面積から考えてみよう[1]

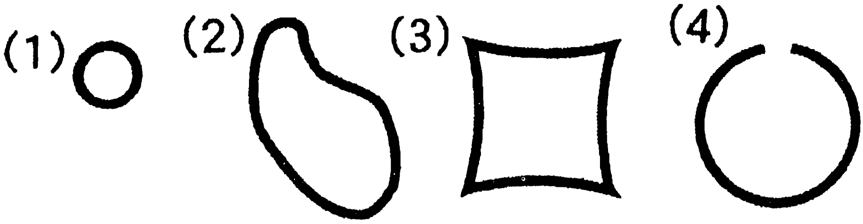
岡部恒治

1. 仲間外れはどれ

今日は皆さんと一緒に、算数と数学の意味について考えていきたいと思います。まず、次の問題に答えてください。この問題では、必ず1回以上手をあげてください。

問題1

仲間外れはどれでしょう。



この問題は私の講演では、必ず最初にするものですから、協力してください。

皆さんの意見では、(4)が圧倒的に多かったので、私は数えるのをやめました。これに関連して、最初にお断りしておかなければならないことがあります。それは、私はこども

注1）1999年10月5日　藤岡市における、おもしろ数学教室（小学生の部）の草稿に加筆訂正したもの

のときから算数が苦手で、数えることもあまり得意ではありません。「こんな人を小学生の部の講師にした数学会はどうなってるんだ」とお考えの方もいらっしゃるでしょうが、少なくとも私がこの講師を引き受けた理由はこの講義の中でわかってくると思います。

脇道にそれました。話を元に戻します。圧倒的に多かった「(4)が仲間外れ」の理由は何ですか。そうですね、「線が切れている」という言い方もありますね。なかなか良い表現ですが、もっとはっきりさせるために、この図が書いてあるＯＨＰ用紙をカッターで切ってみましょう。

そうすると、他の図形は全部下に落ちてしまうのに、この(4)の図形だけがブラブラして落ちないですね。つまり、「線が切れている」から、「この用紙から切れていない」のですね。これは、「この図形の線がこの用紙を２つに分けていない」ということを意味しています。

では、その次に多かった、「(2)が仲間外れ」の意見についても聞いてみましょう。この図形以外では、さっき切り取ったそれぞれの図形を縦の中心線で折ってみると、このように重なります。でも、この(2)の図形だけは違います。ある線で折ったら重なるような図形を「線対称」と言うのですが、他の図形はみな線対称なのに、この(2)の図形だけが違うのですね。

実は、ちょっと意外だったのは、(1)より(2)がのほうが多かったことです。小学校では、(1)と答える人が多く、(2)は中学生で多くなると思っていたからです。(2)が中学で多くなる理由は、中学１年生で図形の対称について勉強するからです。小学校も低学年の生徒が多くなると少し変わるかもしれません。

また、もう一つ意外だったのは、(4)を仲間外れにした人が圧倒的に多かったこともあります。(4)はどこでも多く高校生以上では圧倒的に多くなりますが、小学生でこれほど圧倒的だとは思いませんでした。･･･。

さて、ここではあまり人気のなかったんですが、(1)の図形を見てみましょう。その理由は、今答えてくれた「小さい」ですね。確かに、切り取った図形を重ねて比較しても、この図形が他よりも飛び抜けて小さいことがよくわかります。今回少なかったのは、この理由が他のものにくらべて大変簡単すぎて、逆に改めて答えて良いものか考えてしまったことにあるのではないでしょうか。でも、「簡単な」、あるいは「原始的な」というのは、多くの場合、「基本的な」と言い換えられます。つまり、簡単なものは重要なことが多く、簡単だからこそ、おろそかにできないことが多いんです。

最後に(3)ですが、(3)が仲間外れという人は、どこへ行っても少ないです。でも、これも今言ってくれたように、「とがっているところがある」という他の図形にはない性質を持っています。さっき切り抜いた図形で顔をつついてみると、他の図形とは違って痛いんですよ。

