

可微分写像の特異点の判定法とその応用

佐治健太郎 (神戸大理)*

1. 序

本稿では写像, 多様体はすべて C^∞ 級微分可能とする. M, N をそれぞれ m, n 次元多様体とする. 写像 $f: M \rightarrow N$ に対して $p \in M$ が f の特異点であるとは

$$\text{rank } df_p < \min\{m, n\}$$

をみたすときをいう. $2m \leq n$ であれば任意の $f: M \rightarrow N$ ははめ込みで近似できる. つまり, ほとんどは特異点を持たない写像である. もし $2m > n$ のときは一般にはそのような近似をとることができず, テキトーに写像を選んで特異点を持っていた場合は, 特異点を扱う必要が生じる. 本稿では主に特異点の認識問題とその応用についての最近の結果と関連話題について述べる. 特異点は局所的に定義される概念なので, 以降は写像芽の言葉で述べる. $C^\infty(m, n) = \{f: (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)\}$ とする.

定義 1. 二つの写像芽 $f, g: (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が右左同値 (または \mathcal{A} -同値または \mathcal{RL} -同値) であるとは微分同相写像芽 $\sigma: (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$, $\tau: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が存在して $g = \tau \circ f \circ \sigma$ が成り立つときをいう. この同値関係を $\sim_{\mathcal{A}}$ とかく.

この同値関係は定義域と像域の微分同相写像でうつり合うという意味なので大変自然な同値関係である. この同値関係に対して次の二つの基本的な問題が考えられる.

- (分類問題) $C^\infty(m, n)$ 内の「よい」部分集合 S に対して S に属する写像芽を $\sim_{\mathcal{A}}$ で分類せよ. 各分類の代表元で, 「わかりやすい」ものをその標準形という.
- (認識問題) ある写像芽 f に対して $g \in C^\infty(m, n)$ が f に \mathcal{A} 同値であるための必要十分条件を求めよ. そのような必要十分条件のうちで「わかりやすい」ものを f の判定法という.

これらは活発に研究されている. S としては, 安定, 余次元が低い, 単純, 有限確定¹等が考えられている ([33, 34, 45] 等). 認識問題も, 分類の手法に沿って写像芽を特別な形にして考えられている ([35, 36, 45] 等). また, 一般に与えられた二つの \mathcal{K} 同値な写像芽 f, g が $f \sim_{\mathcal{A}} g$ となる必要十分条件が与えられている ([39]).

これまでの研究では判定法と呼べるものはほとんど無かった. 点 p が $f: (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^n, f(p))$ の特異点であるとき, f の判定法をそのまま特異点 p の判定法という.

2. 判定法

ここでは最近得られている様々な特異点の判定法を述べる.

科学研究費補助金基盤研究 (C)26400087 の補助を受けております.

* e-mail: saji@math.kobe-u.ac.jp

¹ これらの用語は [11, 14, 18, 19, 41] 等を参照.

2.1. モラン写像

写像芽 $f : (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^m, f(p))$ が

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(x_1, \dots, x_{m-1}, \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_m^i + x_m^{k+1} \right) \quad (k \leq m)$$

の原点における写像芽に \mathcal{A} 同値であるとき, p を k -モラン特異点という ([35])². この特異点は基本的であり, ジェット空間内の集合への横断性 ([18, 41]) や内在的微分を使ったもの ([14, 43]) 等の特徴付けがある. ここでは与えられた写像芽のジェットの情報のみで直接書けるこの特異点の特徴付け (判定法) を述べる. まずは判定法のための基本データを述べる. 与えられた写像芽 f に対して座標系 (u_1, \dots, u_m) をとり, ヤコビ行列式を $\lambda = \det(f_{u_1}, \dots, f_{u_m})$ とおく. 特異点 p が非退化であるとは $d\lambda(p) \neq 0$ のときをいう. 非退化特異点 p に対して, p の近くで $S(f)$ は余次元 1 の部分多様体である. また, $\text{rank } df_p = m - 1$ が従う. 一方 $\text{rank } df_p = m - 1$ のとき, 任意の $q \in S(f)$ 上で $\ker df_q = \langle \eta_q \rangle_{\mathbf{R}}$ が成り立つ (\mathbf{R}^m, p) のベクトル場 η が存在する. このベクトル場を退化ベクトル場という ([26]).

