ は前節でのものだが、 V からみると、 $D - [D^\#]$ の縮約になっている。 $\bar{D} := \pi_*(D)$ とおくと、 $\bar{D} \neq 0$ で、 $\bar{D} + K_{\bar{V}} \equiv 0$ となる。よって、 $K_{\bar{V}} \equiv -\bar{D}$ は nef でない。 \bar{V} は対数的極小モデルプログラムの結果生じたものであるので、 \bar{V} は対数的森ファイバー空間の構造を持つことが分かる。よって、次の (A), (B) のいずれかの場合が成り立つ。

- (A) \bar{V} は曲線上の log conic bundle structure を持つ。今の場合、 \mathbb{P}^1 ファイブレーション (一般ファイバーが \mathbb{P}^1 となるファイブレーション) $\bar{h} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{P}^1$ で、 \bar{h} の全てのファイバーが既約となるものが存在する。
- (B) \bar{V} のピカル数は 1 で、 \bar{V} の反標準因子 $-K_{\bar{V}}$ は豊富である。このような曲面 \bar{V} は対数的 del Pezzo 曲面と呼ばれる。

(A) の場合を考察する。 \bar{F} を \bar{h} の一般ファイバーとすると、 $\bar{D} \equiv -K_{\bar{V}}$ であることから、 $\bar{D} \cdot \bar{F} = 2$ となる。従って、 $h := \bar{h} \circ \pi_1$ とおくと、 h は V の \mathbb{P}^1 上の \mathbb{P}^1 ファイブレーションとなり、 h の $V - D$ への制限 $h|_{V-D}$ は一般ファイバーが \mathbb{A}_*^1 (アフィン直線 \mathbb{A}^1 から一点を除いたもの) となるファイブレーション (\mathbb{A}_*^1 ファイブレーションと呼ぶ) となる。つまり、次の結果が成り立つ。

命題 2.2. (V, D) は上記の (A) をみたと仮定する。このとき、 $V - D$ から曲線への \mathbb{A}_*^1 -ファイブレーションが存在する。

この場合の (V, D) の分類は完成しているが、分類結果がかなり複雑なので、省略する。

対数的 2 種数が正になる、つまり、 $I(S) = 2$ となる場合は、指数 2 以下の対数的 del Pezzo 曲面の分類結果 ([1], [27], [16] 等) により次のことが分かる。

命題 2.3. ([18]) $I(S) = 2$ ならば、(B) の場合は起こらない。

従って、 $I(S) = 2$ の場合は対 (V, D) の分類が完成する。詳しくは [18] をみよ。

さて、(B) の場合の分類結果は次のようになる。

定理 2.4. (V, D) は上記の (B) をみたと仮定する。このとき、 (V, D) は次の例 1–例 5 のようにして構成される。

例 1. (cf. [14, Example 2.5]) H_1, H_2, H_3 を \mathbb{P}^2 内の $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \emptyset$ となる直線とし、 $P_1 := H_1 \cap H_2$, $P_2 := H_2 \cap H_3$, $P_3 := H_3 \cap H_1$ とおく。 H_4 をどの P_i ($1 \leq i \leq 3$) も通らない直線とする。 $\mu_0 : V_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ を 3 点 P_i ($i = 1, 2, 3$) でのブローアップとし、 $E_i := \mu_0^{-1}(P_i)$ ($i = 1, 2, 3$) とおく。 $\mu_1 : V \rightarrow V_1$ を 3 点 $\mu_0'(H_i) \cap E_i$ ($i = 1, 2, 3$) でのブローアップとし、

$$D := \mu_1'(E_1 + E_2 + E_3 + \mu_0'(\sum_{i=1}^4 H_i))$$

とおく。 D は以下の図 1-(i) のようになっている。この対 (V, D) を [5, §8] に従って、 $Y\{3, 3, 3\}$ と呼ぶこともある。尚、この例では $I(S) = 3$ となる。