2.　何が本質的なのか

算数教室で出た問題だから、「正解は一つ」と考えたかもしれません。

しかし、これらの違う見方が必要になることがあるのです。たとえば、不動産関係の仕事をする人には、土地が大きいか小さいかの感覚は大変重要なものですから、(1)がすぐ目に付くでしょう。

一方、デザイン関係に進みたい人は、対称性の感覚はとても大切ですから(2)が気になるはずです。

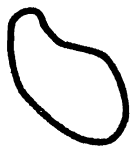
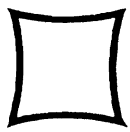
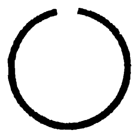
また、(3)の違いの感覚は、鉄道の線路の設計に必要です。「４カ所くらい尖っていてもいいじゃないか」という人に線路を設計されたらかないませんね。

さらに、動物園の飼育係にとっては、(4)の違いは死活問題です。間に鉄柵があるから平気だなんて、ライオンに「アッカンベー」とやったら、鉄柵の切れているところから回り込んでガブリとやられてしまうかもしれないのです。

鉄道の線路の設計者とか、動物園の飼育係などは冗談ですが、ほとんど意識しないで、日常でもこのような感覚を用いているのです。たとえば、手書きの文字の読み取りをするときに、その字の尖っている場所や、どことどこがくっついているかどうかで判断することがありますね。

昔、ドイツのクラインという数学者が「その図形の何を大切と見るかで幾何が決まる。大切と見たものは変えないで、それ以外のものは変えて調べる」という趣旨のことを言ったのです。つまり、何か調べたいことがあったら、本質的には何を調べればよいのかはっきりさせてから、調査や計算をしなければならないのです。本質的に何が大切なのかを決めたら、たとえば、長さがだけが必要だったら、切ったり移動したりしてもよいから、長さを変えずに簡単な図形にして計算すればよいのです。また、面積だけが大事だったら、面積を変えないように図形を変えて計算しやすくしてもよいのです。

ここで、今までのことを表にしてお見せしておきましょう。

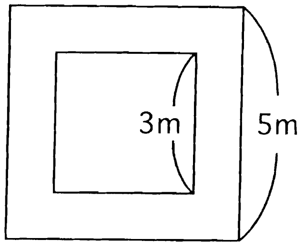
形	(1) 	(2) 	(3) 	(4) 
理由	小さい	対称でない	角がある	平面を２つに分けない
その感覚を必要とする職業	不動産業	デザイナー	鉄道の設計者	動物園の飼育係

３．　正方形を正方形でくり抜いたら

今日は、そのうちの面積について考えてみます。次の問題から考えてください。

問題２

図のような１辺の長さ５ｍの正方形から、１辺の長さ３ｍの正方形をくり抜いたら、面積はどうなるでしょうか。



（解答）

この計算はすぐできますね。大きい正方形の面積は

５ｍ×５ｍ＝25㎡

小さい方は

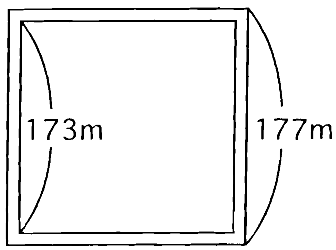
３ｍ×３ｍ＝９㎡

よって、答えは、　25－９＝16　（㎡）　■

では、ちょっと数字を大きくしてみましょう。

問題３

１辺の長さ177ｍの正方形から、１辺の長さ173ｍの正方形をくり抜いたら、面積はどうなるでしょうか。



諸君の中には、177×177と173×173の計算をすれば、‥‥と、すぐ取り掛かりたい人もいるでしょう。でも、ちょっと待ってください。　実は、算数が大の苦手だった私が数学者になった理由は、この問題をいかにやさしく解くかを考えることによって出てくるのです。

