

カウフマン・ブラケット・スケイン代数におけるデーン・ツイストの公式とその応用

辻 俊輔 (東京大学・学振 DC)

1. 導入

スケイン代数はスケイン関係式で計算できる S^3 中の絡み目不変量を曲面と閉区間の積空間の中の絡み目に一般化した代数である。例えば、カウフマン・ブラケットを一般化した代数をカウフマン・ブラケットスケイン代数と呼んでいる。Turaev 氏 [16] によりスケイン代数がゴールドマン・リー代数の「量子化」であると示唆された。スケイン代数は表現多様体と関連付けて研究されてきたが、ゴールドマン・リー代数と関連付けられた研究は今まで少なかったと思われる。特に、河澄氏-久野氏 [5][6] と Massuyeau 氏-Turaev 氏 [8] により行われた写像類群とゴールドマン・リー代数の研究をスケイン代数で精密化する研究は筆者の研究が始めてである。本稿では、筆者が行ったスケイン代数と写像類群の研究を解説する。

2. ゴールドマン・リー代数と写像類群

この節では、筆者のスケイン代数の研究のもととなったゴールドマン・リー代数と写像類群の研究を紹介する。 Σ を境界が空でないコンパクトで連結で向き付けられた曲面とする。境界の基点 $*$ を一つとる。 $\hat{\pi}_1(\Sigma)$ を基本群 $\pi_1(\Sigma, *)$ の共役類とする。Goldman 氏 [1] により $\mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ のリー括弧積

$$[\ , \] : \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma) \times \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$$

が定義された。このリー括弧積により定義されるリー代数をゴールドマン・リー代数と呼んでいる。さらに河澄氏-久野氏 [5][6] により $\mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ の $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ へのリー作用

$$\sigma(\)(\) : \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma) \times \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$$

が定義された。自然な全射 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ を $|\cdot|$ で書き、添加写像 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \mathbb{Q}, x \in \pi_1(\Sigma, *) \mapsto 1$ を ϵ で書く。 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)\}_{n \geq 0}$ を $F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \stackrel{\text{def.}}{=} (\ker \epsilon)^n$ により定義する。このフィルトレーションで完備化した代数 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) / F^i \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ を $\widehat{\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)}$ と書く。また、ゴールドマン・リー代数 $\mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)\}_{n \geq 0}$ を $F^n \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} |\cdot|^{-n} F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ により定義する。このフィルトレーションで完備化されたリー代数 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma) / F^i \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ を $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)}$ と書く。

Σ の境界を各点で保つ微分同相写像全体のなす群を $\text{Diff}(\Sigma, \partial\Sigma)$ とし、境界を各点で保つ isotopy で恒等写像と同一視される $\text{Diff}(\Sigma, \partial\Sigma)$ の元なす部分群

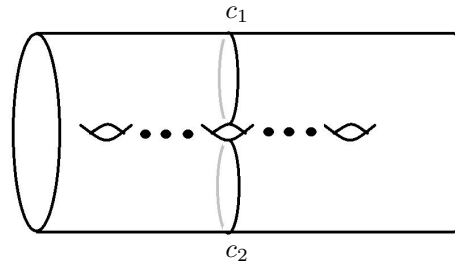


FIG 1. A bounding pair

を $\text{Diff}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$ とする。 $\mathcal{M}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Diff}(\Sigma, \partial\Sigma)/\text{Diff}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$ を Σ の写像類群と呼ぶ。単純閉曲線 c に沿った右向きデーン・ツイストを t_c で表す。

定理 2.1 ([5] [6] [8]). c を Σ の単純閉曲線とする。 $L_{\text{Gol}}(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} |(\log(\gamma))^2|$ とする。ただし $\gamma \in \pi_1(\Sigma, *)$ を $|\gamma| = c$ となる基本群の元とする。この時

$$t_c(\cdot) = \exp(\sigma(L_{\text{Gol}}(c)))(\cdot) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_{\text{Gol}}(c)))^i(\cdot) \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma, *))$$