例 2. (cf. [14, Example 2.6]) $V_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とする. l_1, l_2, l_3 を第一射影 $V_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の 3 つのファイバーとし, $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ を第二射影 $V_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の 3 つのファイバーとする. $P_1 := l_1 \cap \bar{l}_1, P_2 := l_2 \cap \bar{l}_1, P_3 := l_2 \cap \bar{l}_3, P_4 := l_3 \cap \bar{l}_3$ とおき, $\mu_0 : V_1 \rightarrow V_0$ を P_1, \dots, P_4 でのブローアップとする. $E_1 := \mu_0^{-1}(P_1), E_4 := \mu_0^{-1}(P_4)$ とおく. $\mu_1 : V \rightarrow V_1$ を 2 点 $E_1 \cap \mu'_0(l_1), E_4 \cap \mu'_0(l_3)$ でのブローアップとし,

$$D := \mu'_1(E_1 + E_4 + \mu'_0\left(\sum_{i=1}^3 (l_i + \bar{l}_i)\right))$$

とおく. D は以下の図 1-(ii) のようになっている. この対 (V, D) を [5, §8] に従って, $Y\{2, 4, 4\}$ と呼ぶこともある. 尚, この例では $I(S) = 4$ となる.

例 3. (cf. [14, Example 2.7]) $V_0 := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, l_i (i = 1, 2, 3), \bar{l}_j (j = 1, 2, 3)$ は例 2 と同じものとする. $P_1 := l_1 \cap \bar{l}_2, P_2 := l_2 \cap \bar{l}_3, P_3 := l_3 \cap \bar{l}_1, P_4 := l_1 \cap \bar{l}_3$ とおき, $\mu_0 : V_1 \rightarrow V_0$ を P_1, \dots, P_4 でのブローアップとする. $E_i := \mu_0^{-1}(P_i) (1 \leq i \leq 3)$ とおく. $\mu_1 : V \rightarrow V_1$ を 3 点 $E_1 \cap \mu'_0(\bar{l}_2), E_2 \cap \mu'_0(l_2), E_3 \cap \mu'_0(l_3)$ でのブローアップとし,

$$D := \mu'_1(E_1 + E_2 + E_3 + \mu'_0\left(\sum_{i=1}^3 (l_i + \bar{l}_i)\right))$$

とおく. D は以下の図 1-(iii) のようになっている. この対 (V, D) を [5, §8] に従って, $Y\{2, 3, 6\}$ と呼ぶこともある. 尚, この例では $I(S) = 6$ となる.

例 4. C を \mathbb{P}^2 内の既約 2 次曲線, H_1, H_2, H_3 を \mathbb{P}^2 内の直線で, 次の性質をみたすものとする.

- (1) H_1, H_2, H_3 は 1 点 P で交わり, $P \notin C$ となる.
- (2) $H_i (i = 1, 2)$ は C のある点 P_i での接線となり, H_3 は C と異なる 2 点 (P_3, P'_3 とする) で交わる.

$\mu : V \rightarrow \mathbb{P}^2$ を P, P_1, P_2, P_3 およびそれらの無限小近傍上の点のブローアップで, $\mu^{-1}(C \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ が図 2 のようになっているものとする. D を $\mu^{-1}(C \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ から図 2 で点線で表されている (-1) -曲線を除いたものとする. D は 2 つの連結成分よりなり, その片方は Y のように見え, もう片方は A_1 型有理二重点に近づれることに注意せよ. この例では $I(S) = 4$ となる.