定理 2 ([55]). 写像芽 $f : (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^m, f(p))$ に対して, p が k -モラン特異点 ($k \leq m$) であるための必要十分条件は次の二つが成り立つことである.

- $\eta\lambda(p) = \dots = \eta^{k-1}\lambda(p) = 0, \eta^k\lambda(p) \neq 0,$
- $\text{rank } d_p(\lambda, \eta\lambda, \dots, \eta^{k-1}\lambda) = k.$

モラン特異点に関する他の研究は [7, 10, 47, 48, 53, 60, 61] を参照.

$m \leq 3$ とする. m 次元多様体間の写像 $f : M \rightarrow N$ は安定ならば任意の特異点 $p \in M$ は k -モラン特異点 ($k \leq 3$) である. $m \geq 4$ だと他の特異点があらわれる. ここで毛色の少し違う特異点の判定法をひとつ述べたい.

写像芽 $f : (\mathbf{R}^4, p) \rightarrow (\mathbf{R}^4, f(p))$ が

$$I_{2,2}^+ : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1^2 + x_2x_3, x_2^2 + x_1x_4, x_3, x_4),$$

$$I_{2,2}^- : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_4, x_1x_2 + x_1x_4 - x_2x_3, x_3, x_4)$$

の原点における写像芽に \mathcal{A} 同値であるとき, p をそれぞれ $I_{2,2}^\pm$ 特異点という. 4次元多様体間の写像 $f : M \rightarrow N$ は安定ならば任意の特異点 $p \in M$ は k -モラン特異点 ($k \leq 4$) か $I_{2,2}^\pm$ 特異点である. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^4, p) \rightarrow (\mathbf{R}^4, f(p))$ を $\text{rank } df_p = 2$ とする. このとき, 線形写像 L が存在して $L \circ f = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ と書いた時, $d(g_1)_p = \mathbf{0}, d(g_2)_p = \mathbf{0}$ とできる. また, $\text{rank } df_p = 2$ より, (\mathbf{R}^4, p) のベクトル場 ξ, η であって, $\langle \xi_p, \eta_p \rangle_{\mathbf{R}} = \ker df_p$ となるものがとれる. 以下が成立する ([52]).

p が $I_{2,2}^+$ 特異点 ($I_{2,2}^-$ 特異点) である必要十分条件は

- $\det \text{Hess}_{(\xi, \eta)} \lambda(p) < 0 \quad (\det \text{Hess}_{(\xi, \eta)} \lambda(p) > 0),$
- $d(\xi g_1), d(\xi g_2), d(\eta g_1), d(\eta g_2)$ は p で一次独立

²1-モラン特異点は折り目, フォールドともいう. 2-モラン特異点はカスプ, ホイットニーの髷ともいう.
³3-モラン特異点はスワローテイル (の切り口) ともいう.

が成り立つことである. ここで, $\text{Hess}_{(\xi, \eta)} \lambda$ はベクトル場 ξ, η に関する λ のヘッセ行列

$$\begin{pmatrix} \xi\xi\lambda & \xi\eta\lambda \\ \eta\xi\lambda & \eta\eta\lambda \end{pmatrix}$$

であり, ξ, η が $\ker df$ を張っているのでこれは対称である. この特異点は4次元多様体間の安定写像にあらわれる唯二の余階数2の特異点であるため, 注目されており, いろいろな性質が調べられている ([7, 8, 44, 52] 等を参照).

他の特異点の判定法は [49, 53, 64] を参照.

2.2. 波面

M を m 次元多様体, (N, g) を $m+1$ 次元リーマン多様体とする. 写像 $f: M \rightarrow N$ が波面的写像であるとは, 任意の $p \in M$ に対して p の開近傍 U と $L = (f, \nu)$ の形の写像 $L: U \rightarrow T_1N$ 存在して, 任意のベクトル $X \in T_qM$ に対して

$$g(df(X), \nu) = 0$$

が q において成り立つときをいう. また, L がはめ込みであるようにとれるとき, f を波面という. 波面はたとえば次の特異点をもつ. 写像芽 $f: (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^{m+1}, f(p))$ が

$$\left(x_1, \dots, x_{m-1}, (k+2)x_m^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} (i+1)x_i x_m^i, (k+1)x_m^{k+2} + \sum_{i=1}^{k-1} i x_i x_m^{i+1} \right) \quad (k \leq m)$$

の原点における写像芽に \mathcal{A} 同値であるとき, p を A_{k+1} -特異点という³. これらは同次元間の写像の折り目, カスプと似たものであり, 同様に基本的な特異点である ([1, 19, 22] 等を参照). この特異点の判定法を述べる. 波面的写像 f に対して座標 (u_1, \dots, u_m) をとり, $\lambda = \det(f_{u_1}, \dots, f_{u_m}, \nu)$ を符号付き面積密度関数という. 非退化特異点, 退化ベクトル場もモラン写像のときと同様に定義できる ([26]).

