数学、この大いなる流れ

上 野 健 爾

数学という学問は大きな誤解を受けているように思われます。特に、我が国では数学が受験と関係して、数学ができる子は頭の良い子という迷信を作り上げていることも、逆に数学嫌いを増加させ、数学という学問の姿を正しく伝えることの障害となっています。

数学という学問は今から2千数百年前の古代ギリシアで誕生したと言われています。実は、実用としての数学は古代の各文明で誕生していました。古代バビロニヤでも、古代中国でも数学は極めて高度に発達していましたから、古代ギリシアだけに学問としての数学の誕生を帰するのは不当であるかのように思われるかもしれませんが、実はこれには深い理由があります。古代バビロニヤでは数学は高度に発達し、単に実用のための数学の域を越えていたようです。しかしながら、古代ギリシアのように数学そのもの成り立ちを深く追求した文化はありませんでした。古代ギリシアの数学の成果はユークリッドの「原本」として今なお、文化史上燦然と輝いています。ほとんど自明と思われる少数の公理（約束）から出発して図形の複雑な性質を解き明かしてしていくユークリッド「原本」の議論のたてかたは、その後長い間、学問を記述する模範と考えられてきました。学問のパラダイムの変換ということがいわれますが、少数の原理や法則から現象を記述しようとする態度は今なお、学問の基本であり、真に古代ギリシアを越えたパラダイムの変換は未だ起こっていないように私には思われます。

数学という言葉について

古代ギリシアには「数学」に当たる言葉はありませんでした。プラトンの対話編を読まれた方はお気付きのことと思いますが、古代ギリシアでは、今の数学に当たる部分は、幾何学、算術、和声学、天文学などと個別の分野名で呼ばれていました。「幾何学を知らざるものこの門をくぐるべからず」とプラトンが始めたアカデメイアの門に書かれていたという話は聞かれた方も多いでしょう。こうした様々な学科は $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ と古代ギリシャでは言いました。この言葉の複数形は $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\alpha$ と言います。ピュタゴラス教団では魂を浄化するためにいくつかの $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\alpha$ を学ぶ必要がありました。中世になって、mathemata のなかから和声学や天文学、論理学などが学問として独立していって残りの学科がちょうど今日の数学と同じものとなり数学の名称としてラテン語の mathematica という言葉が誕生しました。このように、数

学と言う言葉にはその誕生の時から総合的な学問としての意味を持っており、他の諸学問と密接に関係していたのです。

数学は英語では皆さんご存じのように mathematics と言いますが、語尾の s は複数を表す s で、このことは数学という学問の名称が現れた歴史的事情に基づいています。しかし、一方では英語の mathematics が単数扱いされるように数学は様々な分野が有機的に一体となった学問としての性格を持っています。Oxford English Dictionary の説明の一部を以下にあげておきます。特に mathematics の用例に興味深いものがあります。

mathematics

Originally, the collective name for geometry, arithmetic, and certain physical sciences (as astronomy and optics) involving geometrical reasoning. In modern use applied,

(a) in a strict sense, to the abstract science which investigates deductively the conclusions implicit in the elementary conceptions of spatial and numerical relations, and which includes as its main divisions geometry, arithmetic, and algebra; and

(b) in a wider sense, so as to include those branches of physical or other research which consist in the application of this abstract science to concrete data. When the word is used in its wider sense, the abstract science is distinguished as pure mathematics, and its concrete applications (e.g. in astronomy, various branches of physics, the theory of probabilities) as applied or mixed mathematics.

In early use always construed as a plural, and usually preceded by the. In recent use *the* is commonly omitted, and the n. is almost always construed as a sing., exc. in (*the*) *higher mathematics.*

1581 Mulcaster *Positions* v. (1887) 35 Whose vse [sc. of Drawing] all modelling, all mathematikes, all manuaries do finde and confesse to be to so notorious and so needefull.

1587 Holinshed *Hist. Scot.* 461/1 A learned man in all philosophie, astronomie and the other mathematiks.

1596 Shakes. *Tam. Shr.* i. i. 37 The Mathematickes, and the Metaphysickes Fall to them as you find your stomacke serues you.

Ibid. ii. i. 82 As cunning In Greeke, Latine, and other Languages, As the other in Musicke and Mathematickes.

a 1618 Raleigh *Mahomet* (1637) 142 He wrote divers bookes of the Mathematiques.

1641Wilkins Math. Magick i. ii. (1648) 12 Mathematicks..is usually divided into pure and mixed.

1696 – 7 Wallis in Hearne R. *Brunne's Langtoft* Pref. 147 Mathematicks (at that time..) were scarce looked upon as Academical studies.

1712 Bentley *Corr.* (1842) II. 449 Mathematicks was brought to that height, that [etc.].

1726 Swift *Gulliver* i. i, Navigation, and other Parts of the Mathematics, useful to those who intend to travel.

1739 Johnson *Life Boerhaave* Wks. IV. 335 A very uncommon knowledge of the mathematicks.

1755 *Man* No. 35. 3 Mathematics derives its accuracy..from logic.

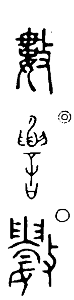
1838 De Morgan *Ess., Probab.* 68 The approximative methods of the higher mathematics.

1875 Jowett *Plato* (ed. 2) IV. 271 By the help of mathematics, we form another idea of space.

「数学」という学問の名称は明治時代に mathematics の訳語として確定しました。漢字の「数」は日頃私たちが使っている「かず」の意味以外に「論理」とか「ことわり」といった意味があり、古代の中国ではそのような意味にむしろ使われていました。易の研究のことを数学とよんだこともあると聞いたことがあります。ラテン語でも mathematica は占星術という意味を持っています。東西の全く異なる文化の中で似たような使われ方があることに驚かされます。

「数」の起源に関する白川静説を挙げておきましょう。白川説は必ずしも皆の賛同を得た説ではないということですが、「数」という漢字の持つ様々な意味の起源を説明するのには最適であるように思われます。

常【数】13/9844 【數】15/5844



スウ ス サク ソク
せめる かず かぞえる しばしば しきりに

会意 旧字は數に作り、婁＋攴。婁は女子の髪を高く結いあげた形。これに攴を加えて、髪を乱すことを數という。数々として髪が乱れる意。女子を責めるときにその髪をうって乱したので責めることをいい、乱れてばらばらになるので数多い意となり、計数の意となる。〔説文〕三下に「計ふるなり。攴に從ひ、婁聲」とするのは、後起の義。字もまた婁声ではない。計数の赴くところは必然であるから、世運や運命をも数という。

1せめる、うながす。2かず、かぞえる、よみあげる、計数。3数の理、ことわり、さだめ、いきおい。4わざ、はかりごと、てだて。5しばしば、しきりに、はやい、すみやか。6二、三から五、六の概数。

古訓 〔名義抄〕數 カズ・カゾフ・アマタ・コトワリ・コトワル・シバ／＼・シルシ・マホル・アマタ、ビ／數奇 サチナシ 〔字鏡集〕數 シバ／＼・カゾフ・サム・シバラク・カズ・タビ／＼・マホル・シバシ・アマタ・コトワリ・コトワル・アマタ、ビ・サク・シルシ・アマタル

声系 〔説文〕に數声として藪・籔の二字を収める。藪は大沢、藪沢の地をいい、数々として物の多い意であろう。籔は炊籅で、といだ米をあげるざる。その編みかたが、乱れ髪に似ているのであろう。ゆえに字は數に従う。