を得る。

この公式を中心に完備ゴールドマン・リー代数と写像類群の研究が進んだ。

$\Sigma_{g,1}$ を種数 g で、連結で空でない境界を持つ曲面とする。 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ の $H_1(\Sigma_{g,1})$ への作用を考えることにより、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の全射準同型を得る。この全射準同型の核をトレリ群 $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ と呼んでいる。Johnson 氏 [4] により、トレリ群 $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ は部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) (Fig.1) について $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$ で生成されることが知られている。 $F^3 \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma_{g,1})$ は Baker-Campbell-Hausdorff 級数 bch により群とみなすことができる。定理 2.1 を用いて次の単射準同型が得られることが知られている。

定理 2.2 ([5] [6]). 群準同型 $\zeta_{\text{Gol}} : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow F^3 \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma_{g,1})$ を部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) について $\zeta_{\text{Gol}}(t_{c_1} t_{c_2}^{-1}) = L_{\text{Gol}}(c_1) - L_{\text{Gol}}(c_2)$ と定義する。この時、 ζ_{Gol} が *well-defined* となり、さらに単射になる。

この準同型は symplectic Magnus 展開を用いて、全ての Johnson 準同型の情報をもつ totally Johnson 準同型が定義される。

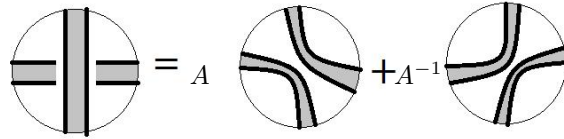
このデーン・ツイストの公式 $L_{\text{Gol}}(c)$ と単射準同型 ζ_{Gol} に対応するデーン・ツイストの公式と単射準同型がスケイン代数にも存在する。

3. カウフマン・ブラケット・スケイン代数と写像類群

3.1. カウフマン・ブラケット・スケイン代数 (加群) の定義. S^3 中の nonoriented framed link とはいくつかの S^1 の直和と $I \stackrel{\text{def.}}{=} [0, 1]$ の積空間の埋め込みの像を S^3 の isotopy で同一視した対象である。カウフマン・ブラケットとは Fig 2 の関係式で定義される $\mathbb{Q}[A, A^{-1}]$ の値を持つ多項式不変量である。 Σ をコンパクトで連結な向き付けられた曲面とする。カウフマン・ブラケットを $\Sigma \times I$ の tangle に拡張する。

Definition 3.1. $\mathcal{E}(\Sigma)$ を次を満たす埋め込み $E : ((\coprod_{\text{finite}} S^1) \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \rightarrow \Sigma \times I$ の集合とする。

the skein relation



the trivial knot relation

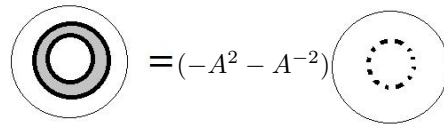


FIG 2. The skein relation and the trivial knot relation

- $E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I \subset p_1 \circ E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times I \subset \partial \Sigma \times I$.
- $E|_{(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I} : (\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I \rightarrow p_1 \circ E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times I$ は向きを保つ。
- $p_1 \circ E|_{(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\}}$ は単射である。

ただし p_1 は第一成分への射影とする。

Definition 3.2. $E_0, E_1 \in \mathcal{E}(\Sigma)$ について、次を満たす $\tilde{E} : (((\coprod_{\text{finite}} S^1) \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I) \times I \rightarrow \Sigma \times I$ が存在する時、*nonoriented isotopic* であるという。

- 任意の $t \in I$ について、 $\tilde{E}(\cdot, t) \in \mathcal{E}(\Sigma)$.
- 任意の $t \in I$ について、 $p_1 \circ \tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{0\}) = p_1 \circ \tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{t\})$.
- $\tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \times \{0\}) = E_0(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I$.
- $\tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \times \{1\}) = E_1(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I$.