定理 3 ([26, 55]). 波面 $f: (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^{m+1}, f(p))$ に対して, p が A_{k+1} -特異点 ($k \leq m$) であるための必要十分条件は次の二つが成り立つことである.

- $\eta\lambda(p) = \dots = \eta^{k-1}\lambda(p) = 0, \eta^k\lambda(p) \neq 0,$
- $\text{rank } d_p(\lambda, \eta\lambda, \dots, \eta^{k-1}\lambda) = k.$

他の特異点の判定法は [9, 22, 23, 50, 51] を参照. 波面の特異点に関連する研究は [17, 21, 25, 32, 37, 38, 40, 56, 58, 59, 63] 等を参照.

3. 応用

以下で判定法の応用を述べる. 以下で見るように判定法は写像のジェットの情報のみで直接特異点を特徴付けているので調べたい特異点該当のものをすぐにチェックできるだけでなく, 特異点の性質を更に深く調べることができる.

³ A_2 -特異点はカスプ辺, A_3 -特異点はスワローテイルともいう.

3.1. 特異点の \mathcal{A} -イソトピー

自然数 r に対して, 写像芽 $f \in C^\infty(m, n)$ が r -確定であるとは, 任意の $j^r f(0) = j^r g(0)$ をみたす g が f と \mathcal{A} 同値であるときをいう. r -確定であって \mathcal{A} -同値な二つの写像芽 f, g が \mathcal{A} -イソトピック ($\sim_{i\mathcal{A}}$ とかく) であるとは連続曲線 $\sigma : I \rightarrow \text{Diff}^r(m) \subset J^r(m, m)$ と $\tau : I \rightarrow \text{Diff}^r(n) \subset J^r(n, n)$ が存在して, $\sigma(0), \tau(0)$ は恒等写像の r -ジェットであり,

$$j^r(g)(0) = j^r(\tau(1) \circ f \circ \sigma(1))(0)$$

が成り立つときをいう. ただし, $I = [0, 1]$ であり, $\text{Diff}^r(m)$ は微分同相写像芽 $(\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$ の r -ジェットの集合であり, ユークリッド空間と同一視して位相をいれている.

つまり, $f \sim_{i\mathcal{A}} g$ とは $j^r f(0)$ と $j^r g(0)$ とが \mathcal{A} -軌道の同じ弧状連結成分に属することと必要十分である. さらに, 向きを保つ微分同相写像の r -ジェットの集合 $\text{Diff}^{r,+}(m)$ が弧状連結であるので, 向きを保つ微分同相写像 $\sigma^+ : (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$ と $\tau^+ : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が存在して $j^r g(0) = j^r(\tau^+ \circ f \circ \sigma^+)(0)$ が成り立つことと必要十分である.

判定法を応用して次がわかる. 写像芽 $f \in C^\infty(n, n)$ は n -モラン特異点とするとき,

- $n = 4i + 1, i \neq 0$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_\varepsilon^{4i+1} := \left(x_1, \dots, x_{4i}, \varepsilon(t^{4i+2} + tx_1 + \dots + t^{4i-1}x_{4i-1} + t^{4i}x_{4i}) \right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

さらに, $F_{+1}^{4i+1} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^{4i+1}$.

- $n = 1$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}} F_\varepsilon^1 := \varepsilon t^2$. さらに, $F_{+1}^1 \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^1$.
- $n = 4i + 2$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_\varepsilon^{4i+2} := \left(x_1, \dots, x_{4i}, x_{4i+1}, \varepsilon(t^{4i+3} + tx_1 + \dots + t^{4i+1}x_{4i+1}) \right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

さらに, $F_{+1}^{4i+2} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^{4i+2}$.