語系 數 sheok、責 tzhek は声近く、責は財物を課して責める意。速（遬）siok は急疾、數をその意に通用することがある。

【數奇】不運。不幸な運命。〔漢書、李広伝〕大將軍（衛青）陰かに上指を受く。以爲へらく、李廣は數奇、單于に當らしむること毋かれ。恐らくは欲する所を得ざらんと。～故に廣を徙さんとす。廣、之れを知りて固辭す。

白川静「字通」より

古代中国では「数」は数としての意味の他に、「ことわり」、「運命」といった意味に盛んに使われていたようです。司馬遷の「史記」でも「常数」が「ことわり」の意味に使われています[1] 。また、わが国でも、明治時代、幸田露伴の随筆には「運命」の意味で数が使われています。こうして見てきますと、「数学」という名称はなかなか深い意味を持っていることが分かります。最近のいわゆる大学改革でわが国の大学の多くの数学教室が名称の変更を余儀なくされ、数学という名称が大学からほとんど消えてしまったことは、「運命」だといってすまされてよいことではありません。わが国の数学の将来にとってゆゆしい事態であると思います。学問の名称を簡単に変えることほど、学問を粗末にしていることはないと思います。

[1] 松本幸夫氏のご教示による


退者恐患之甚於三子竊爲君危之語曰日中
則移月滿則虧物盛則衰天地之常數也進退
盈縮與時變化聖人之常道也故國有道則仕
國無道則隱聖人曰飛龍在天利見大人不義
而富且貴於我如浮雲今君之怨已讎而德已
報意欲至矣而無變計竊爲君不取也且夫翠
鵠犀象其處勢非不遠死也而所以死者惑於
餌也蘇秦智伯之智非不足以辟辱遠死也而
所以死者惑於貪利不止也是以聖人制禮節
欲取於民有度使之以時用之有止故志不溢

史記 范雎蔡澤列伝十九　　1行目したから2行目にかけて
「日中すれば則ち移り、月満つれば則ち欠け、物盛んなれば
則ち衰う。天地の常数なり。」と読める。

当たり前のこと

「幾何の時間に習って役に立ったことは三角形の三角形の二辺の長さの和は残りの辺の長さより長いということである、しかしこんなことは犬や猫も知っている」という趣旨のことを菊池寛が言ったと伝えられています。最近では、初等・中等教育の教科内容の厳選に関連して、教科課程審議会会長の三浦朱門氏は、教科のエゴ

を無くすために、たとえば数学では『曾野綾子のように「私は二次方程式もろくにできないけど、65歳になる今日まで全然不自由しなかった」という委員』を半分以上加えて数学教育の内容の見直しを行う必要があると発言しています([6])。私は俳句も短歌もできないけれども今日まで全然不自由しなかったからといって、国語の教科書から俳句や短歌をなくすべきだと主張する人に対して三浦朱門氏は何と反論されるのでしょうか。もちろん、こうした発言が堂々と教科課程審議会会長から出されることは、数学教育の“成果”であることは確かです。数学教育者のみならず数学者も大いに反省すべき点があることは確かです。それにしても、文筆を生業としている人たちが、学問を文化の一環として理解できないこと自体現在のわが国の文化の質が問題とされましょう。

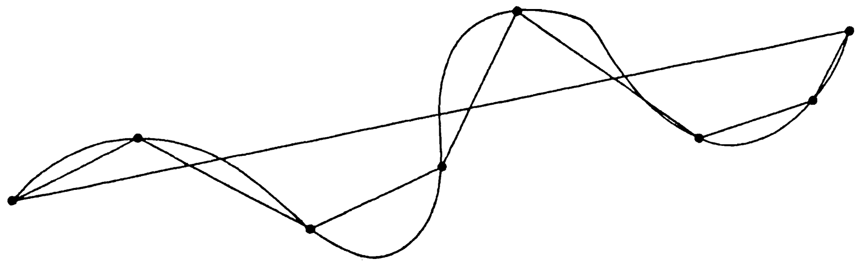
これほど、極端でないにせよ、数学教育者と目される人たちの中にも不思議な主張をされる方がいます。工学で実際に使う多項式はせいぜい3、4次式までだからそれ以上の多項式を教える必要はない、数の計算でも三桁以上のかけ算を必要とする機会はほとんどないから、そんな計算を授業でやる必要はない。……もっとすばらしい例を挙げれば、計算だけの微積分の指導要領を作成しておいて、高校の微積分は計算ばかりだから、高校で微積分をやる必要はないと発言された方もおられます。

こうした人たちは、数学を単なる知識の集積だとしか考えていません。ここに、数学に対する極めて大きな誤解があります。数学は単に新しい事実を見出すだけに終始してきたのではなく、新しい考え方、新しい見方を絶えず求めてきたのであり、基本になるのは考え方なのです。そして、その考え方が後の時代に他の学問に本質的な寄与をすることがあります。数学は未来に向かって開かれた学問なのです。たとえば、文字式は現象を記述する手段として普遍的な手段となっており、水や空気の存在と同様にあまりに当たり前のことで、文字式の導入までに古代ギリシア以来千五百年以上もの長い年月が必要であったことなど、ふつうは思いもしないことでしょう。しかし、一般の式を文字を使って表すことを考えついたのは16世紀後半の西洋の数学と17世紀後半の和算だけでした。このことについては後に触れることにします。

ここでは、少し趣向を変えて、菊池寛も言及している「三角形の二辺の長さの和は残りの辺の長さより長い」という初等幾何学の主張を考えてみましょう。この当たり前の事実から論理の力を借りれば、思いもかけない事実をたくさん導くことができることをみなさんと一緒に考えてみましょう。しかも、これらの事実が、現代数学や現代物理学と深く関わっているのです。そのようなことは、もちろんユークリッドの時代には夢想だにできないことでした。これからお話しする小さな例からも数学が未来に向かって絶えず広がってきた歴史を推測していただけることを期待します。

「三角形の二辺の長さの和は残りの辺の長さより長い」という主張は「二点を結ぶ最短の線は直線である」という主張の帰結です。また、逆に「三角形の二辺の長

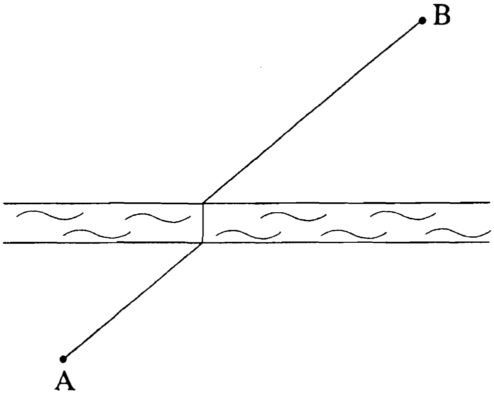
さの和は残りの辺の長さより長い」という主張から「二点を結ぶ最短の線は直線である」ことを示すこともできます。それは、二点を通る曲線を折れ線で近似することによって示すことができます。（正確には、曲線とは何であるか、きちんと“定義”する必要がありますが、ここではこれ以上深入りしないことにします。）