例 5. (cf. [32, Construction 5.4]) 射影平面 \mathbb{P}^2 の斉次座標を (x, y, z) とする. $P_1 = (0, 1, 1), P_2 = (1, 1, 0), Q_1 = (1, 0, 0), Q_2 = (0, 0, 1)$ とし, 4 本の直線 $\overline{Q_1P_1}, \overline{Q_1P_2}, \overline{Q_2P_1}, \overline{Q_2P_2}$ を考える. 1 の原始 3 乗根 ζ を一つ固定し, $P_3 = (1, \epsilon, \epsilon - 1)$ (ここで, $\epsilon = -\zeta$) とする. $\overline{Q_1P_1} \cap \overline{Q_2P_2} = (1, 1, 1), \overline{Q_1P_2} \cap \overline{Q_2P_3} = (\epsilon, \epsilon - 1, 0), \overline{Q_1P_3} \cap \overline{Q_2P_1} = (0, 1, \epsilon)$ となり, これらの点は直線 $E_2 = V((1 - \epsilon)x + \epsilon y - z)$ 上にある. 更に, $\overline{Q_1P_1} \cap \overline{Q_2P_3} = (1, \epsilon, \epsilon), \overline{Q_1P_2} \cap \overline{Q_2P_1} = (0, 1, 0), \overline{Q_1P_3} \cap \overline{Q_2P_2} = (1, 1, \epsilon)$ となり, これらの点は直線 $E_1 = V(z - \epsilon x)$ 上にある. Q_1, Q_2 をそれぞれ 1 回ブローアップして, 最初のブローアップに関する例外曲線を B とする. 更に, 直線 $\overline{Q_iP_j} (1 \leq i, j \leq 3)$ と $E_1 + E_2$ の交点となる 6 点をそれぞれ 1 回ずつブローアップする. こうしてできた曲面を V, D を B, \mathbb{P}^2 上の 8 本の直線 $\overline{Q_iP_j} (1 \leq i, j \leq 3), E_1, E_2$ の V 上の固有変換

像の和とする. D は以下の図 3 のようになる. $E_1 + E_2$ の固有変換像は A_2 型有理二重点につぶれ, それ以外の D の成分は連結で Y のように見えることに注意せよ. この例では, $I(S) = 3$ となる.

以下の図では, D の既約成分は線分で表され, 線分の近くにある数字は, 対応する D の既約成分の自己交点数を表している. また, 図 2 では C, H_1, H_2, H_3 の固有変換像がどれになるのかを同じ記号で表している.