- $n = 4i + 3$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_\varepsilon^{4i+3} := \left(\varepsilon x_1, \dots, x_{4i+2}, t^{4i+4} + tx_1 + \dots + t^{4i+1}x_{4i+1} + t^{4i+2}x_{4i+2} \right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

さらに, $F_{+1}^{4i+3} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^{4i+3}$.

- $n = 4i$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^{4i} := \left(\varepsilon_1 x_1, \dots, x_{4i+2}, x_{4i+3}, \varepsilon_2(t^{4i+1} + \varepsilon_1 tx_1 + t^2 x_2 + \dots + t^{4i+2}x_{4i+2} + t^{4i+3}x_{4i+3}) \right), \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1.$$

さらに, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)$ ならば $F_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^{4i} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)}^{4i}$.

1-モラン特異点に関しては [2, 3] で, \mathcal{A} 軌道のホモトピー型が調べられている. 他の応用については [52, 64] を参照.

3.2. カस्प辺近辺の様相

写像芽の \mathcal{A} -同値は像域の微分同相写像を用いるので, 特異点の微分幾何的情報は失われる. 近年, 特異点の種類を固定して, 特異点の近くで微分幾何的性質を研究することが盛んに行われている ([6, 12, 16, 42]). ここでは判定法の一つの応用として, カस्प辺近辺の幾何的模様の研究を報告する. 判定法を用いて, カस्प辺のモンジュ標形とも言うべき次が示せる.

補題 4. [30] 波面 $f: (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ に対して p はカस्प辺とする. このとき, 定義域の微分同相写像と像域のユークリッド等距離同型により f は

$$\left(u, \frac{a_{20}}{2}u^2 + \frac{a_{30}}{6}u^3 + \frac{1}{2}v^2, \frac{b_{20}}{2}u^2 + \frac{b_{30}}{6}u^3 + \frac{b_{12}}{2}uv^2 + \frac{b_{03}}{6}v^3 \right) + h(u, v)$$

$$a_{20}, a_{30}, b_{20}, b_{30}, b_{12}, b_{03} \in \mathbf{R}, \quad (b_{03} \neq 0, b_{20} \geq 0)$$

の形になる. ただし $h(u, v)$ は 4 次以上の項である.

カस्प辺の近くにおいても通常と同様に

$$(EM - FL) du^2 + (EN - GL) dudv + (FN - GM) dv^2 = 0, \quad (1)$$

$$L du^2 + 2M dudv + N dv^2 = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (L(GL - EN) - 2M(FL - EM)) du^2 \\ & + 2(M(GL + EN) - 2FLN) dudv \\ & + (2M(GM - FN) - N(GL - EN)) dv^2 = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

(ただし, (u, v) は座標であり, $E = \langle f_u, f_u \rangle$, $F = \langle f_u, f_v \rangle$, $G = \langle f_v, f_v \rangle$, $L = \langle f_{uu}, \nu \rangle$, $M = \langle f_{uv}, \nu \rangle$, $N = \langle f_{vv}, \nu \rangle$ である.) により, 上からそれぞれ曲率線, 漸近線, 特性曲線による模様が定義される. さて, $a_i du^2 + 2b_i dudv + c_i dv^2$ ($i = 1, 2$) の定める模様が同じとは位相同型 $(\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$ と $\{v \neq 0\}$ で 0 にならない関数倍で両者が移り合うときをいう.

ジェネリック (係数の空間内で余次元 1) な模様は係数 $a_{20}, a_{30}, b_{20}, b_{30}, b_{12}, b_{03}$ のみで定まり, 次のようになる ([31]).

曲率線 常に $du^2 - dv^2$ の定める模様と同じ (図 1 左).

漸近線 $b_{20} \neq 0$ ならば $udu^2 + dv^2$ の定める模様と同じ (図 1 右). $b_{20} = 0, b_{30} - a_{20}b_{12} \neq 0, \Delta \neq 0, 4b_{12}^3 + b_{03}^2 b_{30} \neq 0$ のとき, 図 2 のどれかと同じ.

特性曲線 $b_{20} \neq 0$ ならば $udu^2 + dv^2$ と同じ (図 1 右). $b_{20} = 0, b_{30} - a_{20}b_{12} \neq 0, \Delta \neq 0, 4b_{12}^3 + b_{03}^2 b_{30} \neq 0$ のとき, 図 2 のどれかと同じ.