$\mathcal{E}(\Sigma)$ の *nonoriented isotpic class* を *nonoriented framed tangle* と呼ぶ。 $E \in \mathcal{E}(\Sigma)$ を代表とする *tangle* の *base point set* を $p_1 \circ E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I$ とする。

J を $\partial \Sigma$ の有限部分集合とする。 $\mathcal{T}(\Sigma, J)$ を *base point set* を J とする *nonoriented framed tangle* の集合とする。Fig 2 の関係式で割った $\mathbb{Q}[A, A^{-1}]\mathcal{T}(\Sigma, J)$ の商加群を $\mathcal{S}(\Sigma, J)$ とし、カウフマン・ブラケット・スケイン加群と呼ぶ。さらに $\mathcal{S}(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\Sigma, \emptyset)$ とし、スケイン代数と呼んでいる。Fig 3 により $\mathcal{S}(\Sigma)$ の積、 $\mathcal{S}(\Sigma)$ の $\mathcal{S}(\Sigma, J)$ への右作用と左作用を定義する。空リンク $\emptyset \in \mathcal{S}(\Sigma)$ が

$$xy \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array} \Sigma$$

for $(x, y) \in \mathcal{S}(\Sigma) \times \mathcal{S}(\Sigma), \mathcal{S}(\Sigma) \times \mathcal{S}(\Sigma, J)$ or $\mathcal{S}(\Sigma, J) \times \mathcal{S}(\Sigma)$

FIG 3. Definition of the product, and the right action and the left action

$\mathcal{S}(\Sigma)$ の単位元となる。さらに、 $\mathcal{S}(\Sigma)$ のリー括弧積を $x, y \in \mathcal{S}(\Sigma)$ において、

$$[x, y] \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{-A + A^{-1}}(xy - yx)$$

と定義し、 $x \in \mathcal{S}(\Sigma), z \in \mathcal{S}(\Sigma, J)$ においてリー作用 σ

$$\sigma(x)(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{-A + A^{-1}}(xz - zx)$$

と定義する。

3.2. カウフマン・ブラケット・スケイン代数のフィルトレーション. ゴールドマン・リー代数の研究において、完備化必要であったようにカウフマン・ブラケット・スケイン代数でも完備化が必要である。この節ではカウフマン・ブラケット・スケイン代数のフィルトレーションを定義する。

添加写像 $\epsilon : \mathcal{S}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Q}$ を $\epsilon(A) = -1$ と $\epsilon(L) = (-2)^{\# \pi_0(L)}$ により定義する。基本群の元 $x \in \pi_1(\Sigma)$ について $\langle x \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} L_x + 2 - 3w(L_x)(A - A^{-1})$ と定義する。ただし、 L_x は $|x|$ の代表となる $\mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)$ の元で、また self linking number $w(L_x)$ は L_x の positive crossing の個数と negative crossing の個数の差である。さらに $\langle \cdot \rangle$ を線型に拡張した写像 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma) \rightarrow \ker \epsilon / (\ker \epsilon)^2$ も同様に $\langle \cdot \rangle$ で表す。さらに \mathbb{Q} 線型写像

$$\lambda : \wedge^3 H \rightarrow (\ker \epsilon) / (\ker \epsilon)^2, [\alpha] \wedge [\beta] \wedge [\gamma] \mapsto \langle (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) \rangle$$

を定義する。ただし $H \stackrel{\text{def.}}{=} H_1(\Sigma, \mathbb{Q})$ とし、線形空間 V について $\wedge^n V$ を n 次の外積テンソルとする。 \mathbb{Q} 線型写像 λ は単射である [13, Corollary 4.6]。スケイン代数 $\mathcal{S}(\Sigma)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathcal{S}(\Sigma)\}_{n \geq 0}$ を

$$\begin{aligned} F^0 \mathcal{S}(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{S}(\Sigma), \\ F^1 \mathcal{S}(\Sigma) &= F^2 \mathcal{S}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \ker \epsilon, \\ F^3 \mathcal{S}(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} \ker \varpi, \\ F^n \mathcal{S}(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} (\ker \epsilon) F^{n-2} \mathcal{S}(\Sigma) \quad (\text{for } 4 \leq n). \end{aligned}$$