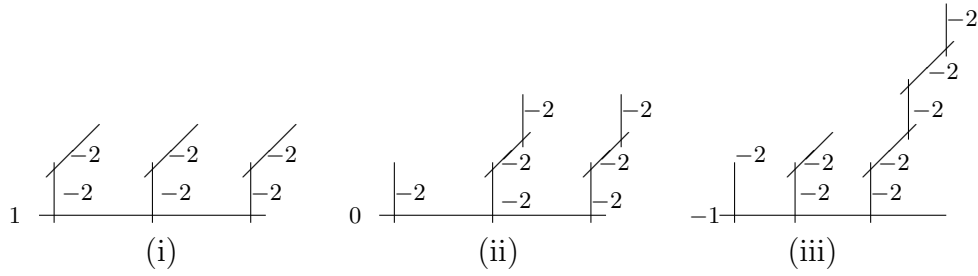


図 1

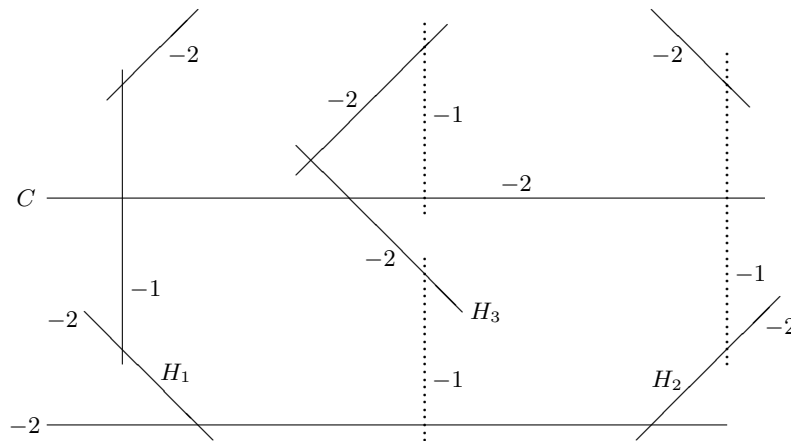


図 2

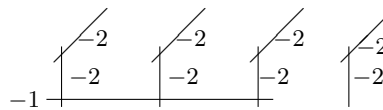


図 3

例 1 ~ 例 3 では D は連結であるので, [14] で考察した場合に含まれている. $Y\{3, 3, 3\}$, $Y\{2, 4, 4\}$, $Y\{2, 3, 6\}$ の名前の由来は D の図より想像がつくかと思う.

定理 2.4 の証明はかなり長くなることと, 論文執筆中であるので詳しくは書かないが, ピカール数 1 の対数的 del Pezzo 曲面に関する結果 ((B) では \bar{V} はピカール数 1 の対数的 del Pezzo 曲面であったことを注意せよ) を用いる. 例えば, Belousov [2] [3] ([3] は [2] の主結果の別証明を与えている) より, ピカール数 1 の対数的 del Pezzo 曲面の特異点の個数は 4 以下であることが分かる. 更に, Palka [32] の結果も使う.

3. 任意標数での結果

§2の後半では、基礎体の標数がゼロであることを仮定していた。§2でのIIでは、(A)と(B)のいずれかが成り立つことは正標数の場合も成り立つが、その後を分類するのは、特に(B)の場合は難しくなる。だが、特殊な場合は分類できたので、本節ではその結果を報告する。

S を非特異開代数曲面とし、 (X, B) を S のSNC完備化(cf. §1)とする。このとき、 $r(S) = \rho(X) - \#B$ と定義する。ここで、 $\rho(X)$ は X のピカル数で $\#B$ は $\text{Supp}B$ に含まれる既約曲線の個数とする。勿論、 $r(S)$ は S のSNC完備化のとり方にはよらずに定まる。

ここでは、対数的小平次元がゼロで、 $r(S)$ の値が小さくなるような非特異開代数曲面 S について考える。Shokurov氏等によるトーリック曲面の特徴づけ(文献については、中山[28]の参考文献をみよ)、および中山[28]による不足数1の擬トーリック曲面(pseudo-toric surface)と半トーリック曲面(half-toric surface)の分類に関する結果をみて、この開代数曲面版に相当する結果も得られるのではないかと思ったことがこのようなことを考えた動機である。[28]での不足数の-1倍が上記の $r(S)$ に相当する。

このことに関して得られた結果を紹介する。

定理 3.1. S を対数的小平次元がゼロとなる非特異開代数曲面とする。このとき、次が成り立つ。

- (1) $r(S) \geq -2$ となる。更に、 $r(S) = -2$ となる必要十分条件は、 S が2次元代数的トーラス \mathbb{G}_m^2 から n 点($n \geq 0$)を除いてできる曲面とと同型であることである。
- (2) 更に、 S の対数的幾何種数が0であるとする。このとき、 $r(S) \geq -1$ で、 $r(S) = -1$ となる必要十分条件は、 S が $H[-1, 0, -1]$ という曲面($H[-1, 0, -1]$ の定義は[5, (8.5)]をみよ)から n 点($n \geq 0$)を除いてできる曲面とと同型であることである。

定理3.1の証明の概略を述べる。 (X, B) を S のSNC完備化とし、 (W, C) を (X, B) の概極小モデルとする。すると、 $r(S) \geq r(W \setminus \text{Supp}C)$ となり、更に、 $r(S) = r(W \setminus \text{Supp}C)$ となるための必要十分条件は、 (W, C) が $\text{Supp}B$ 内の曲線のブローダウンだけで得られることである、ということが直ぐに分かる。従って、概極小モデル (W, C) について定理3.1を確かめれば十分である。ここで、Hodgeの指数定理により、 $[C^\#] = 0$ となる場合は $r(W \setminus \text{Supp}C) \geq 1$ となる。($[C^\#] = 0$ となるときは、 C の各連結成分は対数的末端特異点につぶれることを注意せよ。)同様な理由で、 S が有理曲面でその対数的幾何種数がゼロである場合は、 (X, B) の強極小モデル (V, D) に対して定理3.1を確かめれば十分である。§2の後半で述べたこれらの概極小モデルや強極小モデルに関する分類は $r(S) < 0$ という条件が付くことで、正標数の場合も実行できる。