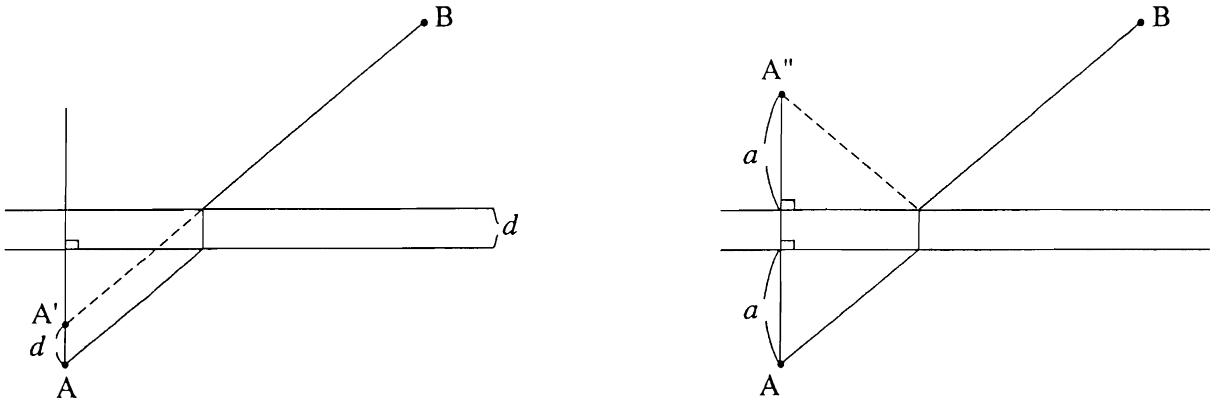
「二点を結ぶ最短の線は直線である」という主張がどれほど豊かな内容をもっているか、少し考えてみましょう。

まず手始めに次の問題を考えてみましょう。

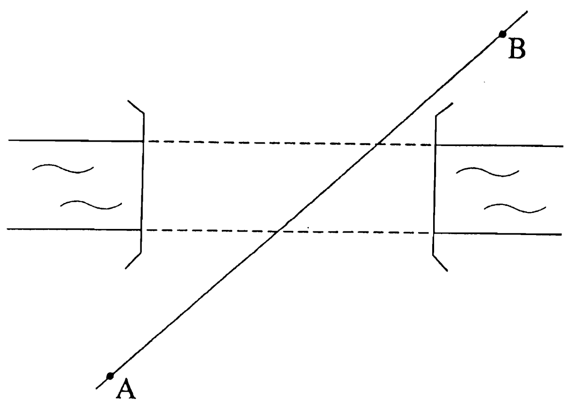
問題１　下図のように川を挟んで A 点と B 点がある。川には岸に直角に橋を架けるものとする。A 点から B へ行くのに距離が最短になるようにするにはどの地点に橋を架けたらよいか。



この問題には様々な解法が考えられます。たとえば川をなくして考えれば、二点を結ぶ最短の線は直線ですから、次のような解法があります。

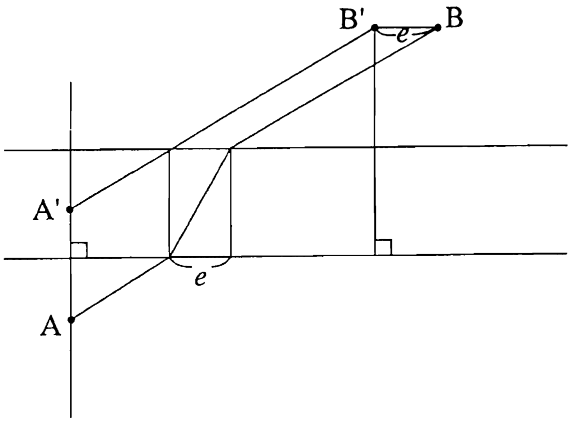


この問題を昨年の高校生講座で出したところ、授業が終わった後で一人の高校生がやってきて、先生、もっと良い解答があるというのです。下の図のように幅の広い橋を架ければ何も考える必要はないというのです。一本とられたと思いました。



幅の広い橋を架ければ A から B へは直線で行くことができる。

この高校生は数学の問題と現実の問題とが少し違うことを知っていてこのような解法を持ってきたのでしょう。現実の橋は必ず幅があるのですが、最初の解答では橋の幅はないものとして考えています。上の問題を橋の幅が一定の長さ d の時に考えることもできます。このときも、上と同様の考えで解くことができます。



幅が d の橋を架けた場合

このように、現実の問題を数学的に解くときには種々の理想化をして数学的なモデルをつくる必要があります。川幅は一定で川岸は直線になっているというのは現実とは少々違います。また、距離を測るときは誤差はつきものですし、幅が一定の橋を造るのも誤差の範囲内でしかできません。しかし、現実の問題を考える際には、問題に応じて理想化が必要です。川が蛇行していれば扱いやすい曲線で代用します。

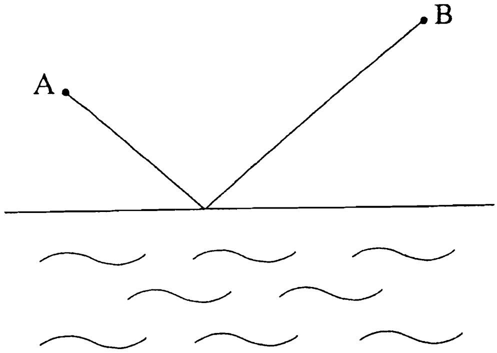
所で、今は最短の距離を問題にしました。その替わりに道路と橋を建設する問題を考えることもできます。

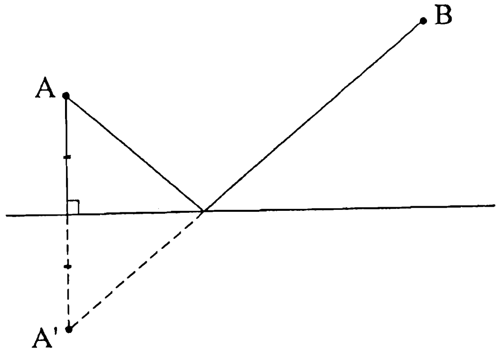
問題２　道路を建設するのに A 地点の側ではメートルあたり a 円かかり、B 地点の側では b 円かかり、橋の建設費はどの地点から橋を架けても一定のとき、かかる費用を最低にするためにはどこに橋を架けたらよいか。

これはきわめて現実的な問題です。この問題を直接考える替わりに、ここでは物理の問題、光の屈折の問題と関連させて考えてみることにします。

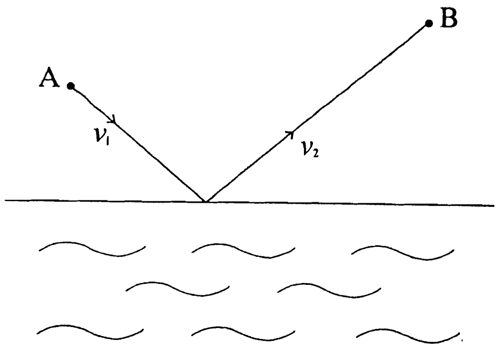
そのために、まず問題１を次のように変形した問題から考えることにしましょう。

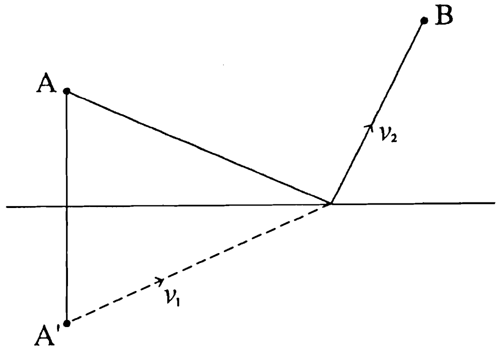
問題１の変形　　下図のように A. B ２点が川の片側にあります。A 点から出発して川岸に着きそれから B 点へ向かいます。歩く速さが一定の時、川岸のどの点を目指して進むと最短時間で B 点へつくことができるでしょうか。