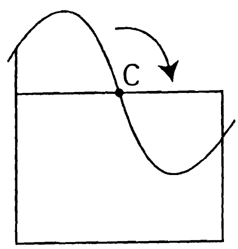
４．　　　棒グラフの平均

そのために、イキナリ話を「平均について」に飛ばします。

次のことが成り立ちそうだということはすぐわかりますね。

（定理）

右図の灰色の部分の面積は、曲線上のある一点（図ではＣ）の高さをもつ長方形に等しくなる。



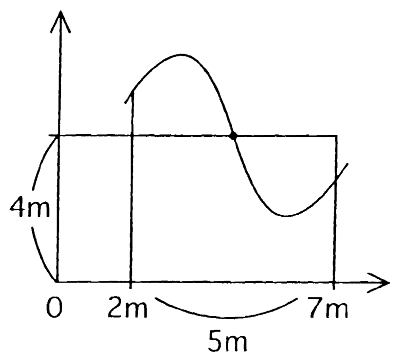
こういう場合は、グラフに定規を当てて、はみ出した部分とへっこんでいる部分がほぼ同じくらいの面積になるような点Ｃを探せば、その高さの長方形の面積が求めるものになるのです。

いま、「定理」と書きましたが、定理はここに書かれている条件(この場合はグラフがつながっている)が成り立っていれば、結論（この場合、点Ｃが必ずある）が必ず成り立つことを保証してくれるたのもしい味方です。

例えば、下図の場合は、幅が５ｍで、Ｃの高さが４ｍですから、面積は

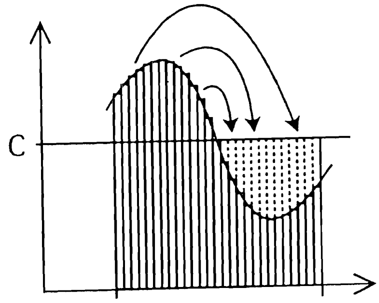
$$5\times 4=20\ (\mathrm{m}^2)$$

となります。



この点Ｃについて、もう少し検討を加えておきましょう。

少し荒っぽいですが、いまのグラフを棒グラフで近似しておきます。



Cの点で引いた線の下の部分の足りないところに、上にはみ出した棒を切ってくっつけます。そうすると、これがピッタリ長方形になりますから、この曲線の高さの平均がcになっていることがわかります。つまり、さっきの定理の意味は、

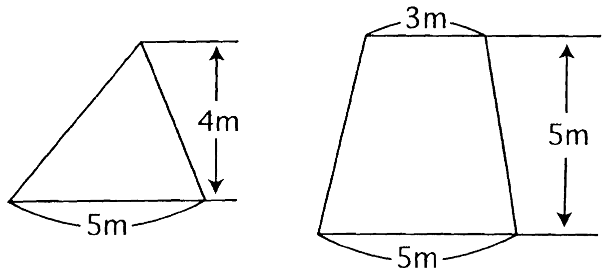
面積＝幅×（平均の高さ）

だったのです。

実はこの計算法と同じことは今までにも、やってきたのです。たとえば、三角形と台形の面積です。

問題４

右の三角形の面積が10㎡、台形の面積が20㎡になることを、今と同じ考え方で説明してみよう。
（こんどは、「高さ×平均の幅」にします）

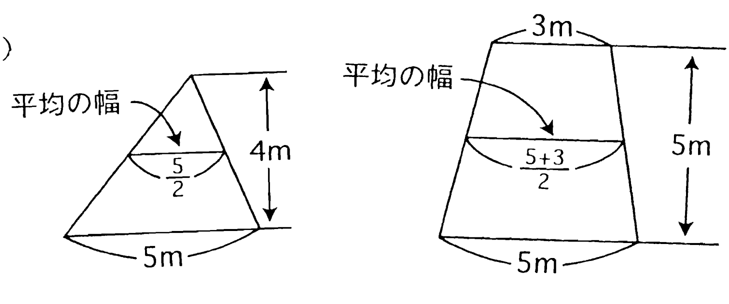


（解答）

図のように、底辺と平行な中線を引けば、今度は平均を幅の方でとっていますが、やはり、

面積＝高さ×（平均の幅）

という形になっています。



$4\times\frac{5}{2}=10\,(\mathrm{m}^2)$　　$5\times\left(\frac{5+3}{2}\right)=20\,(\mathrm{m}^2)$