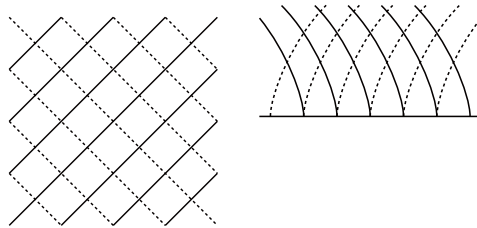


図 1: 模様その 1

注意 5. b_{20} はカस्प辺の法曲率であり, $b_{30} - a_{20}b_{12}$ はその微分である. 条件 $4b_{12}^3 + b_{03}^2 b_{30} \neq 0$ はカस्प辺の平行曲面がスワローテイルにならないという条件である ([62]).

カस्प辺以外の特異点近辺における模様については [5, 13, 15] 等を参照.

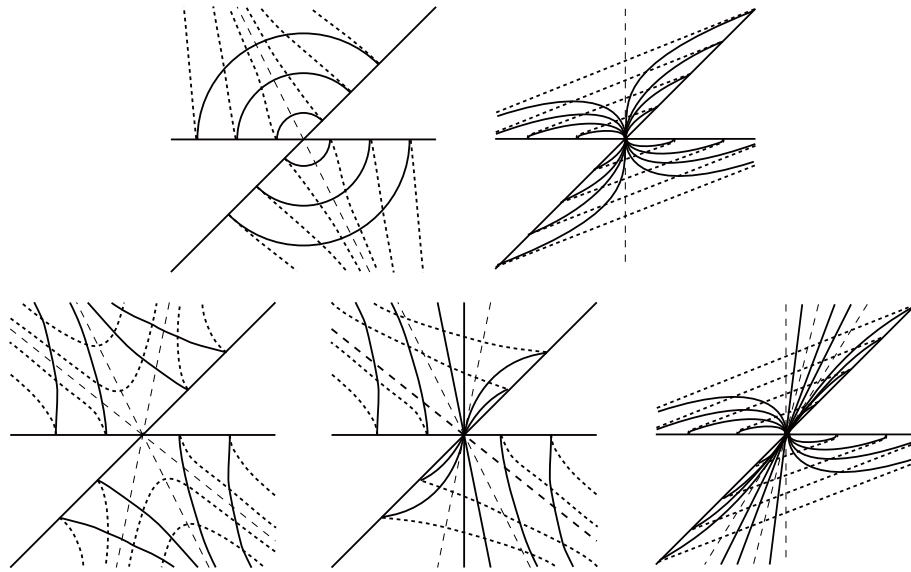


図 2: 模様その2

3.3. 接続接束とその特異点

ここでは波面の内的な定式化である接続接束とその応用を述べる.

定義 6. m 次元有向多様体 M 上の接続接束とは,

- (1) E は M 上階数 m の有向ベクトル束,
- (2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は E 上の計量で, D はこの計量に適合する接続,
- (3) $\varphi : TM \rightarrow E$ は

$$D_X\varphi(Y) - D_Y\varphi(X) = [X, Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

をみたす束準同型,

の組 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ のことをいう ([54, 57]).

次の二つの例は基本的である.

例 7. (1) M を m 次元多様体, (N, g) を m 次元リーマン多様体とし, $f : M \rightarrow N$ を同次元間の写像とする. $E_f = TN|_{f(M)}$ を TN の $f(M)$ への制限とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を g が E_f に誘導する計量とし, g のレビ-チビタ接続の制限を D とする. $\varphi_f = df : TM \rightarrow E_f$ とすると, $(E_f, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi_f)$ は接続接束となる. これを同次元間の写像 f から誘導された接続接束という.

(2) M を m 次元多様体, (N, g) を $m+1$ 次元リーマン多様体とし, $f : M \rightarrow N$ を波面的写像とする. $E_f = \nu(p)^\perp \subset TN|_{f(M)}$ を $\nu(p)$ の直交補空間とし,

$$\varphi_f(X) = df(X)$$

とする. D を g のレビ-チビタ接続の $f(M)$ の接成分への制限, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を g から誘導された計量とすると, $(E_f, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi_f)$ は接続接束となる. これを波面的写像 f から誘導された接続接束という.

点 $p \in M$ が φ の特異点 (φ -特異点) であるとは, $\varphi_p : T_p M \rightarrow E_p$ が $\ker \varphi_p \neq \{0\}$ であるときをいう.