最後に、定理3.1の応用として、次の結果が得られることを報告する。

定理 3.2. $B \subset \mathbb{P}^2$ を射影平面曲線で, その補集合 $S := \mathbb{P}^2 \setminus B$ の対数的小平次元がゼロであるものとする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) S の対数的幾何種数が 1 になる.
- (2) 更に, B が非特異 3 次曲線でないとすると, S は 2 次元代数的トーラス \mathbb{G}_m^2 を Zariski 開集合として含む.

上記の結果の (1) と (2) は, 標数ゼロのときはそれぞれ [13], [14] で証明されている. それらの証明の中で, 標数ゼロの結果を使っている部分を定理 3.1 を用いることにより, 基礎体の標数に関する仮定をとることができた.

定理 3.2 は大したことは示していないように見えるかも知れないが, 例えば, S の代数的基本群がアーベル群になることが (2) よりすぐに分かる. また最近, \mathbb{Q} 上で定義された射影平面曲線の補集合の整数点に関する結果が Levin–安福 [23] によって研究され, 補集合の対数的小平次元がゼロの場合は, 定理 3.2 (2) より, その整数点の集合は potentially dense であることが示された.

REFERENCES

- [1] V. Alexeev and V. V. Nikulin, Del Pezzo and $K3$ surfaces, MSJ Memoirs vol. 15, Math. Soc. Japan, 2006.
- [2] G. N. Belousov, Del Pezzo surfaces with log terminal singularities, Math. Notes, **83** (2008), 152–161.
- [3] G. N. Belousov, The maximal number of singular points on log del Pezzo surfaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **16** (2009), 231–238.
- [4] R. Blache, The structure of l.c. surfaces of Kodaira dimension zero. I, J. Alg. Geom., **4** (1995), 137–179.
- [5] T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **29** (1982), 503–566.
- [6] T. Fujita, Fractionally logarithmic canonical rings of algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **30** (1984), 685–696.
- [7] S. Iitaka, On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties, Complex Analysis and Algebraic Geometry (W. L. Baily, Tr. and T. Shioda, eds.), Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 175–189.
- [8] S. Iitaka, A numerical criterion of quasi-abelian surfaces, Nagoya Math. J., **73** (1979), 99–115.
- [9] S. Iitaka, On logarithmic $K3$ surfaces, Osaka J. Math., **16** (1979), 675–705.
- [10] S. Iitaka, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, vol. 76, 1981.
- [11] T. Kambayashi, On Fujita’s strong cancellation theorem for the affine plane, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **27** (1980), 535–548.
- [12] Y. Kawamata, On the classification of non-complete algebraic surfaces, Proc. Copenhagen Summer meeting in Algebraic Geometry, Lecture Notes in Mathematics, No. **732**, 215–232, Berlin-Heiderberg-New York, Springer, 1978.
- [13] H. Kojima, Complements of plane curves with logarithmic Kodaira dimension zero. J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 793–806.
- [14] H. Kojima, Open surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero in arbitrary characteristic, J. Math. Soc. Japan, **53** (2001), 933–955.
- [15] H. Kojima, Structure of affine surfaces $\mathbb{P}^2 - B$ with $\bar{\kappa} \leq 1$, J. Algebra, **253** (2002), 100–111.