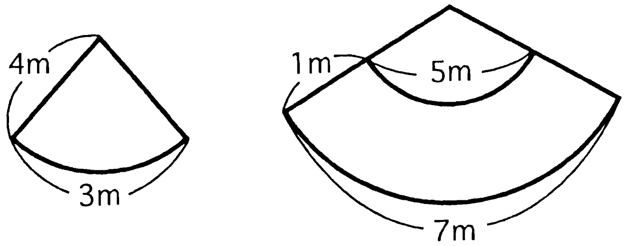
■

5.　　扇形の面積

　扇形や扇の紙の部分の形（下の右図）の面積では、中心角を求めてから、計算する人が多いようです。しかし、もっと簡単な方法があります。

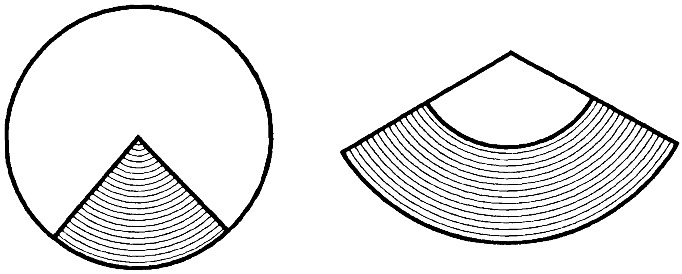
問題５

　右の２つの図形の灰色の部分の面積はそれぞれどうなるでしょうか。



（解答）

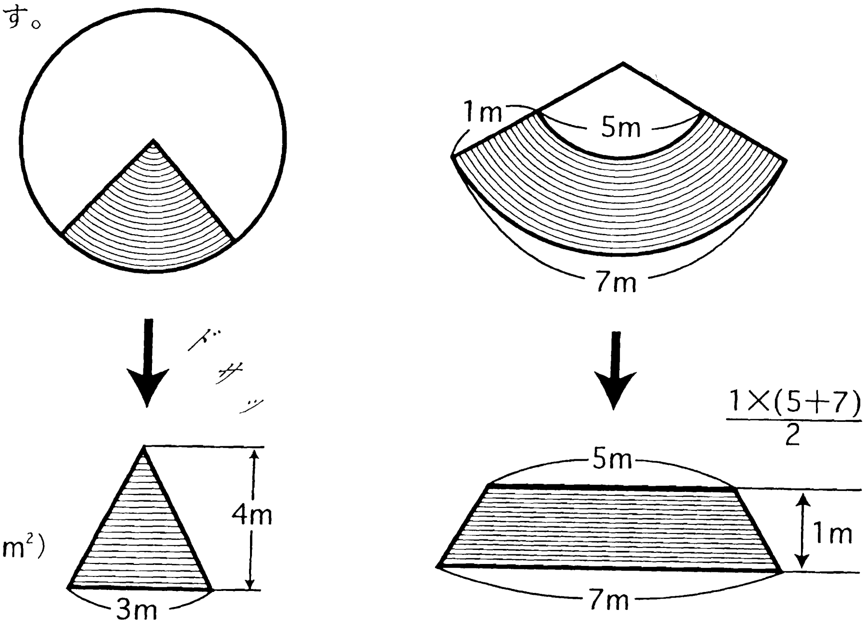
　図形を細い帯状の部分に分け、これを薄いトイレット・ペーパーと思ってください。



それを切って平らな床に落とすとどうでしょう。三角形と台形になって、やはり

面積＝高さ×平均の幅

の式が使えます。



$\frac{4\times3}{2}=6\,(m^2)$