により定義する。ただし、 ϖ は商写像 $\ker \epsilon \rightarrow \ker \epsilon / \text{im } \lambda$ とする。

命題 3.3 ([13] Proposition 5.7, Proposition 5.11). 任意の n, m について、次を満たす

$$F^m \mathcal{S}(\Sigma) F^n \mathcal{S}(\Sigma) \subset F^{n+m} \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$[F^m \mathcal{S}(\Sigma), F^n \mathcal{S}(\Sigma)] \subset F^{n+m-2} \mathcal{S}(\Sigma).$$

定理 3.4. 次の \mathbb{Q} 線型同型写像が存在する

$$\lambda_2 : S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \rightarrow F^2 \mathcal{S}(\Sigma) / F^3 \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$\lambda_3 (= \lambda) : \wedge^3 H \rightarrow F^3 \mathcal{S}(\Sigma) / F^4 \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$\lambda_4 : S^2(S^2(H)) \oplus S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \rightarrow F^4 \mathcal{S}(\Sigma) / F^5 \mathcal{S}(\Sigma).$$

ただし線形空間 V について $S^n(V)$ を n 次の対称テンソルとする。さらにこれらの同型写像は写像類群の自然な作用について可換である。

スケイン代数とスケイン加群の完備化を

$$\hat{\mathcal{S}}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}(\Sigma) / F^i \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$\hat{\mathcal{S}}(\Sigma, J) \stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}(\Sigma, J) / F^i \mathcal{S}(\Sigma) \mathcal{S}(\Sigma, J),$$

とする。

定理 3.5 ([12] Theorem 5.5). 自然な準同型 $\mathcal{S}(\Sigma) \rightarrow \hat{\mathcal{S}}(\Sigma)$ と $\mathcal{S}(\Sigma, J) \rightarrow \hat{\mathcal{S}}(\Sigma, J)$ は単射である。

3.3. カウフマン・ブラケット・スケイン代数におけるデーン・ツイストの公式. c を Σ の単純閉曲線とする。この時

$$L_S(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{-A + A^{-1}}{\log(-A)} \left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{-c}{2}\right) \right)^2 - (-A + A^{-1}) \log(-A) \in \hat{\mathcal{S}}(\Sigma)$$

と定義する。ただし、 Σ の c の管状近傍 U_c について $U_c \times \{\frac{1}{2}\}$ が代表とする framed nonoriented knot が代表となる $\mathcal{S}(\Sigma)$ の元も c と書く。 $L_S(c)$ によりカウフマン・ブラケット・スケイン代数でのデーン・ツイストの公式が記述される。

定理 3.6 ([12] Theorem 4.1). 単純閉曲線 c について

$$t_c(\cdot) = \exp(\sigma(L_S(c)))(\cdot) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_S(c)))^i(\cdot) \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathcal{S}}(\Sigma, J))$$

を得る。

リー代数としての Baker-Campbell-Hausdorff 級数 bch により $F^3 \hat{\mathcal{S}}(\Sigma_{g,1})$ を群とみなすことできる。ゴールドマン・リー代数の場合と同様に次が成り立つ。

定理 3.7 ([14] Theorem 3.13. Corollary 3.14). 群準同型 $\zeta_S : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow F^3 \hat{\mathcal{S}}(\Sigma_{g,1})$ を部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) について $\zeta_S(t_{c_1} t_{c_2}^{-1}) = L_S(c_1) - L_S(c_2)$ と定義する。この時、 ζ_S が *well-defined* となり、さらに単射になる。

この定理は Putman による $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ の表示 [11] を用いて証明される。
単射群準同型 ζ_S を用いて第一ジョンソン準同型 [3] $\tau_1 : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \wedge^3 H$ の再構成が得られる。

命題 3.8 ([14] Theorem 3.16.). 次の群準同型

$$\mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\zeta_S} F^3 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \twoheadrightarrow F^3 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) / F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\lambda^{-1}} \wedge^3 H$$