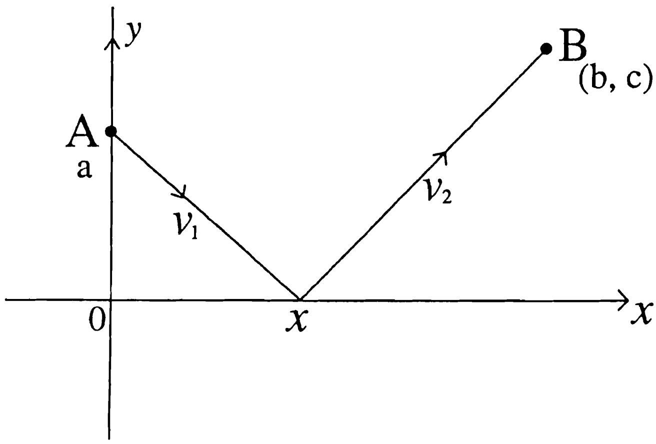


この問題をさらに変形することもできます。たとえば、A 点から川岸ま所ででは自転車で行き、川岸に着いたら自転車を降りて徒歩で B 点へ向かいます。このとき時間が最短になるためには川岸のどこを目指したら良いかという問題です。これは、先ほど述べた建設費を最低にする問題と実質的に同等の問題になります。





この問題を解くために川岸を X 軸にして次のように座標を取ることにしましょう。そして A 点から単位時間あたり速さ v_1 で川岸へ向かい、川岸へ着いてからは単位時間あたり速さ v_2 で B 点へ向かうものとします。



$A=(0,a)$ 点から川岸の点 $(x,0)$ へ向かい、そこから $B=(b,c)$ 点へ向かったとするとかかる時間は

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{c^2+(b-x)^2}}{v_2}$$

となります。従って、この問題は函数

$$g(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{c^2+(b-x)^2}}{v_2}$$

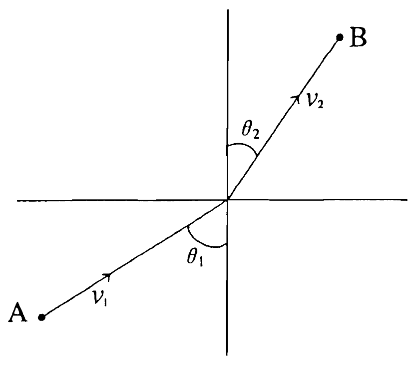
を $0\leq x\leq b$ の範囲内で最小にする問題になります。これを初等的に解くのは難しくなります。どうしても極限操作が必要となってくるからです。微積分をご存じの方は、函数 $g(x)$ が極大値または極小値を取るところは、導関数 $g'(x)$ が 0 にならなければならないことをご存じだと思います。微分係数と接線の関係を考えればこれは納得がいくことと思われます。ただし、これは極大、極小値を取るための必要条件であって、この条件が成り立つからといって必ずしも極大、極小値となるとは限りません。まして、最大値や最小値になるとは限りません。それにたいしては、ここの問題ででてきた答えが果たして極大、極小であるか、あるいは最大、最小であるかを吟味する必要があるわけです。幸いなことに、私たちが考えている問題では $g'(x)=0$ の解 x_0 で函数 $g(x)$ は最小値を取ることが示されます。$g'(x)$ を計算すると

$$g'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{b-x}{v_2\sqrt{c^2+(b-x)^2}}$$

が成り立ちます。従って $g'(x_0)=0$ では

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0^2}}=\frac{b-x_0}{v_2\sqrt{c^2+(b-x_0)^2}}$$

が成立します。



これは上の図のように角度を取ると

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

が成り立つことを意味します。x_0 を直接求めることは面倒ですが、角度を使ってこのような簡明な形で表現することができます。特に $v_1=v_2$ であれば $\theta_1=\theta_2$ であることが分かります。これは、光の反射の法則と一致しています。これは偶然のことではなくて、上の問題は光の反射や屈折の問題と密接に関係しています。異なる媒質を通る光は通過する時間が最小になる道を通るという フェルマの原理があります。フェルマの原理を使って光の通り道を見いだせという問題と上の問題は実は数学的には同じ問題になります。

文字式

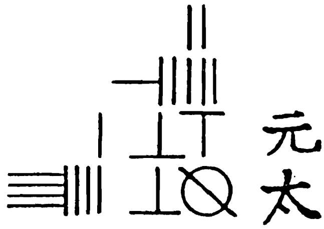
所で、上の問題を解くとき、何気なく x や y などの記号を使い、文字式を使いました。私たちは、これを当たり前のこととして使っていますが、実は文字式を自由に使えるようになるのには長い長い年月を必要としました。文字式の元祖に当たるものは書かれた記録としては、3 世紀、アレキサンドリアで活躍したディオファントスに遡ります。ディオファントスは古代ギリシアの伝統からはかけ離れた面があり、東方、特に古代バビロニアの伝統を引き継いでいるのではと言われていますが、確証は今のところありません。彼の式の記号は原始的なものでしたが、不思議なことにそれをさらに発展させる数学者は当時はありませんでした。

文字式が登場したのは 16 世紀のヨーロッパです。3 次方程式の解法で有名なカルダノやタルタリヤはディオファントスより進んだ記法を使っていますが、ヴィエタによって文字式の記法は本格化しました。ヴィエタの記法をもとに、デカルトはさらに進んだ文字式の使い方をし、座標幾何学（解析幾何学）を創始しました。デカルトの座標幾何学は「方法序説」の付録として出版されました。ちなみにデカルトの「方法序説」は当時の西洋の共通語であるラテン語ではなくフランス語で書かれています。付録の幾何学は後にラテン語訳され、多くの注釈書が著されました。ラテン語は当時のヨーロッパの共通語としての役割を持っていたからです。

$$ax^2+bx+c$$

のように式の係数にも文字を使って例は、残された文献としては、デカルトの時代のようです。1630 年代のことです。

大変興味深いことは、中国でも宋や元の時代に代数学がすばらしい発展をし、文字式の考え方が誕生します。元の時代の数学者 朱元障は $2x^3 + 15x^2 + 166x - 4460 = 0$ のような文字式次のように記しました。



ここで、元は未知数を表し、元が記してある行が1次式の係数です。方程式の係数を上から上から高い次数の順に記していきます。宋や元の時代の中国数学では方程式はすべて右辺は0の形、$P(x) = 0$ の形を考えましたので、上の式には 0 は現れません。今日でも 2 元 1 次方程式と言いますが元は未知数の意味なのです。

しかしながら、大変不思議なことはデカルトのように、式の係数にも文字を使い、一般の式を表すことを中国の数学者は考えつきませんでした。この元の代数学の影響を受けて、（実は中国では宋や元の時代の優れた数学は明の時代にはほとんど忘れ去られ、我が国へ伝えられたのも不完全な形の数学でした）一般の文字式を表すことを考えついたのは江戸時代17世紀後半の関孝和でした。西洋での文字式の使用から1世紀近く間がありますので、関の文字式は西洋の数学の影響を受けたのではと疑うことも可能です。

16世紀に日本にやってきて大きな影響を与えたのはイエズス会の宣教師であり、彼らは為政者に接近する手段として数学を勉強して来ていました。数学は特に暦法との関係で重要でした。数学が好きな宣教師がいても不思議でありませんから、当時の数学の知識が我が国に来なかったという保証はありません。デカルトの「方法序説」が我が国に来ていれば話としては大変面白いのですが、たとえ来ていてもフランス語を解する日本人はいなかったろうと思われます。また、当時のイエズス会の方針を考えれば宣教師によって数学の本が我が国へそれほどもたらされたとは考えられません。イエズス会は日本布教の途中で方針を転回し、積極的にラテン語の文献をもたらし日本人の教育を行いましたが、そのときの基準は純粋にイエズス会の教義を述べた文献のみを日本にもたらすことにありました。従って、教義論争に関係する文献は、反対派の考えを日本人が知ることになってまずいということで我が国へはもたらされませんでした（[1]）。完全な思想統制のもとでのラテン語とキ