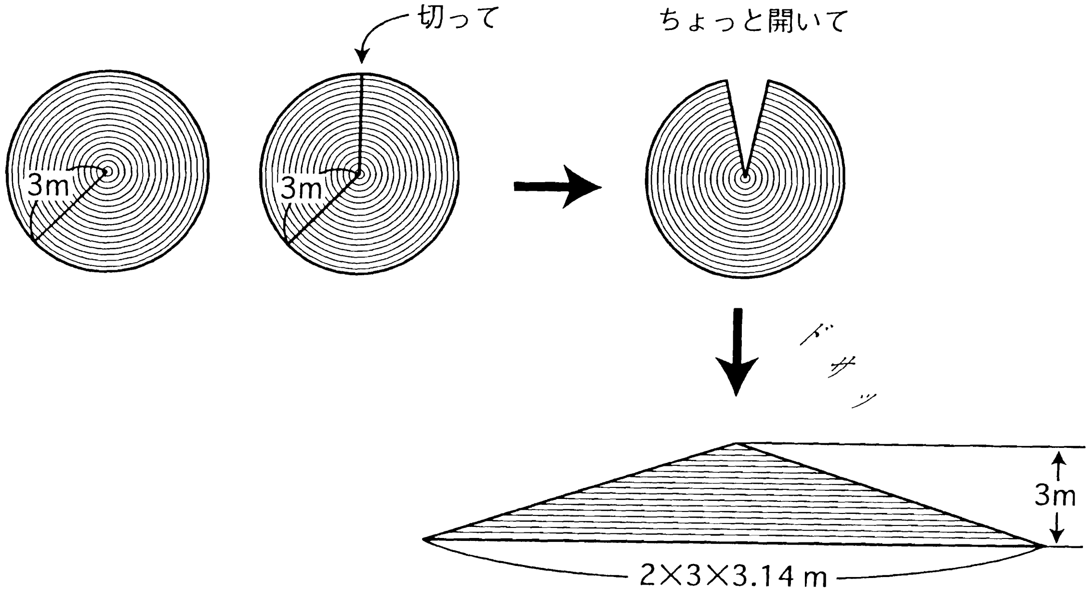
$\frac{1\times(5+7)}{2}=6\,(m^2)$

■

円周率3.14は、これを円の直径にかければ、その周の長さが出てくる便利な数でしたね。しかし、このきまりからは、円の面積は直接出てきません。

そこで、円の周の長さから、円の面積を求める必要があります。これについて、皆さんはきっと別の方法で習ったと思いますが、上の扇形の中心角を360°にしたと考えることもできます。

たとえば、半径３ｍの場合、やはりトイレット・ペーパーが同心円に何巻きも巻いてあると考えると、切り開いて平らな床に落とすと、三角形になります。この底辺の長さは円周の長さで、2×3×3.14 で、高さは半径と等しく、３ｍですから、次のようになります。