は第一ジョンソン準同型と一致する。

$\mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \stackrel{\text{def.}}{=} \ker \tau_1$ をジョンソン核と呼ぶ。 ζ_S はキャツソン核 [9] の再定義ができた。 $\tau_2 : \mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow S^2(\wedge^2(H))$ を第二ジョンソン準同型とし $S^2(\wedge^2(H)) \rightarrow S^2(S^2(H))$, $(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) \mapsto (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) - (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)$ により定義される \mathbb{Q} -線形写像を p とする。

命題 3.9. 次の群準同型

$$\mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\zeta_S} F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \twoheadrightarrow F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) / F^5 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\lambda_4^{-1}} S^2(S^2(H)) \oplus S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \twoheadrightarrow S^2(S^2(H))$$

は $p \circ \tau_2$ と一致する。次の群準同型

$$\mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\zeta_S} F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \twoheadrightarrow F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) / F^5 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\lambda_4^{-1}} S^2(S^2(H)) \oplus S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$$

はキャツソン核と一致する。

3.4. カウフマン・ブラケット・スケイン代数を用いた整係数ホモロジー球面の不変量の構成. トレリ群からカウフマン・ブラケット・スケイン代数への埋め込み ζ_S を用いて整係数ホモロジー球面の不変量を構成することができたことを報告する。

S^3 の Heegaard 分解 $H_g^+ \cup_t H_g^-$ を固定する。ここで H_g^+ と H_g^- を種数 g のハンドルボディとし、 $\iota : \partial H_g^+ \rightarrow \partial H_g^-$ を微分同相写像とする。 $\Sigma_{g,1}$ を ∂H_g^+ の部分曲面とみなす。 $\xi \in \mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ について、 $M(\xi) \stackrel{\text{def.}}{=} H_g^+ \cup_{\iota \circ \xi} H_g^-$ とする。向きを保つ埋め込み写像 $e : \Sigma_{g,1} \times I \rightarrow S^3$ を次を満たすようにとる

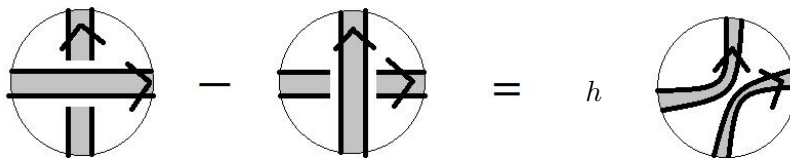
$$e|_{\Sigma_{g,1} \times \{0\}} : \Sigma_{g,1} \times \{0\} \rightarrow \Sigma_{g,1} (\subset \partial H_g^+ \subset H_g^+ \subset S^3), (t, 0) \mapsto t.$$

埋め込み写像 $e : \Sigma_{g,1} \times I \rightarrow S^3$ は $\mathbb{Q}[[A+1]]$ -加群準同型 $e : \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$, $L \in \mathcal{T}(\Sigma, \emptyset) \mapsto \mathcal{K}(e(L))$ を導く。ただし、 \mathcal{K} をカウフマン・ブラケットとする。本稿では $\mathcal{K}(\emptyset) = 1$ であることを注意しておく。

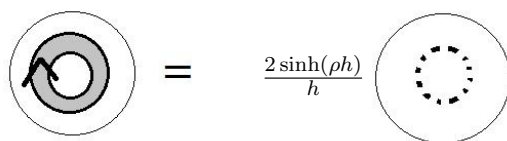
定理 3.10 ([15]). 写像 $Z : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$, $\xi \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!(-A+A^{-1})^i} e((\zeta_S(\xi))^i)$ は、 $z : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$, $M(\xi) \mapsto Z(\xi)$ を導く。ただし $\mathcal{H}(3)$ を整係数ホモロジー球面の集合とする。別の言い方をすると $z : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$ が整係数ホモロジー球面の不変量となる。