定義から, 局所的に自明化 (と自然な基底) をとると φ は M 上の $m \times m$ 行列に値をとる関数とみなすことができ, λ をこの行列の行列式とすると, φ -特異点は $\lambda = 0$ となる点と一致する. また, φ -特異点の余階数をこの行列の余階数で定義する. 余階数が1の φ -特異点 p に関して p のある近傍 U が存在して, U 上のベクトル場 η が存在して $q \in U \cap S(\varphi)$ 上で常に

$$\ker \varphi(q) = \langle \eta(q) \rangle_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ. φ -特異点 p が非退化であるとは, $d\lambda \neq 0$ のときと定義する. 判定法を参考に, A_{k+1} - φ -特異点を次のように定義する.

定義 8. 接続接束 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ の特異点 p が A_{k+1} - φ -特異点であるとは

- $\eta\lambda(p) = \dots = \eta^{k-1}\lambda(p) = 0, \eta^k\lambda(p) \neq 0,$
- $\text{rank } d_p(\lambda, \eta\lambda, \dots, \eta^{k-1}\lambda) = k$

が成り立つときをいう.

判定法から, 例7で構成された同次元間の写像 (波面) f から誘導された接続接束 φ_f に対して, p が A_{k+1} - φ_f -特異点であることの必要十分条件は p が f の k -モラン特異点 (A_{k+1} -特異点) である. $m = 2$ とする. このとき, 非退化な φ -特異点の近くで特異点の集合は正則曲線となり, いろいろな微分幾何的不変量が定義される. p を非退化な φ -特異点とし, p の近くでの φ -特異点の集合のパラメーター表示を $\gamma(t)$ とする.

$$\kappa_s(t) = -\text{sgn}(\eta\lambda) \frac{\langle D_{\gamma'} n, \varphi(\gamma') \rangle}{|\varphi(\gamma')|^3}$$

を特異曲率と呼ぶ. ここで, n は $\mu(\varphi(\gamma'), n) > 0$ をみたす E の単位切断であり, μ は $p \in M$ に対して E_p の正規直交枠 e_1, e_2 に対して $\mu_p(e_1, e_2) = 1$ となる歪対称双線型形式である.

$$M^+ = \{p \in M \mid \lambda > 0\}, \quad M^- = \{p \in M \mid \lambda < 0\}$$

とする. p を A_3 - φ -特異点とする. このとき, 定義から $\eta\eta\lambda \neq 0$ であるので, η は $S(\varphi)$ に対して二点接触する. η が M^+ を指し示すとき, p は $+$ の A_3 - φ -特異点とよび, そうでないとき, $-$ の A_3 - φ -特異点とよぶ. このとき次のガウス・ボンネ型の定理が成り立つ.

定理 9 ([54, 57]). $S(\varphi)$ は A_2, A_3 - φ -特異点のみをもつとする. このとき,

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \frac{1}{2\pi} \int_M K d\hat{A} = \chi(M^+) - \chi(M^-) + S^+ - S^-, \\ \frac{1}{2\pi} \int_M K dA &= \chi(M) - \frac{1}{\pi} \int_{S(\varphi)} \kappa_s d\tau. \end{aligned}$$

ここで, S^+, S^- はそれぞれ正, 負の A_3 - φ -特異点の数をあらわし, K は D に関するガウス曲率, $d\hat{A}, dA$ は座標 (u, v) をとったときにそれぞれ $d\hat{A} = \lambda du \wedge dv, dA = |\lambda| du \wedge dv$ で定まるものとする.

系 10 ([28, 27, 54]). M を有向2次元多様体, N を有向3次元多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を特異点としてカスプ辺とスワローテイルのみを持つものとする. このとき, 次が成り立つ. (ただし, S^+, S^- はそれぞれ正, 負のスワローテイルの数)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_M K d\hat{A} &= \chi(M^+) - \chi(M^-) + S^+ - S^-, \\ \frac{1}{2\pi} \int_M K dA &= \chi(M) - \frac{1}{\pi} \int_{S(\varphi)} \kappa_s d\tau. \end{aligned}$$

系 11 ([46]). M, N を有向2次元多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を特異点として折り目とカスプのみをもつものとする. このとき, 次が成り立つ. (C^\pm は正, 負のカスプの数)

$$\deg(f)\chi(N) = \chi(M^+) - \chi(M^-) + C^+ - C^-.$$

系 12 ([29]). M を有向2次元多様体とし, $f: M \rightarrow \mathbf{R}^2$ を特異点として折り目とカスプのみをもつものとする. $S(f) = C_1 \cup \dots \cup C_n$ を単純閉曲線の非交和とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\frac{\chi(M)}{2} = R(C_1) + \dots + R(C_n).$$

ただし, $R(C_j) \in \mathbf{Z}/2$ は $f(C_j)$ の回転数である.