リスト教の教義を中心の教育が行われたようです。

いずれにせよ、当時の人たちにとっては、中国からの数学の本が数学を勉強するための基本だったことは間違いありません。ラテン語の本を読める日本人はごくわずかであり、宣教師が自ら数学を教えない限り、西洋数学が日本人に伝わった可能性はなかったように思われます。平山諦氏によれば、こうした宣教師としてスピノラがあげられるとのことです（[2]）。この点に関しては、今後の研究が進むのを待つしかありません。しかし、いずれにせよ、関孝和が西洋数学の文字式を知っていた可能性は極めて低いと思われます。

中国数学の歴史できわめて不思議なことは、西洋数学を学んだ数学者がおり、優れた過去の数学を持っていたにも関わらず、中国数学の中で、文字式を積極的に使用する数学者が現れなかったことです。なぜ、西洋と我が国だけに文字式の使用が可能になったのか、文化史上きわめて興味ある問題です。

ところで、文字式にこだわるのは、一般の式を書き表すことを通して、式の変形を目で追うことができ、その式や結果のもつ意味を深く考えることが可能になることが一つの大切な理由です。たとえば 2 次方程式の根の公式を求める問題を考えてみましょう。

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$$

を次のように変形します。

$$a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{4a}(b^2-4ac)$$

すなわち

$$(x+\frac{b}{2a})^2=(\frac{1}{2a})^2(b^2-4ac)$$

と書けます。したがって、この両辺の平方根をとることによって

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

を得、結局根の公式は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

になります。この公式に具体的な数値を当てはめることによって具体的な方程式の根を求めることができます。しかし、実数だけしか知らなければ重大な問題が生じます。もし根号の中の数 b^2-4ac が負の数であれば $\sqrt{b^2-4ac}$ は実数の中には存在しないからです。すべての 2 次方程式の根を考える必要があれば、2 乗して負になる数を考える必要があります。古人はこうした“数”を考えると便利である、たとえば今の例ではすべての 2 次方程式は必ず 2 個の根を持つことになり（ただし $b^2-4ac=0$ のときは 2 個の根は重複しているとみなす）、例外をいちいち考えなくて良いことになります。こうしたこともあり、古人は 2 乗して負になる数を虚数と名付けて、やむ

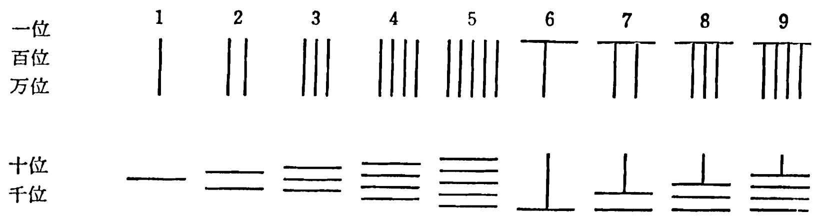
を得ず必要なときだけ使いました。積極的に虚数を使ったのはオイラーでした。虚数単位に i を使うことはオイラーに始まります。

その後ガウス、コーシーを経てリーマンによって複素函数論が建設され、複素数は数学にとってなくてはならないものになりました。そして、今日では電気工学でも欠かせないものになっています。（電気では虚数単位として i ではなく j を使います。記号 i は電流を表す記号として昔から用いられているからです。）また、量子力学では複素数を使う必要があります。

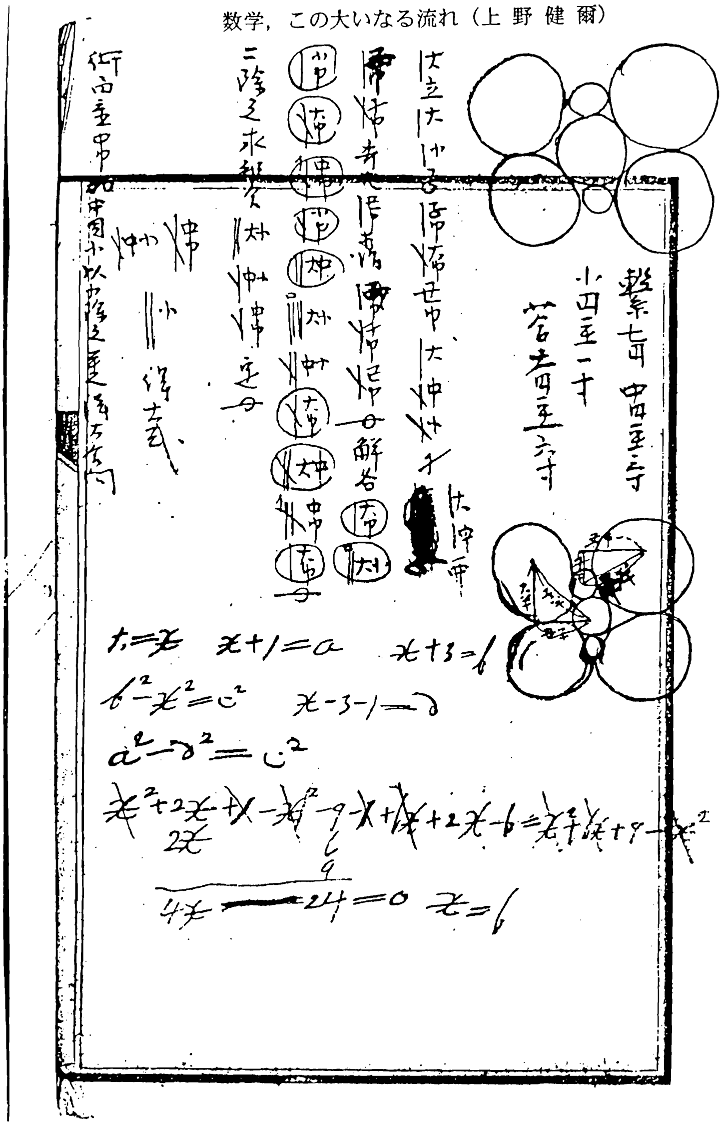
もう一つ大切なことは文字式を使うことによって様々な現象を数学的に表現できるようになることです。このことによって、数学が他の学問と結びつき、自らを豊かにして行きました。ただ、和算の場合は江戸時代の社会や文化の関係で、自然科学は発達せず、こうした意味での文字式の使用はありませんでした。しかしながら、江戸時代後期から明治時代初期にかけて西洋数学が我が国に本格的に入り、和算から洋算へと移行するとき、その移行は比較的簡単に行われました。これは高度に発達した和算があったおかげです。

京都大学の附属図書館には1952年に佐藤 則之氏が寄贈された和算書のコレクションがあります。これは関流の和算家であり、備後福山藩の藩校誠之館で明治5年まで数学の教授をした氏の祖父 佐藤 則義（1820 – 96）の遺著である和算書の一部です。これらはすべて写本ですが、その中に和算から洋算への移行を示す興味深い著作があります。1次方程式の解法で和算の記号と未知数 x y との対応を記したものです。この例のように、文字式に関する限り、一番基本の部分では単に記号を置き換え、縦書きを横書きに置き換えれば良かったのです。