整係数ホモロジー球面 M について、 $(z(M))|_{A^4=q}$ が大槻級数 [10] と一致すると思われる。実際 Poincaré ホモロジー球面について、14 次の次数まで一致することがわかっている。

the skein relation



the trivial knot relation



the framing relation

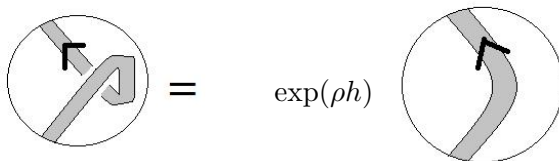


FIG 4. The relations of \mathcal{L}

4. HOMFLY-PT スkein代数と写像類群

カウフマン・ブラケット・skein代数で行った研究が HOMFLY-PT skein代数でも同様に行えることを紹介する。

S^3 中の oriented framed link とはいくつかの S^1 の直和と $I \stackrel{\text{def.}}{=} [0, 1]$ の積空間の埋め込みを S^3 の isotopy で同一視した対象である。 \mathcal{L} を Fig4 で定義される $\mathbb{Q}[\rho][[h]] \stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}[\rho, h]/(h^i)$ を値とする不変量とする。 L を oriented framed link として $(\exp(-w(L)\rho h)\mathcal{L}(L)/\mathcal{L}(\text{triv.knot}))|_{X=\exp(\rho h)} \in h^{-\# \pi_0 L + 1} \mathbb{Q}[X, h]$ を HOMFLY-PT 多項式と呼ぶ。これは framing によらず定まり、HOMFLY-PT 多項式は oriented (nonframed) link の多項式不変量である。

Definition 4.1. $E_0, E_1 \in \mathcal{E}(\Sigma)$ について、次を満たす $\tilde{E} : ((\coprod_{\text{finite}} S^1) \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \rightarrow \Sigma \times I$ が存在する時、oriented isotopic であるという。

- 任意の $t \in I$ について、 $\tilde{E}(\cdot, t) \in \mathcal{E}(\Sigma)$.
- 任意の $t \in I$ について、 $p_1 \circ \tilde{E}((\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{0\}) = p_1 \circ \tilde{E}((\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{t\})$.
- $\tilde{E}(\cdot, 0) = E_0$.
- $\tilde{E}(\cdot, 1) = E_1$.

$\mathcal{E}(\Sigma)$ の *oriented isotpic class* を *nonoriented framed tangle* と呼ぶ。 $E \in \mathcal{E}(\Sigma)$ を代表とする *tangle* の *start point set* を $p_1 \circ E((\coprod_{\text{finite}} \{0\}) \times I)$ とし、 *finish point set* を $p_1 \circ E((\coprod_{\text{finite}} \{1\}) \times I)$ とする。

J^- と J^+ を $\sharp J^- = \sharp J^+$, $J^- \cap J^+ = \emptyset$ となる $\partial\Sigma$ の有限部分集合とする。 $\mathcal{T}^+(\Sigma, J^-, J^+)$ を *start point set* を J^- 、 *finish point set* を J^+ とする *tangle* の集合とする。 Fig 4 の関係式で割った $\mathbb{Q}[\rho][[h]]\mathcal{T}^+(\Sigma, J^-, J^+)$ の商加群を $\mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ とし、 HOMFLY-PT スケイン加群と呼び、さらに $\mathcal{A}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{A}(\Sigma, \emptyset, \emptyset)$ を HOMFLY-PT スケイン代数と呼ぶ。 カウフマン・ブラケット・スケイン代数と同様に、 $\mathcal{A}(\Sigma)$ のリー括弧積 $[\ , \]$ および、 $\mathcal{A}(\Sigma)$ の $\mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ へのリー作用 σ を定義した。 さらに $\mathcal{A}(\Sigma)$ 、 $\mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathcal{A}(\Sigma)\}_{n \geq 0}$ と $\{F^n \mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)\}_{n \geq 0}$ を定義した。 積、右作用、左作用、リー括弧積、リー作用はこのフィルトレーションにより定まる位相に関して連続である。 特に、

$$[F^n \mathcal{A}(\Sigma), F^m \mathcal{A}(\Sigma)] \subset F^{n+m-2} \mathcal{A}(\Sigma)$$