$$\frac{3\times(2\times3\times3.14)}{2} = 3\times3\times3.14$$

となるのです。

ここでやった方法はどんな半径のときも使えそうです。結論としては、

円の面積＝(半径)×(半径)×3.14

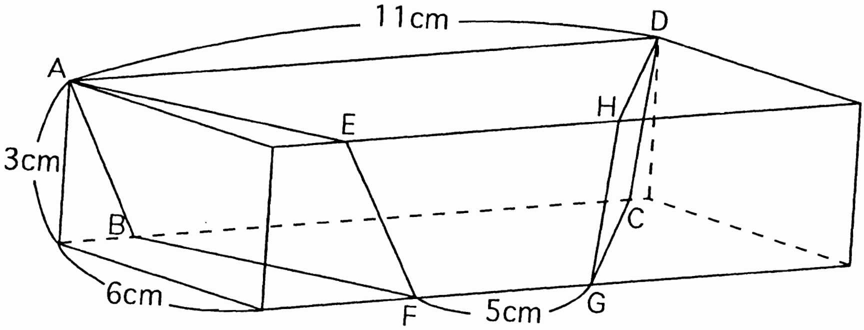
が出てくることがわかります。

6．　直方体を平面で切ってみると

「平均の高さ」の考え方は、立体の体積の計算にも役立ちます。
たとえば、次の問題がそれです。

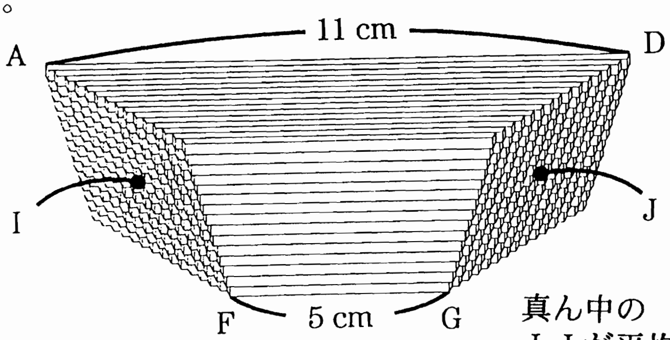
問題6

与えられた直方体を、図のように2つの平面で両側を切ってできる立体の体積を求めなさい。



この問題も、この立体を図のようにハシのような細い棒の集まりと考えて、
平均の幅×側面の面積
が体積となります。

ハシの平均の幅は（端ではなくて）真ん中のハシの幅になることは直観的にわかるでしょう。



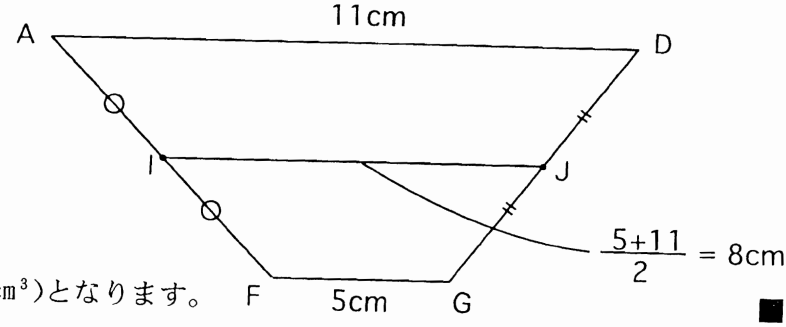
（解答）

（中心の幅）×（側面の面積）　が体積となります。

その幅を出す操作のときにも、平均の長さを用います。

こうして、
求める体積は

$6 \times 3 \times 8 = 144$　（cm^3）となります。

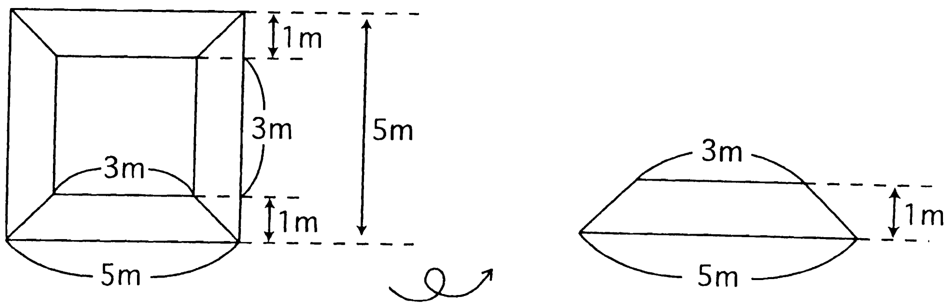


■

7.　くり抜いた正方形の面積問題を再び

さて、用意はととのいました。まず、問題２を別の見かたで解いてみます。

（解答）――――――――――――――――――――――



くりぬいたあとの図形は、帯のようになっています。この帯は、４つの台形に分けることができます。それぞれの台形は上底の長さが３ｍで、下底が５ｍです。高さについては、図の縦の長さを見てください。大きな正方形の１辺の長さが５ｍのところに、上下２つの台形があって、内側の１辺の長さが３ｍになっているわけですから、（５－３）÷２（＝１（ｍ））が各台形の高さとなるのです。結局、それぞれの台形の面積は

$$\left(\frac{5+3}{2}\right)\times\left(\frac{5-3}{2}\right)$$

となります。これを４倍したものが、最初に求めようとした面積です。つまり、面積の式は、

$$4\times\left[\underbrace{\left(\frac{5+3}{2}\right)}_{\text{平均の幅}}\times\underbrace{\left(\frac{5-3}{2}\right)}_{\text{高さ}}\right]=(5+3)\times(5-3)=16\ (\text{m}^2)$$