波面には単位法線ベクトルがある. 単位法線ベクトルも接続接束を誘導するのでそれを考慮に入れると二つの接続接束が定義される. 波面を単位法線ベクトルを込めて内的に定式化した概念も得られる. それらの接続接束に対して, 定理 9 を適用すると, 合計4個の等式が得られる [57]. これらの中には知られていたものもあるが, 新しい公式もある. 例えば次が従う.

系 13 ([4, p287]). M を有向閉曲面とし, $f: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ をはめ込みとする. f の単位法線ベクトル $\nu: M \rightarrow S^2$ の特異点は折り目とカスプのみであるとする. このとき,

$$2\chi(\{K < 0\}) = C^+ - C^-$$

が成り立つ. ただし, $\{K < 0\} \subset M$ はガウス曲率が負の部分であらわし, C^+, C^- はそれぞれ正, 負の ν のカスプの個数をあらわす.

系 14 ([57]). $f: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を凸はめ込み (単位法線ベクトル ν が特異点を持たないはめ込み) とし, $f_t = f + t\nu$ ($t \in \mathbf{R}$) を f の平行曲面とする. f_t の特異点がカスプ辺とスワローテイルのみからなるならば,

$$2\chi(\{K_t < 0\}) = S_t^+ - S_t^-$$

が成り立つ. ただし, $\{K_t < 0\} \subset M$ は f_t のガウス曲率が負の部分であらわし, S_t^\pm は正, 負のスワローテイルの個数をあらわす.

\mathbf{R}^3 内の曲面とその単位法線ベクトルに対応する概念が, ミンコフスキー空間内の擬球面内の曲面に関するルジャンドル双対性として [20] によって整備され, 様々な研究が行われている. この枠組の上で例えば, $f: M \rightarrow LC^* \subset \mathbf{R}_1^4$ を空間的曲面とすると,

双対曲面 $f_l : M \rightarrow LC^*$, $f_h : M \rightarrow H^3(-1)$, $f_s : M \rightarrow S_1^3(1)$ が得られる. これらの特異点がカस्प辺とスワローテイルのみであれば, 定理 9 が f と全ての双対曲面に対して成立する.

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol. 1, Monogr. Math. **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [2] Y. Ando, *The homotopy type of the space consisting of regular jets and folding jets in $J^2(n, n)$* , Japan. J. Math. **24** (1998), 169–181.
- [3] Y. Ando, *Smooth maps having only singularities with Boardman symbol $(1, 0)$* , Topology Appl. **142** (2004), 205–226.
- [4] D. Bleecker and L. Wilson, *Stability of Gauss maps*, Illinois J. Math. **22** (1978), 279–289.
- [5] J. W. Bruce and F. Tari, *On binary differential equations*, Nonlinearity **8** (1995), 255–271.
- [6] J. W. Bruce and J. M. West, *Functions on a crosscap*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), 19–39.
- [7] N. Dutertre and T. Fukui, *On the topology of stable maps*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no. 1, 161–203.
- [8] T. Ekholm and M. Takase, *Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), 251–266.
- [9] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [10] T. Fukuda, *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, A fête of topology, (1988), 331–353.
- [11] 福田拓生・西村尚史, 特異点と分岐, 共立出版, 2002.
- [12] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella – a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35–67.
- [13] R. Garcia, C. Gutierrez, and J. Sotomayor, *Lines of principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas*, Tohoku Math. J. **52** (2000), 163–172.
- [14] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Math. **14** Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [15] V. Guíñez, *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 477–502.
- [16] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps* Selecta Math. **20** (2014), 769–785.
- [17] G. Ishikawa and Y. Machida, *Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature*, Internat. J. Math. **17** (2006), 269–293.
- [18] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版, 1998.
- [19] 泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩, 幾何学と特異点, 共立出版, 2001.
- [20] S. Izumiya, *Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone*, Moscow Math. J. **9** (2009), no. 2, 325–357.
- [21] S. Izumiya, *The theory of graph-like Legendrian unfoldings and its applications*, J. Singul. **12** (2015), 53–79.
- [22] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.