もちろん、そうはいっても種々の問題はありました。和算では括弧の使用がありませんでしたので、式を書き表すのが大変でしたし、また和算では函数の概念がはっきりとは出来上がっていませんでしたので、こうした概念的なことを勉強することは当時は大変だったと思われます。



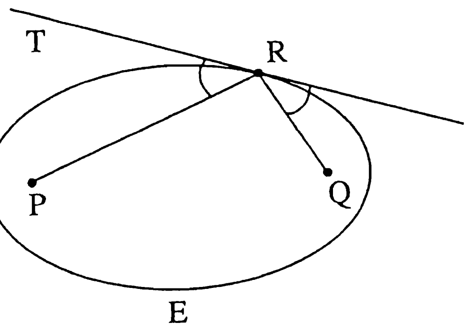
中国数学書、和算書での記数法



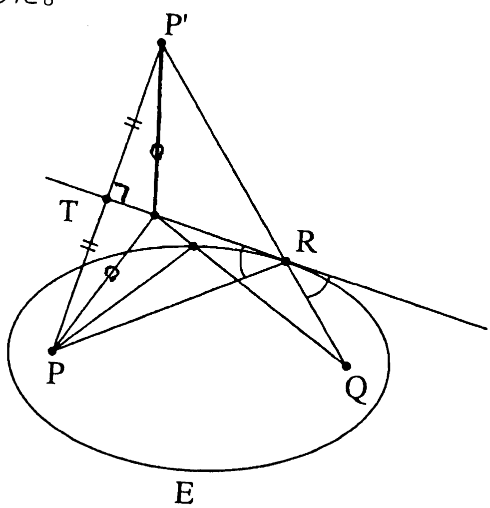
佐藤 則義 著「算法浅問抄解」（京都大学附属図書館蔵）

楕円の接線とシュタイナーの問題

さて、話が脱線してしまいましたのでもう一度もとの問題に戻りましょう。今度は、楕円の接線について考えてみましょう。二点からの長さの和が一定である点の軌跡を楕円といいます。また、この二点を楕円の焦点といいます。楕円の接線に対しては次の図のように接点と二つの焦点を結ぶ線分と接線とのなす角が等しくなります。



この事実の証明は次の図を見ていただければお分かりになると思います。ただし、ここで楕円の内部の二点を結ぶ線分は楕円に含まれる、言い換えると楕円は凸であるという事実を使いました。



楕円というと皆さんの中には惑星の軌道のことを思われる方も多いことと思います。太陽系の惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描いているという事実はチェコ・ブラーエの詳細な観測結果を基にしてケプラーによって発見されました（ケプラーの第一法則、1605年）。ケプラーは惑星の運動に関する三法則で有名ですが、当時は占星術師としても有名でした。彼は、アポロニウスの円錐曲線論に詳しく、それがケプラーの法則の発見につながっています。一方、彼は太陽系の惑星がなぜ6個しかないのか（天王星の発見は1781年W.ハーシェルによる）、その理由を考え、正多面体が5個しかないことを使って説明しようとしました([4])。しかし、それでは十分に説明できないことが分かると星型多面体やアルキメデス多面体を考え、説明しようと試みました。彼は、宇宙の調和に関して確固たる信念を持ち、それを説明しようと試みたわけです。彼の第三法則が発表された著書 [5] では和声学につい

ての考察も含まれいます。古代ギリシアのピュタゴラス教団の人たちは、惑星が天球の中を運動するとき調和のとれた音を出していると信じていたという伝説が伝えられていました。ケプラーはこうした惑星の音を [5] の中に記しています。


HARMONICIS LIB. V. 207

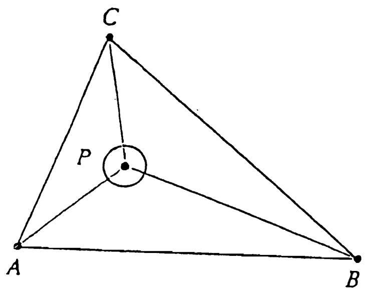
CAP. VI

mnia (infinita in potentiâ) permeantes actu: id quod aliter à me non potuit exprimi, quam per continuam seriem Notarum intermedia-

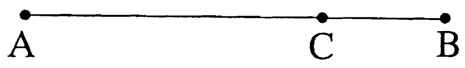
rum. Venus ferè manet in unisono non æquans tensionis amplitudine vel minimum ex concinnis intervallis.

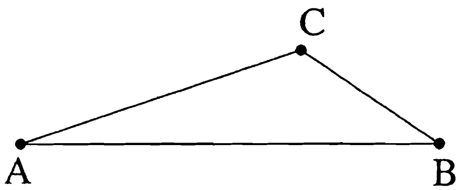
楕円は二次曲線の仲間ですが、二次曲線は円錐曲線とも呼ばれます。円錐曲線は英語では conic section といいます。字義通り、円錐の切り口としてでてくる曲線です。この観点からアポロニウスは円錐曲線の性質を詳しく研究しました。彼の時代にはまだ文字式も、ましてや座標の考えもありませんでしたが、彼は座標幾何学のすぐ近くまで到達していました。アポロニウスの著作を勉強したフェルマはデカルトと独立に座標幾何学に到達しました。フェルマの座標幾何学は斜交座標をも考えていた点でデカルトより進んでいましたが、生前は発表されることがありませんでした。

さて、楕円の接線の性質を使うことによって、シュタイナーの問題を考えてみましょう。シュタイナーの問題というのは三点 A, B, C に対して、点 P を点 P から三点への距離の和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ が最小になるように決めよという問題です。実はこの問題はすでにフェルマが考察していました。

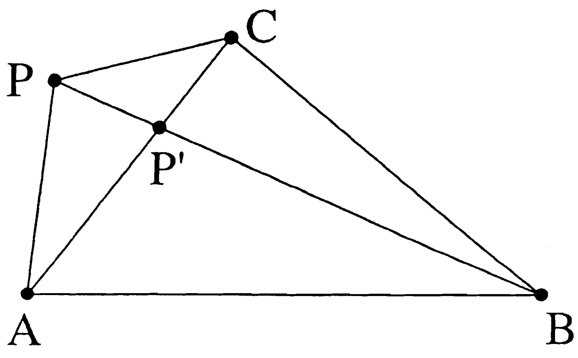


三点 A, B, C が一直線上にあるときは簡単に解が分かります。点 C が線分 A, B 上にあるときは点 C が求める点 P です。このことから点 C が線分 AB よりそれほど離れていなければ点 P は点 C と一致するか点 C からそれほど離れていないことが予想され、事実、点 P は点 C に他ならないことが示さます。

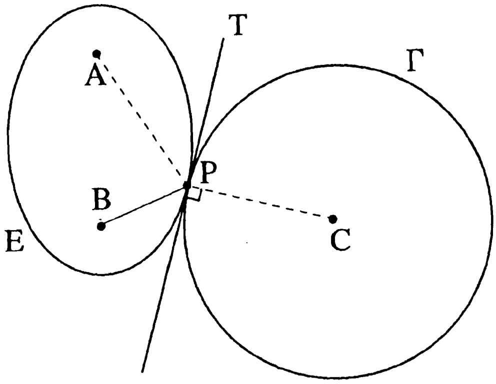




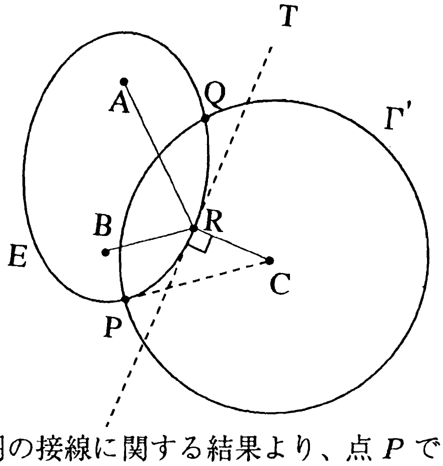
しかし、三角形 ABC のそれぞれの角が 120° より小さい時は事情がまったく変わってくることが示されます。以下、三角形 ABC のすべての内角は 120° より小さいと仮定します。まず点 P は存在するとすれば三角形の辺の上、または内部にあることが次の図よりすぐに分かります。線分 PA が辺 AC と点 P' で交わるとき、$\overline{PA}+\overline{PC}>\overline{AC}=\overline{P'A}+\overline{P'C}$ が成立します。したがって、$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$ が成立します。