となります。■

一方、この面積は

$5\times5-3\times3=16\quad(\text{m}^2)$

でもあったのですから、

$5\times5-3\times3=(5+3)\times(5-3)$・・・・①

ということになります。この式を作るときに使ったのは、４つに分けた台形の平均の幅と高さですから、数字をいれかえてもまったく同じように進めていけます。つまり、①の式は２つの正方形の１辺の長さが５と３でなくとも成り立ちますね。

つまり、次のことが成り立ちます。

（性質）

大きい正方形から小さい正方形を引いたときの面積は、
大きい正方形の１辺の長さを（大辺長）、小さい正方形の１辺の長さを（小辺長）と書くと、

面積＝(大辺長)×(大辺長)－(小辺長)×(小辺長)
　　＝{(大辺長)＋(小辺長)}×{(大辺長)－(小辺長)}

この２つの式のうち、使いやすいものを使えば良いということになります。

（問題３の解答）

さて、問題３の場合は

$$177 \times 177 - 173 \times 173$$

の計算が大変でした。それで、もう一つの方を使ってみると、

$$(177+173)\times(177-173)=350\times 4=1400 \quad (\mathrm{m}^2)$$

となります。　■

はるかにラクですね。
じつは、ここで紹介した、

$$5\times 5-3\times 3=(5+3)\times(5-3)\cdots\cdots ①$$

$$177\times 177-173\times 173=(177+173)\times(177-173)$$

などのように、計算するときに式を計算しやすいように、このように変えることを「因数分解」と言います。このことは中学校と高校で学習するものなです。このやり方を知っていると計算がこんなにラクになりますし、他にもいろいろな世界が広がってくるのです。

しかし、大学生にアンケートを取ると、因数分解が「役に立たない数学の項目」の上位にランクされてしまうんですね。これは、問題が出たら、あまり考えずにやみくもに計算に取り掛かってしまう状態からきているような気がしてなりません。このようにして、数学を繁雑な計算だけと誤解する人が出て来るのは、残念なことです。

8.　ガウスはなぜ天才か

また、話を少し変えます。
まず、次の問題を考えていただきましょう。

問題７

１＋２＋３＋・・・＋99＋100
はいくらになるでしょうか？
なるべく、簡単な方法を考えてください。

この問題はアルキメデス、ニュートンと並んで三大数学者の一人ドイツのガウスのエピソードの中に出てきます。彼が９歳の時、塾の算数の時間のことでした。担当の先生が疲れたので、休もうと思って、上の問題を出しました。普通なら、小学校３年生くらいのこどもたちですから、１時間は休めるはずです。

ところが、かわいそうにその先生は休むことができませんでした。ガウスがあっと言う間にやってしまい、しかも正しかったのです。

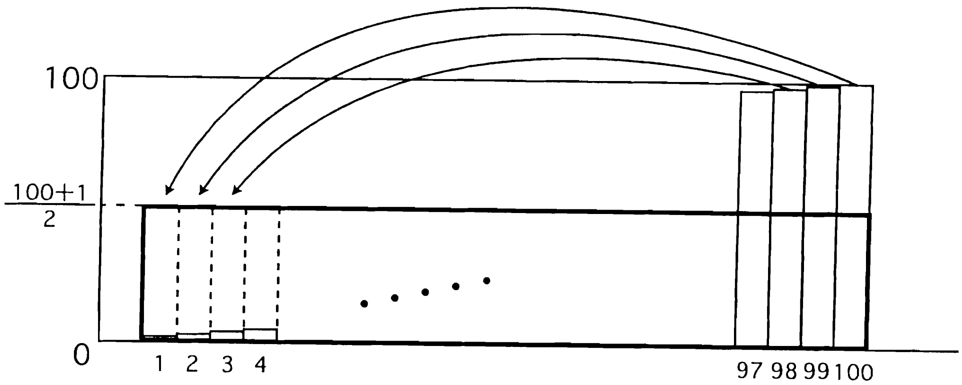
ガウスは計算力のすごさで有名です。３歳くらいのこどもの時から父親の給料計算の間違いを直したとも言われています[2)]。本人は「母親のおなかにいる頃から計算できた」と話していたそうですが、いくらなんでもこれは冗談でしょう。しかし、彼の評価が高いのは、計算力のすごさだけによるものではありません。