- [23] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.
- [24] S. Izumiya and M. Takahashi, *Caustics and wave front propagations: applications to differential geometry*, Geometry and topology of caustics CAUSTICS '06, 125–142, Banach Center Publ. **82**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008.
- [25] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), 265–299.
- [26] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), no. 2, 303–351.
- [27] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19–29.
- [28] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans \mathbb{R}^3* , Canad. J. Math. **47** (1995), 544–572.
- [29] H. Levine, *The singularities, S_1^q* , Illinois J. Math. **8** (1964), 152–168.
- [30] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, to appear in Canad. J. Math.
- [31] L. F. Martins and K. Saji, *On pairs of geometric foliations on a cuspidal edge*, preprint.
- [32] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature around non-degenerate singular points on wave fronts*, preprint.
- [33] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. VI: The nice dimensions*, Proc. Liverpool Singularities-Symposium I, Lecture Notes in Math. **192**, 207–253, Springer, Berlin, 1971.
- [34] D. Mond, *On the classification of germs of maps from \mathbf{R}^2 to \mathbf{R}^3* , Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 333–369.
- [35] B. Morin, *Formes canoniques des singularites d'une application differentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 5662–5665.
- [36] B. Morin, *Formes canoniques des singularites d'une application differentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 6503–6506.
- [37] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom. **82** (2009), 279–316.
- [38] K. Naokawa, *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, Osaka J. Math. **50** (2013), 425–437.
- [39] T. Nishimura, *Criteria for right-left equivalence of smooth map-germs*, Topology **40** (2001), 433–462.
- [40] T. Nishimura, *Whitney umbrellas and swallowtails*, Pacific J. Math. **252** (2011), 459–471.
- [41] 野口廣・福田拓生, 初等カタストロフイー, 共立出版, 1976.
- [42] R. Oset Sinha and F. Tari, *Projections of surfaces in \mathbf{R}^4 to \mathbf{R}^3 and the geometry of their singular images*, Rev. Mat. Iberoam. **31** (2015), 33–50.
- [43] I. R. Porteous, *Simple singularities of maps*, Proc. Liverpool Singularities Sympos., I (1969/70), Lecture Notes in Math., Vol. **192**, Springer, Berlin, 1971, 286–307.
- [44] R. Porter, *Characteristic classes and singularities of mappings*, Differential geometry, (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 27, Part 1, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), 397–402.
- [45] J. H. Rieger, *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. **36** (1987), 351–369.

- [46] J. R. Quine, *A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 307–314.
- [47] O. Saeki, *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **117** (1995), 223–235.
- [48] O. Saeki and K. Sakuma, *Maps with only Morin singularities and the Hopf invariant one problem*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **124** (1998), 501–511.
- [49] K. Saji, *Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications*, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229–239.
- [50] K. Saji, *Criteria for cuspidal S_k singularities and their applications*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **4** (2010), 67–81.
- [51] K. Saji, *Criteria for D_4 singularities of wave fronts*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 137–147.
- [52] K. Saji, *Isotopy of Morin singularities*, preprint.
- [53] K. Saji, *Criteria for Morin singularities into higher dimensions*, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.
- [54] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [55] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [56] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka J. Math. **47** (2010), 591–607.
- [57] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, J. Geom. Anal. **22** (2012), no. 2, 383–409.
- [58] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *An index formula for hypersurfaces which admit only generic corank one singularities*, preprint.
- [59] T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, *The hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation*, Experiment. Math. **17** (2008), 269–282.
- [60] E. Szabó, A. Szücs, and T. Terpai, *On bordism and cobordism groups of Morin maps*, J. Singul. **1** (2010), 134–145.
- [61] A. Szücs, *On the cobordism groups of cooriented, codimension one Morin maps*, J. Singul. **4** (2012), 196–205.
- [62] K. Teramoto, *Parallel and dual surfaces of cuspidal edges*, preprint.
- [63] R. Uribe-Vargas, *A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve*, Moscow Math. J. **6**, (2006), 731–768.
- [64] T. Yoshida, Y. Kabata, T. Ohmoto, *Bifurcation of plane-to-plane map-germs of corank 2*, Quart. J. Math. **66** (2015), 369–391.