次に点 P は辺 AB 上にないと仮定します。点 A, B を焦点とし点 P をその上の点とする楕円を描いてみます。この時、点 C を中心として半径が $\overline{CP}$ の円 Γ は点 P で楕円と接することが分かります。



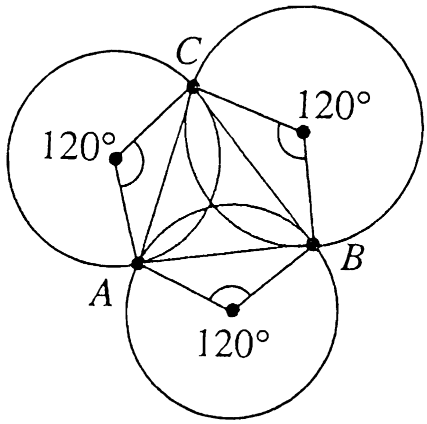
これは次のようにして、証明することができます。もし、点 P で楕円と円 Γ が接することがなければ、円 Γ は楕円と点 P およびもう一つの点 Q で交わります。この時下の図のように点 C から楕円への最短線 CR を引くと点 R での楕円の接線と CR とは直交することが分かります。したがって $\overline{PC} > \overline{RC}$ が成立し、楕円の性質 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{RA}+\overline{RB}$ を使うと $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{RA}+\overline{RB}+\overline{RC}$ が成り立つことが分かります。これは、点 P の性質に反します。



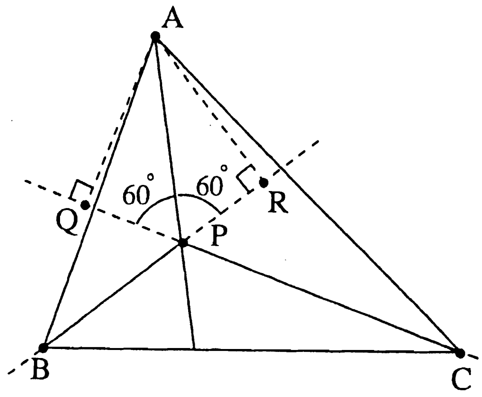
この考察と以前の楕円の接線に関する結果より、点 P での楕円の接線を考えることによって $\angle APC = \angle BPC$ を得ます。さらに、点 P が辺 BC にないと仮定する、同様の議論をにより $\angle BPA = \angle CPA$ を得ます。すなわち

$$\angle APC = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$$

を得ます。この条件を満足する点をトリチェリ点と呼びます。トリチェリ点は次のように作図できます。



以上の議論により、シュタイナーの問題の解を与える点はトリチェリ点であるか、または三角形の頂点であるかのいずれかであることが分かります。しかし、三角形の頂点はシュタイナー問題の解は与えません。これは次のように証明できます。点 A を考えましょう。点 A から直線 CP, BP へおろした垂線の足をそれぞれ Q, R と記しましょう。先の楕円を使った考察から $\angle APQ = \angle APR = 60°$ であることが分かります。従って直角三角形 APQ, APR で $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AP} = \overline{PR}$ であることが分かります。また直角三角形 ABR では AB が斜辺ですので $\overline{AB} > \overline{BR}$ が成り立つことが分かります。同様に直角三角形 ACQ で $\overline{AC} > \overline{CQ}$ が成り立ちます。

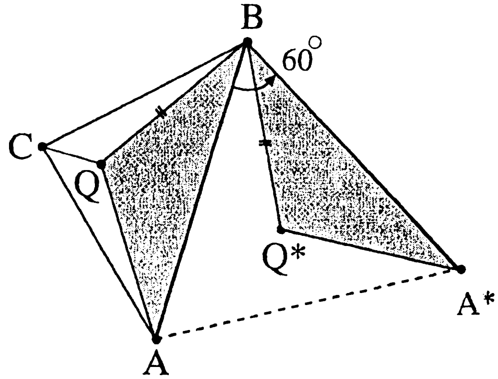


以上のことより

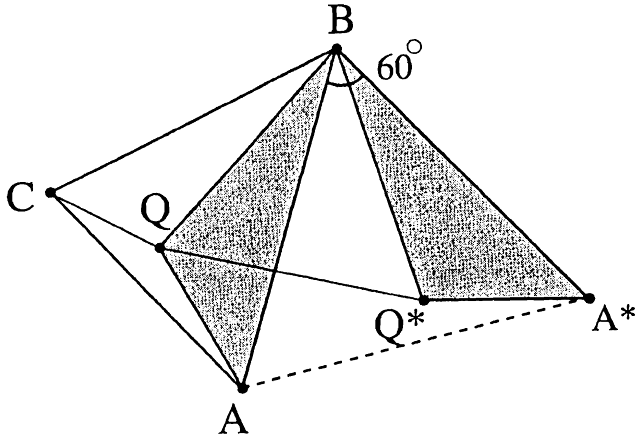
$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{AC} &> \overline{BR} + \overline{CQ} \\ &= \overline{PB} + \overline{PR} + \overline{PC} + \overline{PQ} \\ &= \overline{PB} + \overline{PC} + \frac{1}{2}\overline{PA} + \frac{1}{2}\overline{PA} \\ &= \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}\end{aligned}$$

が成立します。これは点 A がシュタイナーの問題の解を与えないことを意味します。

これでシュタイナーの問題は解決されたように思われるかもしれませんが、今までの議論は点 P が存在すると仮定して議論してきたことに注意しましょう。証明できたことは点 P が存在するとすればトリチェリ点であるということです。そこで、最後に点 P が実際に存在することを示しましょう。そのために、三角形 ABC を頂点 B を中心にして 60° 反時計回りに回転してみます。点 Q に対してこの操作で 60° 回転して得られ点を Q^* と記しましょう。



この時三角形 BQQ^* は正三角形であり、$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=\overline{QC}+\overline{QQ^*}+\overline{Q^*A^*}$ となります。



したがってこの和の最小値は $\overline{CA^*}$ であり、最小値は点 Q が線分 CA^* 上にあるときであることが分かります。これは $\angle BQC = 120^\circ$ を意味し、点 Q はトリチェリ点であることが分かります。このようにしてトリチェリ点がシュタイナー問題の解を与えることが分かります。

ここまで来ると、最初の初等幾何学の主張「三角形の二辺の長さの和は他の一辺より長い」のように当たり前の結果ではありません。しかし、今までの議論で大切な役割をしたのは、この当たり前の主張です。このように、論理の力によって私達の思いもかけない事実を見出すことができるのです。また、逆にこうした論理の力

は数学を学ぶことによって身につけることができます。数学は役に立つか立たないかという議論がよく行われますが、水や空気のように知らない内に数学の恩恵を受けていることは多いのです。