- [16] H. Kojima, Rank one log del Pezzo surfaces of index two, *J. Math. Kyoto Univ.*, **43** (2003), 100–122.
- [17] 小島秀雄, 対数的小平次元と対数的幾何種数がゼロとなる開代数曲面について, 射影多様体の幾何とその周辺 2007 報告集, 103–111.
- [18] H. Kojima, Open algebraic surfaces with $\bar{\kappa} = \bar{p}_g = 0$ and $\bar{P}_2 > 0$, *Osaka J. Math.*, **48** (2011), 1063–1084.
- [19] 小島秀雄, 対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面について, 2013 代数幾何ミニ研究集会報告集 (於 埼玉大学), 71–80.
- [20] H. Kojima, Irrational open surfaces of non-negative logarithmic Kodaira dimension, *Adv. Stud. Pure Math.*, **75** (2017), 187–206.
- [21] S. A. Kudryavtsev, Classification of logarithmic Enriques surfaces with $\delta = 2$, *Math. Notes*, **72** (2002), 660–666.
- [22] S. A. Kudryavtsev, Classification of Enriques log surfaces with $\delta = 1$, *Math. Notes*, **76** (2004), 81–89.
- [23] A. Levin and Y. Yasufuku, Integral points and orbits of endomorphisms on the projective plane, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [24] M. Miyanishi, Non-complete algebraic surfaces, *Lecture Notes in Mathematics*, No. **857**, Berlin-Heiderberg-New York, Springer, 1981.
- [25] M. Miyanishi, Open algebraic surfaces, *CRM Monograph Series*, vol. **12**, Amer. Math. Soc., 2000.
- [26] M. Miyanishi, Recent developments in affine algebraic geometry: from the personal viewpoints of the author, *Affine algebraic geometry*, 307–378, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.
- [27] N. Nakayama, Classification of log del Pezzo surfaces of index two, *J. Math. Univ. Tokyo*, **14** (2007), 293–498.
- [28] N. Nakayama, A variant of Shokurov’s criterion of toric surface, *Adv. Stud. Pure Math.*, **75** (2017), 287–392.
- [29] K. Oguiso and D.-Q. Zhang, On the most algebraic $K3$ surfaces and the most extremal log Enriques surfaces, *Amer. J. Math.*, **118** (1996), 1277–1297.
- [30] K. Oguiso and D.-Q. Zhang, On extremal log Enriques surfaces, II, *Tôhoku Math. J.*, **50** (1998), 419–436.
- [31] K. Oguiso and D.-Q. Zhang, On the complete classification of extremal log Enriques surfaces, *Math. Z.*, **231** (1999), 23–50.
- [32] K. Palka, Exceptional singular \mathbb{Q} -homology planes, *Ann. Inst. Fourier*, **61** (2011), 745–774.
- [33] F. Sakai, Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps, *Math. Ann.*, **254** (1980), 89–102.
- [34] F. Sakai, Weil divisors on normal surfaces, *Duke Math. J.*, **51** (1984), 877–889.
- [35] S. Tsunoda, Structure of open algebraic surfaces, I, *J. Math. Kyoto Univ.*, **23** (1983), 95–125.
- [36] D.-Q. Zhang, On Itaka surfaces, *Osaka J. Math.*, **24** (1987), 417–460.
- [37] D.-Q. Zhang, Logarithmic Enriques surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, **31** (1991), 419–466.
- [38] D.-Q. Zhang, Logarithmic Enriques surfaces. II, *J. Math. Kyoto Univ.*, **33** (1993), 183–193.
- [39] D.-Q. Zhang, Normal algebraic surfaces with trivial tricanonical divisors, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **33** (1997), 427–442.
- [40] D.-Q. Zhang, Quotients of $K3$ surfaces modulo involutions, *Japan. J. Math.*, **24** (1998), 335–366.
- [41] D.-Q. Zhang, Normal algebraic surfaces with trivial two or four times of the canonical divisors, *Internat. J. Math.*, **9** (1998), 377–406.

〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 新潟大学理学部数学教室
E-mail address: kojima@math.sc.niigata-u.ac.jp