である。 このフィルトレーションで完備化したスケイン代数 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\Sigma)/F^i \mathcal{A}(\Sigma)$ 、完備化したスケイン加群 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)/F^i \mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ をそれぞれ $\hat{\mathcal{A}}(\Sigma)$ 、 $\hat{\mathcal{A}}(\Sigma, J^-, J^+)$ と書く。

c を Σ の向き付けられた単純閉曲線とする。 $l_c(n) \in \mathcal{A}(\Sigma)$ を Fig 5 により定義する。 また $n \geq 0$ で

$$m_n(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{h^{j-1}}{j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=n, i_k \geq 1} \prod_{k=1}^j l_{i_k}(c)$$

と定義する。 ただし、 $m_0(c) \stackrel{\text{def.}}{=} 2\rho$ とする。 さらに、

$$(m-1)_n(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} (-1)^{n-i} m_i(c) \in F^n \mathcal{A}(\Sigma)$$

と定義する。 数列 $\{a_n\}_{n \geq 2}$ を $\frac{1}{2}(\log X)^2 = \sum_{n \geq 2} a_n (X-1)^n \in \mathbb{Q}[[X-1]]$ により定義する。 ここで

$$L_{\mathcal{A}}(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{h/2}{\text{arcsinh}(h/2)} \right)^2 \left(\sum_{n \geq 2} a_n (m-1)_n(c) - \frac{1}{3} \rho^3 h^2 \right) \in \hat{\mathcal{A}}(\Sigma)$$

と定義する。 この時カウフマン・ブラケット・スケイン代数と同じように次が成り立つ。

定理 4.2. 単純閉曲線 c について

$$t_c(\cdot) = \exp(\sigma(L_{\mathcal{A}}(c))) (\cdot) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_{\mathcal{A}}(c)))^i (\cdot) \in \text{Aut}(\hat{\mathcal{A}}(\Sigma, J^-, J^+))$$

を得る。

定理 4.3. 群準同型 $\zeta_{\mathcal{A}} : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow F^3 \hat{\mathcal{A}}(\Sigma_{g,1})$ を部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) について $\zeta_{\mathcal{A}}(t_{c_1} t_{c_2}^{-1}) = L_{\mathcal{A}}(c_1) - L_{\mathcal{A}}(c_2)$ と定義する。 この時、 $\zeta_{\mathcal{A}}$ が *well-defined* となり、さらに単射になる。

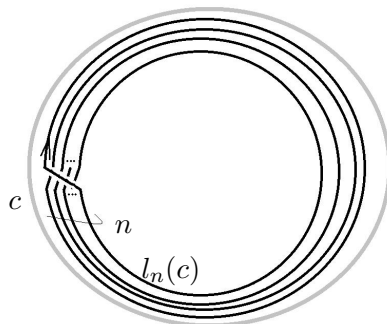


FIG 5. $l_n(c)$

定理 4.4. 写像 $Z_A : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \mathbb{Q}[\rho][[h]]$, $\xi \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!h^i} e((\zeta_A(\xi))^i)$ は、 $z_A : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[\rho][[h]]$, $M(\xi) \mapsto Z_A(\xi)$ を導く。ただし $\mathcal{H}(3)$ を整係数ホモロジー球面の集合とする。別の言い方をすると $z_A : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[\rho][[h]]$ が整係数ホモロジー球面の不変量となる。さらに、 $v : \mathbb{Q}[\rho][[h]] \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$ を $v(\exp(\rho h)) = A^4$, $v(h) = -A + A^{-1}$ により定めた時 $v \circ z_A = z$ である。