ところで、シュタイナーの問題は3点だけでなく4点以上の点の配置に対しても考えることができます。この時の考察も上の三点の場合が基礎となる。しかし、点の配置によっては点 P は必ずしも一意的には決まらないことがあります。

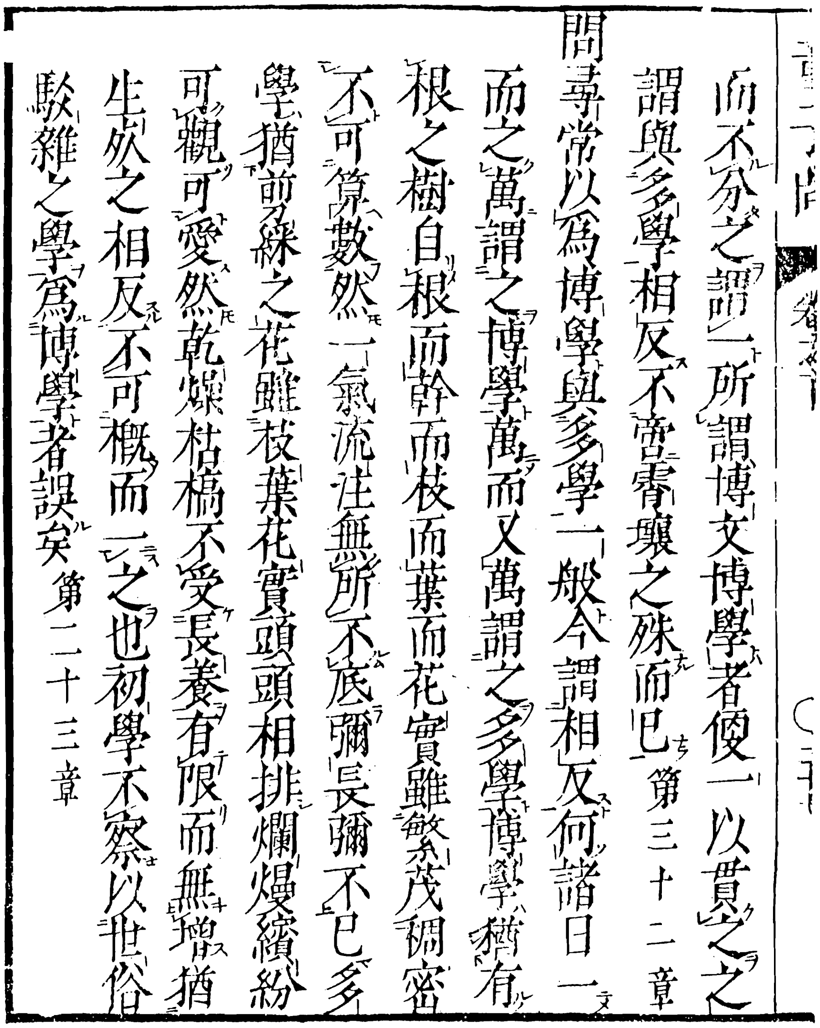
これまで考えてきた最小値を求める問題は、もっと一般的には函数の極大、極小を求める問題になります。この問題は、物理の最小作用の原理とも密接に関係しています。二点間を結ぶ最短の曲線は線分であるという性質は平らな空間、すなわちユークリッド空間の性質です。現実の世界では空間は曲がっています。私たちの住む世界がユークリッド幾何学が成立する世界であるかどうかは19世紀初頭すでにガウスが問題にして、巨大な三角形の内角の和が 180° であるかどうかを測定をしました。三角形の内角の和が 180° であることが空間がユークリッド的であることを判定できる条件になります。ガウスのこの壮大な実験は残念ながら測定誤差の範囲内で三角形の内角の和は 180° となり、成功しませんでした。このことはもちろん、私たちの住んでいる世界はほとんどユークリッド的であることを意味します。

一般の曲がった空間では二点間を結ぶ最短の曲線は測地線と呼ばれます今まで考えてきた問題は変分法と呼ばれる数学の一分野の簡単な場合です。変分法は物理では最小作用の原理を通して大切な働きをしています。上で、光の屈折に関するフェルマの原理について少し触れました。一般相対性理論によれば光は測地線に沿って進み、太陽の様に質量の大きな物体の周りでは空間はゆがみ、測地線は直線では無くなってしまいます。したがって、太陽の周りでは光は曲がって進むことになります。このことが、日食の時観測され、アインシュタインの一般相対性理論の正しさが示されたことをご存知の方も多いことと思います。変分法は現代の数学、物理学で大切な役割をしています。このように「三角形の二辺の長さの和は残りの辺の長さより長い」という当たり前の主張から、一見関係のないと思われる幾何学的な性質が論理の力によってたくさん導くことができます。これが、数学の持つ力です。おまけに、導かれた種々の性質はその奥深いところで様々に絡み合って美しい数学を作り上げています。最小作用の原理、変分法については名著 [3] があります。一読をお勧めします。

以上のような事実に目を向ければ、数学は伊藤　仁斎が「童子問」でいうように博学そのものであると思います。

一にして萬に之く、これを博学と謂う。萬にして萬又萬、之を多学と謂う。博学は猶 根あるの樹、根よりして而して幹、而して葉、而して果実、繁茂稠密、算(かぞ)え数うべからずと雖ども、然れども一気流注して、底(いた)らずという所無く、いよいよ長じていよ

いよやまざるがごとし。多学は猶 剪綵(せんさい)の花[2] 、枝葉果実、頭頭相排し[3] 、爛漫繽紛(らんまんひんぷん)、観(み)つべく愛すべきと雖ども、然れども乾燥枯槁(ここう)[4] 、長養を受けず[5] 、限り有って増すこと無きがごとし。猶 生死の相反するがごとし。概して之を一にすべからず。(伊藤仁斎「童子問」巻の下、第三十三章)


而不分之謂一所謂博文博學者便一以貫之之謂與多學相反不啻霄壤之殊而已 第三十二章
問尋常以爲博學與多學一般今謂相反何諸曰一而之萬謂之博學萬而又萬謂之多學博學猶有根之樹自根而幹而枝而葉而花實雖繁茂稠密不可算數然一氣流注無所不底彌長彌不已多學猶剪綵之花雖枝葉花實頭頭相排爛熳繽紛可觀可愛然乾燥枯槁不受長養有限而無增猶生死之相反不可概而一之也初學不察以世俗駁雜之學爲博學者誤矣 第二十三章

伊藤仁斎「童子問」巻の下 (明治三七年再刊本)
第三十三章が第二十三章と誤刻されている

---

[2] 布切れの造花
[3] 頭をならべて押し合いへし合いする
[4] 枯れている
[5] 養育されて成長させられることがない

今日は、初等幾何学の当たり前の主張から出発して、当たり前でない事実が沢山説明できることをお話ししました。易しい事実の背後にも、数学の深い世界が控えていることを感じとっていただけたら幸いです。

文献

[1] 井上　勝美　「キリシタン思想史研究序説」ぺりかん社、1996年

[2] 平山　諦　「和算の誕生」　恒星閣厚生社、1993年

[3] S. Hildebrandt & A. Tromba : The Parsimonious Universe, Copernicus, 1995

[4] J. Kepler 「宇宙の神秘」（大槻　真一郎・岸本　良彦訳）工作舎、1982年

[5] J. Kepler : Harumonium Mundi (宇宙の調和（和音））

[6] 「教育」今後の方向　偏差値中心の学習から自発的学習をめざす、
三浦朱門・教課審会長に聞く、週間教育 Pro 4月1日号、p6 – 11

（うえの けんじ，京都大学大学院理学研究科）