たとえば、この問題にしても、単に１００回加えるだけでは、そんなに早くできるわけがありません。計算力の他に、彼が数の性質を深く理解していたからこそ、簡単にできてしまったのです。

ガウスがやった計算方法を平均の考え方を用いて説明してみましょう。ガウスのやった計算の方法は残っていません(彼はそのころから途中式を残さない癖があった)。いろいろな説明の仕方がありますが、本質的には次の方法です。

１から100までの数を棒グラフに書いておいて、それを全部加えたらどうなるかを考えるのです。「４．棒グラフの平均」のときのあの方法を思い出してください。平均の高さで切って、越えている分を足りないところに足すのでしたね。

注2）このあたりのエピソードには、諸説がある。ここでは　Hollingdale（岡部監訳）『数学を築いた天才たち』（講談社）によった



（この図は縦方向を縮めてある）

この場合、平均の高さはどこでしょう。１ずつ同じ数だけ増えていくのですから、大きい方と小さい方の真ん中で平均になりそうです。つまり、

１から100までの数の平均は

$$\frac{101+1}{2} = \frac{101}{2}$$

となるのです。

ですから、すべての数を足したものは、長方形の面積と同じで、

$$（平均の値）\times 個数 = \frac{101+1}{2} \times 100$$

となります。ですから、

$$1+2+3+\cdots+99+100 = \underbrace{\frac{101+1}{2}}_{（平均の値）} \times \underbrace{100}_{個数} = 5050$$

この計算の方法は、一定の数だけ（この場合1）増えつづける数のたし算という条件しか用いていません。従って、連続する整数のたし算以外にも使えそうです。この場合のように一定の数だけ増え続ける数の並びを「等差数列」と言いますが、等差数列の足し算の計算は、平均の考え方で簡単に計算できるのです。

実は「平均」は、データを集めて分析する「統計」という分野の基本用語です。一般に、「統計」は幾何や代数とは無縁のように思っている人が多いようです。でも、これを用いることによって、さまざまの図形の面積計算、因数分解、さらには等差数列のたし算にまで話が広がりました。

算数や数学では、一見全くちがう問題のように見えても本質が同じなら応用できるので、本質に切り込むことが必要となってきます。それで、遠回りに見えても「この問題の本質は何か」ということを一生懸命考えた方がラクにもなります。このような本質を追求することは、新しいことを考えたりするときにとても大事なことです。みなさんに算数や数学を学んでもらいたい理由はここにあります。

10.　最後に

この原稿は、授業のためにあらかじめ用意しておいたものの一部に、当日に追加して話した内容の一部を補足したものです。ただ、ここには問題５の解説をギャグ調のＣＧアニメで、説明したものは残念ながら載せることはできません。

実は、筆者はこの授業に参加する小学生が、「希望者（すなわち、算数もしくは数学に興味をもっている小学生）」だけと考えていました。そのため、内容は小学校の枠内から発展させて、ピュタゴラスや微分のあたりにまでふくらますことも考えていました。

そのもくろみは、「三角形の面積の公式」も復習する必要があるという段階で、あえなく粉砕されました。しかし、講義の目指す基本的な方向を明確にするために、話し切れなかった（たとえば、直方体を切った体積など）部分も、ここに述べておきました。もちろん、このレジメは参加した小学生に配布してあります。いつか、読んでもらえればと思っています。

小学生の感想では（この種のものは、８割以上差し引いて受け取るべきですが）、さきほど述べたアニメについては、印象が強く残ったようで、これで数学に「楽しそうだ」というイメージを持ってもらえれば嬉しいのですが。私にとっても、大変刺激的な授業の経験でした。チャンスがあれば、再挑戦してみたいと思っています。この講義の機会を与えていただいた数学会に感謝します。

（おかべ つねはる・埼玉大学経済学部）