不変量 z_A は sl_n の量子群を用いて定義される多項式不変量 [2] の普遍性を持っていると予想される。具体的には、 $M \in \mathcal{H}(3)$ で

$$(z_A(M))_{|\exp(\rho h)=q^{\frac{n}{2}}, h=q^{\frac{1}{4}}-q^{-\frac{1}{4}}}$$

が sl_n の量子群を用いて定義される多項式不変量 [2] に一致すると予想している。

5. 研究の展望

5.1. **LMO 不変量と z と z_A .** $M \in \mathcal{H}(3)$ について、 $z(M) \bmod (A+1)^{n+1}$ と $z_A(M) \bmod h^{n+1}$ は位数 n の有限型不変量である。このため、LMO 不変量 [7] から z および z_A は導出されるはずであるが、どのように LMO 不変量から導出されるか解明することが今後の課題である。

5.2. **カウフマン・ブラケット・スケイン代数とキャッソン不変量.** 森田氏により、[9] などのキャッソン不変量とトレリ群の関係性が研究された。カウフマン・ブラケット・スケイン代数を用いて、森田氏のキャッソン不変量とトレリ群の関係性の研究に別証明を与えることができた。特にゴールドマン・リー代数では自然に捉えることができなかったキャッソン核はカウフマン・ブラケット・スケイン代数では自然に定義することができる。同様のアプローチでトレリ群 (の部分群) と整係数ホモロジー球面の位数 2 以上の有限型不変量との関係が明らかになると期待している。

5.3. **Turaev 余代数の量子化.** Turaev 氏 [16] がゴールドマン・リー代数にリー余代数の構造を定めた。ゴールドマン・リー代数と写像類群の研究では、このリー余代数がとても強力である。また、Turaev 氏 [16] は $\mathcal{A}(\Sigma)/(\rho)$ にも余代数 (余代数から定まるリー余代数) を定義した。このスケイン代数の (リー) 余代数の構造と筆者のスケイン代数の研究により、さらに写像類群の情報が

得られると期待している。特に、ジョンソン準同型の全射性の障害を発見できると期待している。

謝辞. トポロジーシンポジウムにお招きくださった、主催者の皆様に心より感謝いたします。

REFERENCES

- [1] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface groups representations*, Invent. Math. 85, 263-302(1986).
- [2] K. Habiro and T. T. Q. Le, *Unified quantum invariants for integral homology spheres associated with simple Lie algebras*, Geometry and Topology 20, 2687-2835(2016).
- [3] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g* , Math. Ann. 249, 225-242(1980).
- [4] D. Johnson *The structure of the Torelli Group II: A characterization of the group generated by twists on bounding curves*, Topology Vol. 24, No. 2, pp. 113-126, 1985
- [5] N. Kawazumi and Y. Kuno, *The logarithms of Dehn twists*, Quantum Topology, Vol. 5, Issue 3, pp. 347423, 2014
- [6] N. Kawazumi and Y. Kuno, *Groupoid-theoretical methods in the mapping class groups of surfaces*, arXiv: 1109.6479 (2011), UTMS preprint: 201128
- [7] T. T. Q. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki, *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, Topology 37(3), 539-574(1998).
- [8] G. Massuyeau and V. Turaev, *Fox pairings and generalized Dehn twists*, Ann. Inst. Fourier 63 (2013) 2403-2456.
- [9] S. Morita, *Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles. I*, Topology 28 (1989) 305323.
- [10] T. Ohtsuki, *A polynomial invariant of integral homology 3-spheres*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 117, 83-112(1995).
- [11] A. Putman, *An infinite presentation of the Torelli group*, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), no. 2, 591-643.
- [12] S. Tsuji, *Dehn twists on Kauffman bracket skein algebras*, preprint, arXiv:1510.05139(2015), to appear in Kodai Mathematical Journal.
- [13] S. Tsuji, *The quotient of a Kauffman bracket skein algebra by the square of an augmentation ideal*, preprint, arXiv:1606.01114(2016), to appear in J. Knot Theory Ramifications.
- [14] S. Tsuji, *The Torelli group and the Kauffman bracket skein module*, preprint, arXiv:1606.01096(2016), to appear in Proc. Cambridge Philos. Soc.
- [15] S. Tsuji, *Construction of an invariant for integral homology 3-spheres via completed Kauffman bracket skein algebras*, preprint, arXiv:1607.01580.
- [16] Turaev, V. G., *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 24 (1991), no. 6